

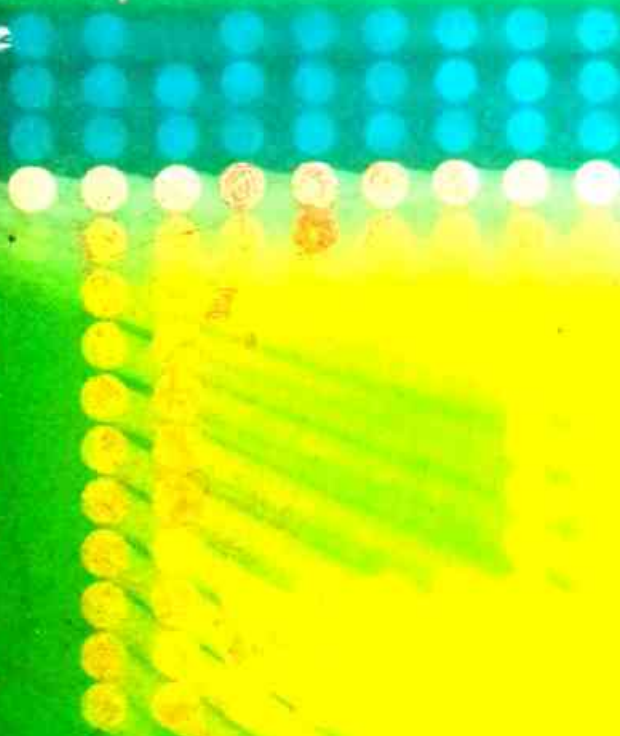
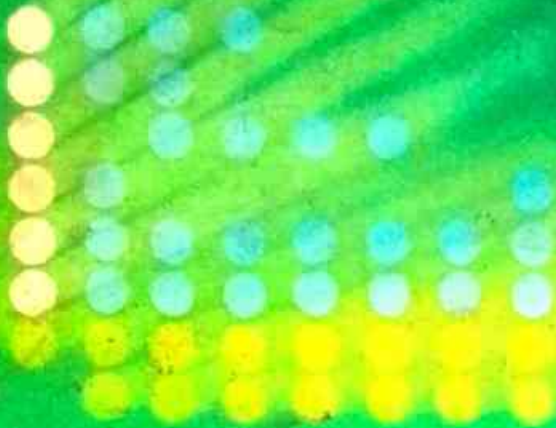
MATHÉMATIQUES

TERMINALES C et E

Tome 2

M. Monge M.-C. Audouin - Egoroff F. Lemaire - Body

BELIN



VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

M. MONGE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

M.-C. AUDOUIN-EGOROFF F. LEMAIRE-BODY

ANCIENNES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DE SÈVRES, AGRÉGÉES DE L'UNIVERSITÉ

PROFESSEURS DE TERMINALE C
M D J I N G A N G S I M B E R M A N N

MATHÉMATIQUES

TERMINALES C ET E

BULLETIN OFFICIEL DU 24 JUIN 1971

TOME 2 : ARITHMÉTIQUE, ANALYSE ET PROBABILITÉS

[Handwritten pink signature]

Kam Esemo Patrick Noël
PLEG - Mathématiques
CN 1ere Dan JUDO

LIBRAIRIE BELIN

8, RUE FÉROU - 75006 PARIS

Programme (B.O. du 24.6.1971 et du 19.7.1973).

Préambule.

- a) Les paragraphes marqués d'un astérisque ne peuvent faire l'objet de questions de cours, écrites ou orales, ni être utilisés, en mathématiques, à l'occasion d'un problème ou d'un exercice d'application à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.
- b) Les rubriques du programme comportent un ordre d'énumération. Cet ordre exprime parfois une intention dont les professeurs pourront s'inspirer, mais il ne saurait être imposé; par exemple il est loisible de permuter les trois alinéas du I.3 concernant les nombres entiers, les III.1 et 2 (notions de continuité et de limite), de donner, en II.3, une autre introduction des nombres complexes, etc.
- c) Chaque fois que l'occasion s'en présentera, on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes (noyau), automorphismes rencontrés.

I. Nombres entiers naturels. Arithmétique.

- 1° Énoncé des propriétés attribuées à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Raisonnement par récurrence. Applications de $\mathbb{N}$ dans un ensemble X ; notation indicielle; exemples.
- 2° Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs; multiples d'un entier relatif: notation $n\mathbb{Z}$. Congruences modulo n ; l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{N}$. Principe des systèmes de numération; base; numérations décimale et binaire.
- 3° (a) Nombres premiers dans $\mathbb{Z}$; si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
- (b) Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers; existence, unicité.
- (c) Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple; nombres premiers entre eux; identité de Bezout.
- (L'ordre de (a), (b), (c) est, bien entendu, laissé au choix du professeur.)

II. Nombres réels; calcul numérique; nombres complexes.

- 1° Inventaire (sans démonstration) des propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné (révision); toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant; tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant plus d'un point contient un nombre rationnel.
- 2° Valeurs approchées d'un nombre réel; encadrement; incertitudes absolue et relative.
-

III. Calcul différentiel.

1° Fonctions numériques d'une variable réelle : continuité.

Continuité "en un point"; continuité sur un intervalle; somme, produit, quotient de fonctions continues; continuité de la fonction composée de deux fonctions continues (sans démonstration). On admettra sans démonstration le théorème suivant: "si une fonction est continue sur un intervalle, l'image, par la fonction, de cet intervalle est un intervalle". Application à une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle: existence de la fonction réciproque; monotonie et continuité de cette fonction (on admettra la continuité).

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage du copiste et non destinées à une utilisation collective » toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

2° Fonctions numériques d'une variable réelle : limites.

Limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini. Unicité.

Cas particulier des suites.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient (sans démonstration).

3° Fonctions numériques d'une variable réelle : dérivation.

Révision du programme de Première C : fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; notation différentielle ; dérivée en ce point. Fonction dérivée ; dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) ; équation de la tangente. Définition des dérivées successives.

Dérivée en un point de la composée de deux fonctions dérivables.

Dérivée en un point de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone.

On admettra sans démonstration que, si une fonction numérique est dérivable sur un intervalle et si sa dérivée est positive ou nulle, elle est croissante au sens large sur cet intervalle.

Comparaison de deux fonctions ayant même fonction dérivée sur un intervalle.

Étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée. Représentation graphique ; exercices simples de recherche d'asymptotes.

4° Fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Continuité en un point ; limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un nombre réel donné, vers l'infini.

Dérivée en un point ; si l'espace vectoriel est rapporté à une base, coordonnées, dans cette base, de la dérivée ; fonction dérivée.

Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles dérivables, du produit d'une fonction vectorielle dérivable par une fonction numérique dérivable.

Dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles dérivables. Application à la recherche de tangentes ; exemples des coniques et des hélices circulaires.

5° Cinématique du point.

Mouvement d'un point : application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un espace affine euclidien. Trajectoire.

Vecteur-vitesse à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-vitesse dans ce repère. Norme du vecteur-vitesse.

Vecteur-accélération à un instant donné. Un repère étant choisi, coordonnées du vecteur-accélération dans ce repère.

Étude des mouvements circulaires (vitesse angulaire).

IV. Calcul intégral.

1° Définition des sommes de Riemann d'une fonction numérique f d'une variable réelle sur un intervalle fermé, borné $[a, b]$. On admettra que si f est continue ou monotone par morceaux, il

existe un unique nombre réel $\int_a^b f(t) dt$ que les sommes de Riemann approchent arbitrairement lorsque la largeur du plus grand intervalle de subdivision est suffisamment petite.

Propriétés de linéarité de l'intégrale d'une fonction continue ou monotone par morceaux sur un intervalle fermé borné.

Moyenne d'une telle fonction. Lien avec la dérivation si la fonction est continue.

Primitives ; ensemble des primitives ; égalité $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, f étant continue sur $[a, b]$ et admettant F pour primitive. Calcul de primitives ; intégration par parties.

2° On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire...). Application du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $a \leq x \leq b$ $0 \leq y \leq f(x)$; f étant une fonction positive monotone par morceaux, puis une fonction positive continue.
Extensions à $b < a$ et à une fonction négative.

V. Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves, pourront illustrer les chapitres précédents; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1° **Fonction** $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$); dérivée; primitives.

2° **Fonction** $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $x > 0$); dérivée; primitives.

3° **Suites** arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

4° **Fonctions circulaires**; dérivées (révision); dérivées et primitives de :
 $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$.

5° **Logarithme népérien** (notation Log) : $\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ ($x > 0$).

Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini, de $\text{Log } x$ et de $\frac{\text{Log } x}{x}$. Limite, quand x tend vers 0, de $x \text{Log } x$. Représentation graphique.

6° **Fonction exponentielle** (notation $\exp$).

Propriétés; dérivée; représentation graphique; nombre e ; notation e^x ; limite de $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

7° **Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.**

Relations entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a , et celles de base e .
Définition de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$; dérivée de la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

* Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \mapsto e^{i\omega x}$.

Remarque : l'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

8° **Calcul numérique.**

Usage de la règle à calcul.

Usage de tables; pratique de l'interpolation linéaire; tables de logarithmes.

Usage de machines à calculer de bureau.

VIII. Probabilités sur un ensemble fini.

1° **Espaces probabilisés finis** $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires); probabilité image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

2° **Espérance mathématique** d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
Espérance mathématique de la somme des deux variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle.

3° **Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff**. Épreuves répétées; loi faible des grands nombres.

Avertissement

Dans ce livre nous traitons la partie du programme des classes de Terminale C ou E qui n'a pas été traitée dans le premier tome, c'est-à-dire l'arithmétique (chap. 1 à 3), l'analyse (chap. 4 à 11) et les probabilités (chap. 12).

Les équations différentielles, qui ne font pas partie du programme du baccalauréat, sont traitées en appendice. Mais nous avons laissé à nos collègues physiciens le soin d'exposer, de la façon qu'ils jugeront la meilleure, les applications du calcul intégral à la mécanique et à la physique.

Nous avons utilisé les mêmes conventions typographiques que dans le premier tome :

- chaque démonstration est précédée du mot « Démonstration » et suivie du signe ■ qui en marque la fin,
- les exercices un peu difficiles sont précédés du signe *,
- le signe ✖ repère les questions qui ne figurent pas au programme des classes de Terminale E; il s'agit des chapitres 2 et 3 (p. 30 à 79) et du paragraphe 3.3 du chapitre 11 (p. 352 à 354).

Nous enseignons ce programme dans nos classes depuis sa mise en application. D'année en année, nous avons été amenées, pour certaines questions difficiles, à introduire quelques innovations de vocabulaire et de présentation qui, à l'usage, se sont révélées bénéfiques. Nous les avons donc adoptées dans ce livre. Nous donnons ainsi pour définition de la valeur absolue d'un réel x , la borne supérieure de x et de $-x$. Dans le chapitre 5, « Continuité et Limites », pour faire sentir aux élèves l'analogie entre les différentes notions de limites sans toutefois parler de « filtre », nous introduisons les notions de « famille de départ » et de « famille d'arrivée ». Nous employons aussi l'expression « intervalle épointé de centre x_0 » — avec un « é » privatif — qui nous paraît plus correcte que l'expression habituelle « intervalle pointé de centre x_0 ». Dans le chapitre 10, « Calcul intégral », nous introduisons l'intégrale de Riemann d'une fonction de la manière conseillée dans le B.O. du 19-7-1973. Nous commençons toutefois par étudier les fonctions en escalier sur un segment, qui constituent une bonne approche intuitive. Pour ne pas trop alourdir ce début, nous renvoyons certaines démonstrations simples en exercices, ce qui permet au professeur de mieux contrôler la compréhension du cours par les élèves.

Enfin, presque toutes les courbes sont dessinées dans un repère orthonormé. Nous pensons, en effet, que l'emploi des repères non orthonormés, qui est essentiel pour la résolution de certains problèmes de géométrie affine, présente un intérêt assez restreint pour l'étude des fonctions. Nous avons cependant gardé pour quelques courbes un repère non orthonormé afin que les élèves ne soient pas déroutés par une telle question au baccalauréat.

Nous comptons sur les professeurs et sur les élèves pour nous faire part de leurs commentaires, de leurs critiques et de leurs suggestions; nous les en remercions d'avance.

Jean-Michel Lemaire, ancien élève de l'École Normale Supérieure, maître de conférences à l'Université de Nice, nous a aidés de ses conseils dans la rédaction du manuscrit; il a bien voulu participer activement à la lecture des épreuves. Nous le remercions vivement de son précieux concours.

Les Auteurs.

Table des matières

Chapitre 1 : Entiers naturels. Numération

1. Ensembles ordonnés.....	9
2. Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.....	13
3. Numération.....	18

Chapitre 2 : Entiers rationnels. Entiers modulo n

1. Construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$	30
2. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$	41
3. Congruences dans $\mathbb{Z}$	44

Chapitre 3 : P.G.C.D. P.P.C.M. Nombres premiers

1. pgcd et ppcm.....	55
2. Nombres premiers.....	65

Chapitre 4 : Nombres réels. Suites

1. Inventaire des propriétés de $\mathbb{R}$	80
2. Suites.....	90

Chapitre 5 : Continuité. Limites

1. Continuité en un point.....	112
2. Continuité sur un intervalle.....	120
3. Limites.....	124

Chapitre 6 : Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

1. Fonction $x \mapsto x^n$	158
2. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.....	161
3. Puissances rationnelles d'un réel strictement positif.....	169

Chapitre 7 : Dérivation

1. Fonction dérivable en un point.....	177
2. Fonction dérivée.....	184
3. Dérivée et sens de variation.....	192

Chapitre 8 : Pratique de l'étude d'une fonction

1. Recherche de l'ensemble d'étude	200
2. Points particuliers	209
3. Branches infinies	215
4. Récapitulation. Exemples	227

Chapitre 9 : Fonction vectorielle d'une variable réelle

1. Fonction vectorielle d'une variable réelle	244
2. Cinématique	261

Chapitre 10 : Calcul intégral

1. Intégrale de Riemann	289
2. Primitives	299
3. Calculs d'aires	308

Chapitre 11 : Fonctions logarithmiques. Fonctions exponentielles

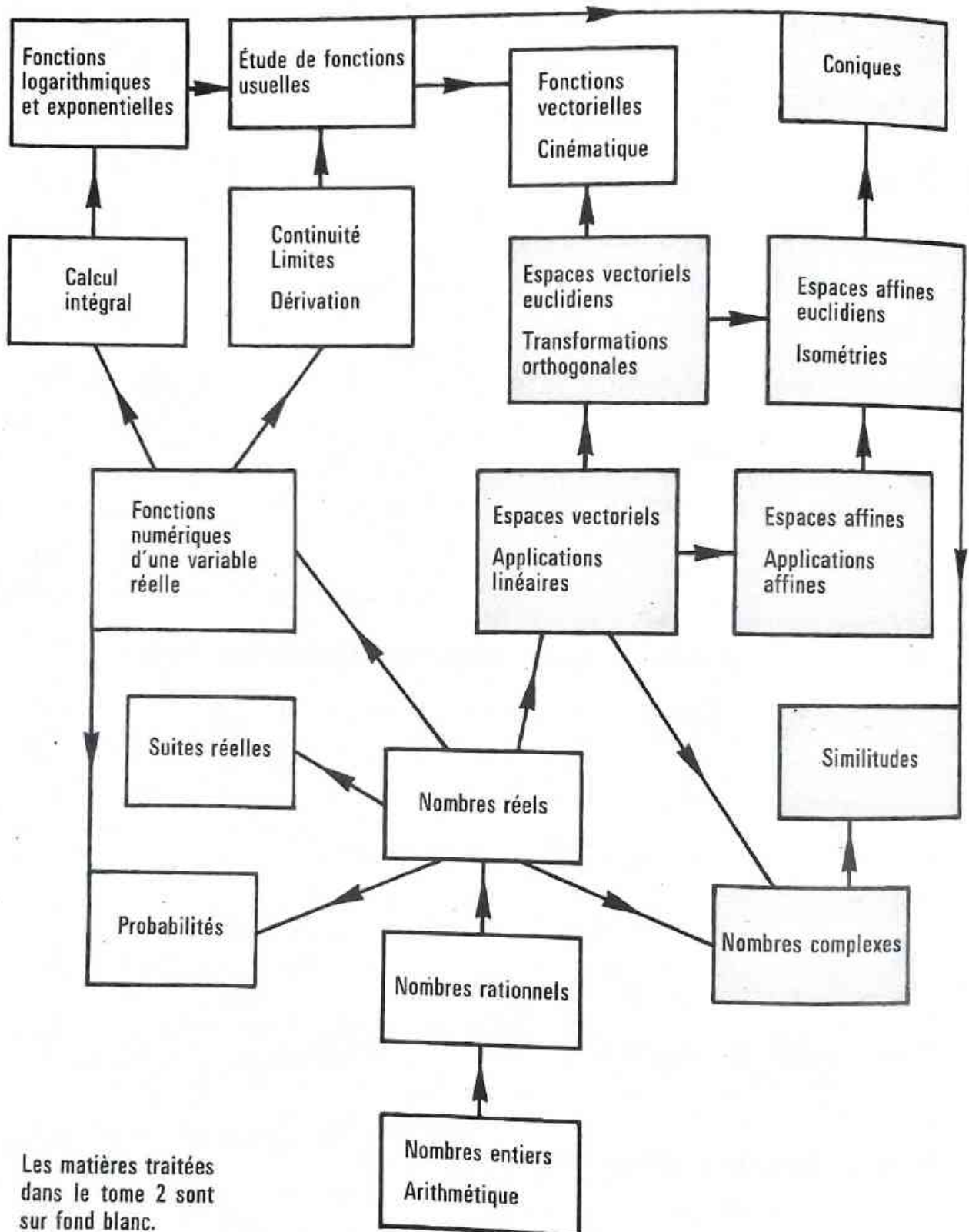
1. Fonctions logarithmiques	331
2. Fonctions exponentielles	343
3. Applications	350

Chapitre 12 : Probabilités sur un ensemble fini

1. Espaces probabilisés finis	371
2. Variables aléatoires réelles	377
3. Couple de variables aléatoires réelles	384
4. Espérance mathématique. Variance. Écart-type	389
5. Loi binomiale	393
6. Loi faible des grands nombres	395

Annexe : Équations différentielles

1. Équations : $y' = ay$	412
2. Équations : $y'' + \omega^2 y = 0$	415



1. Entiers naturels

Numération

$\leq$ (n'est pas toujours l'ordre naturel)
 En effet $\subset$ (inclusion)
 est une relation d'ordre
 * E étant un ensemble
 $\mathcal{P}(E) \ll$ ensemble des parties
 de $E \gg$ muni de $\subset$ est
 un ensemble ordonné

1. Ensembles ordonnés. $\oplus$

Nous supposons connues du lecteur les notions de relation d'ordre dans un ensemble, de relation d'ordre total et de relation d'ordre partiel.

Dans ce paragraphe, nous considérons un ensemble E muni d'une relation d'ordre notée $\leq$.

On dit que $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Soient x et y deux éléments quelconques de E tels que : $x \leq y$; on dit que x est inférieur ou égal à y et que y est supérieur ou égal à x .

Majorants. Minorants.

1.1 DÉFINITIONS : Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A un sous-ensemble de E .

On appelle majorant de A tout élément M de E tel que : $(\forall x \in A, x \leq M)$.

On appelle minorant de A tout élément m de E tel que : $(\forall x \in A, m \leq x)$.

On appelle ensemble majoré (resp. minoré) tout ensemble qui admet au moins un majorant (resp. minorant).

Exemples.

Soient $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $A = \{2, 5, 10\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$.

1. Considérons l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, \leq)$ et cherchons des majorants et des minorants de A .

Il est immédiat que les entiers 10, 11, 12 sont des majorants de A et que les seuls minorants de A sont 1 et 2.

2. La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$, notée $|$, est une relation d'ordre. Considérons l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$ et cherchons des majorants et des minorants de A .

Il est immédiat que les entiers 10, 20, 30 sont des majorants de A et que le seul minorant de A est 1.

Ces exemples nous conduisent aux remarques suivantes.

Remarques : 1. Si M (resp. m) est un majorant (resp. minorant) de A , alors tout élément de E supérieur ou égal à M (resp. inférieur ou égal à m) est aussi un majorant (resp. minorant) de A .

2. Un majorant (resp. minorant) de A peut être un élément de A ou non.

3. L'ensemble des majorants (resp. minorants) de A peut être fini ou non.

Plus grand élément. Plus petit élément.

- 1.2 DÉFINITIONS :** Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E . On appelle plus grand élément de A l'unique élément g de A , s'il existe, tel que : $\forall x \in A, x \leq g$.
On appelle plus petit élément de A l'unique élément p de A , s'il existe, tel que : $\forall x \in A, p \leq x$.

Remarque : L'unicité de g (resp. p) résulte de l'antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$. Supposons, en effet, qu'il existe deux éléments de A , notés g et g' , tels que : $(\forall x \in A, x \leq g)$ et $(\forall x \in A, x \leq g')$.

On a alors : $g' \leq g$ et $g \leq g'$, et par suite : $g = g'$.

Exemples.

1. Soient E un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Nous savons que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.

$\mathcal{P}(E)$ admet un plus petit élément et un plus grand élément qui sont respectivement $\emptyset$ et E .

2. Soit l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$ et A l'ensemble des entiers naturels pairs.

A admet un plus petit élément 0, mais n'admet pas de plus grand élément.

Borne supérieure. Borne inférieure.

- 1.3 DÉFINITIONS :** Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E . On appelle borne supérieure de A , et on note $\sup A$, le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A .
On appelle borne inférieure de A , et on note $\inf A$, le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de A .

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\mathbf{P1} \quad (\alpha = \sup A) \iff \left(\begin{array}{l} \alpha \in E \text{ et } (\forall x \in A, x \leq \alpha) \\ \forall y \in E, ((\forall x \in A, x \leq y) \implies (\alpha \leq y)) \end{array} \right)$$

La première ligne signifie que α est un majorant de A et la seconde que α est le plus petit des majorants de A .

$$\mathbf{P'1} \quad (\beta = \inf A) \iff \left(\begin{array}{l} \beta \in E \text{ et } (\forall x \in A, \beta \leq x) \\ \forall y \in E, ((\forall x \in A, y \leq x) \implies (y \leq \beta)) \end{array} \right)$$

P2 Si A admet un plus grand élément, alors cet élément est la borne supérieure de A .

Démonstration :

Soit g le plus grand élément de A . On a alors : $\forall x \in A, x \leq g$.

Soit y un élément quelconque de E tel que : $\forall x \in A, x \leq y$; puisque g est un élément de A , on a en particulier : $g \leq y$. D'après P_1 on a donc : $g = \sup A$. ■

P'2 Si A admet un plus petit élément, alors cet élément est la borne inférieure de A .

La démonstration est analogue à celle de P_2 .

Remarques : 1. Les éléments $\sup A$ et $\inf A$, s'ils existent, peuvent appartenir ou non à A .

2. Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et x et y deux éléments de E .

Si x et y sont distincts, on note, par abus de notation, respectivement $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ la borne supérieure et la borne inférieure, si elles existent, de l'ensemble $\{x, y\}$. Si x et y sont égaux, on emploie aussi la même notation.

3. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre total. Toute paire de E admet alors une borne supérieure et une borne inférieure.

Exemples.

1. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. Considérons l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. On a : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Soit $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

Le seul majorant de A est $\{a, b\}$; on a donc : $\sup A = \{a, b\}$ et $(\sup A) \notin A$.

Le seul minorant de A est $\emptyset$; on a donc : $\inf A = \emptyset$ et $(\inf A) \in A$.

Soit $B = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Le seul minorant de B est $\emptyset$; on a donc : $\inf B = \emptyset$ et $(\inf B) \in B$.

Les seuls majorants de B sont $\{a\}$ et $\{a, b\}$; on a donc : $\sup B = \{a\}$ et $(\sup B) \in B$.

2. Soient l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$ et B l'ensemble des entiers naturels impairs.

Les seuls minorants de B sont 0 et 1; on a donc : $\inf B = 1$ et $(\inf B) \in B$.

D'autre part B n'admet pas de majorant; il n'admet donc pas de borne supérieure.

Relation d'ordre compatible avec une loi interne.

1.4 DÉFINITION : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $*$ et d'une relation d'ordre notée $\leq$. La relation $\leq$ est compatible avec la loi $*$ si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

- $\forall (x, y, z) \in E^3, ((x \leq y) \implies (x * z \leq y * z))$;
- $\forall (x, y, z) \in E^3, ((x \leq y) \implies (z * x \leq z * y))$.

Exemples.

La relation $\leq$ est compatible avec l'addition dans $\mathbb{N}$.

La relation $\leq$ est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{N}$.

Groupe ordonné.

1.5 DÉFINITION : Soit $(G, *)$ un groupe muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. $(G, *, \leq)$ est un groupe ordonné si et seulement si la relation $\leq$ est compatible avec la loi $*$.

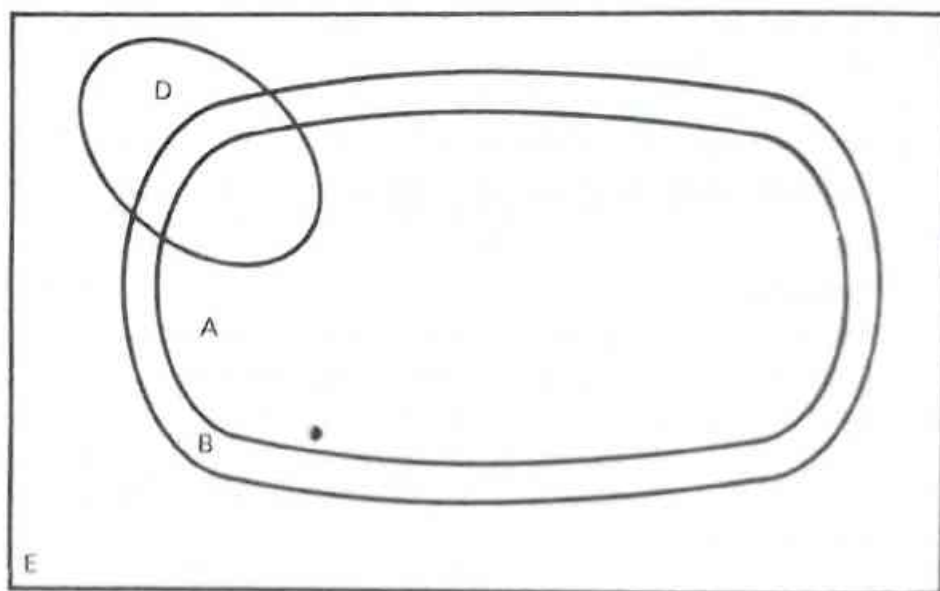
Exemples.

1. $(\mathbb{Z}, +, \leq)$, $(\mathbb{Q}, +, \leq)$, $(\mathbb{R}, +, \leq)$ sont des groupes ordonnés.

2. Soit E un ensemble quelconque.

En classe de Première nous avons vu que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif; d'autre part $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.

L'exemple suivant montre que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \subset)$ n'est pas un groupe ordonné. On a : $A \subset B$ et $A \Delta D \not\subset B \Delta D$.



Anneau ordonné.

1.6 DÉFINITION : Soient $(A, +, \times)$ un anneau muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ et 0 l'élément neutre pour l'addition dans A .

$(A, +, \times, \leq)$ est un anneau ordonné si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(A, +, \leq)$ est un groupe ordonné;
- $\forall (x, y, z) \in A^3, ((x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies (x \times z \leq y \times z))$;
- $\forall (x, y, z) \in A^3, ((x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies (z \times x \leq z \times y))$.

Exemples.

$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$, $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$, $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ sont des anneaux ordonnés.

Rappel : Nous rappelons que, dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, la relation notée $<$, définie par : $\forall (x, y) \in E^2, ((x < y) \iff (x \neq y \text{ et } x \leq y))$ n'est pas une relation d'ordre.

2. Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Conformément au programme, nous ne donnons aucune construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{N}$. Nous nous bornons à énumérer les principales propriétés admises.

2.1 Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$.

P1 $\mathbb{N}$ est muni de deux lois de composition interne notées $+$ et $\times$; ces deux lois sont commutatives, associatives ; chacune admet un élément neutre, noté 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication ; la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$; tout élément de $\mathbb{N}$ est régulier pour la loi $+$ et tout élément de $\mathbb{N}^*$ est régulier pour la loi $\times$.

Ces deux lois ne munissent $\mathbb{N}$ d'aucune des structures algébriques déjà étudiées.

P2 $\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leq$. Cette relation est compatible avec les lois $+$ et $\times$. Elle vérifie de plus les propriétés suivantes :

- $\forall (x, x', y) \in \mathbb{N}^3, \quad ((x + y \leq x' + y) \implies (x \leq x'))$
- $\forall (x, x', y) \in (\mathbb{N}^*)^3, \quad ((xy \leq x'y) \implies (x \leq x'))$.

P3 $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, 0, et n'a pas de plus grand élément.

P4 Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.

P5 Tout élément x de $\mathbb{N}$ a un successeur, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier naturel x' tel que : $x < x'$ et $(\forall y \in \mathbb{N}, ((x < y \leq x') \implies (y = x')))$

On a : $x' = x + 1$; l'élément x' est le plus petit des entiers naturels strictement supérieurs à x ; l'existence de x' résulte de P_3 et de P_4 .

P'5 Tout élément x de $\mathbb{N}^*$ a un prédécesseur, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier x'' tel que x soit le successeur de x'' .

On a : $x = x'' + 1$; l'élément x'' est le plus grand des entiers naturels strictement inférieurs à x ; l'existence de x'' résulte de P_3 et de P_4 .

P6 $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.

Cet énoncé signifie que $\mathbb{N}$ peut être mis en bijection avec une de ses parties propres. Des propriétés P_5 et $P'5$, il résulte que l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{N}, \varphi(x) = x + 1$ est une bijection.

Raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé utile pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel ou pour tout entier naturel supérieur ou égal à un entier naturel donné.

Désignons par la notation $\mathcal{P}(n)$ (resp. non $\mathcal{P}(n)$) la proposition suivante : la propriété $\mathcal{P}$ est vraie (resp. fausse) pour l'entier naturel n .

2.2 THÉORÈME : Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ telle que la proposition suivante soit vraie : $\mathcal{P}(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.

Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Démonstration :

Soit B l'ensemble des entiers naturels pour lesquels la propriété $\mathcal{P}$ est fausse : $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{non } \mathcal{P}(n)\}$. *montrons que $B = \emptyset$ par l'absurde*

Supposons que B ne soit pas vide.

D'après P_4 , l'ensemble B a un plus petit élément p ; on a donc : non $\mathcal{P}(p)$.

Puisque l'on a $\mathcal{P}(0)$, l'entier p n'est pas nul; il a donc un prédécesseur q ; on a : $q+1 = p$.

Puisque p est le plus petit élément de B , l'entier q n'appartient pas à l'ensemble B ; on a donc $\mathcal{P}(q)$.

D'après l'hypothèse, on a alors $\mathcal{P}(q+1)$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(p)$, ce qui est en contradiction avec $(p \in B)$, c'est-à-dire avec $(\text{non } \mathcal{P}(p))$.

L'ensemble B est donc vide et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n))$. ■

2.3 VARIANTE : Soient n_0 un entier naturel non nul et $\mathcal{P}$ une propriété définie sur l'ensemble X des entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 , tels que la proposition suivante soit vraie : $\mathcal{P}(n_0)$ et $(\forall n \in X, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$. On a alors : $\forall n \in X, \mathcal{P}(n)$.

Démonstration :

Soit B l'ensemble des éléments de X pour lesquels la propriété $\mathcal{P}$ est fausse :

$B = \{n \in X \mid \text{non } \mathcal{P}(n)\}$.

Supposons que B ne soit pas vide.

D'après P_4 , l'ensemble B a un plus petit élément p ; on a donc : $(\text{non } \mathcal{P}(p))$.

Puisque l'on a $\mathcal{P}(n_0)$, l'entier p est supérieur à n_0 , et par suite, admet un prédécesseur q qui est supérieur ou égal à n_0 et qui appartient donc à X .

Puisque p est le plus petit élément de B , l'entier q n'appartient pas à l'ensemble B ; on a donc $\mathcal{P}(q)$.

D'après l'hypothèse, on a alors $\mathcal{P}(q+1)$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(p)$, ce qui est en contradiction avec $(p \in B)$, c'est-à-dire avec $(\text{non } \mathcal{P}(p))$.

L'ensemble B est donc vide, et l'on a : $(\forall n \in X, \mathcal{P}(n))$. ■

2.4 COROLLAIRE : Soient n_0 un entier naturel, X l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

Si n est un élément quelconque de X , soit I_n l'ensemble des entiers naturels p tels que : $n_0 \leq p \leq n$.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur X telle que la proposition suivante soit vraie :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \forall n \in X, \left(\left(\forall p \in I_n, \mathcal{P}(p) \right) \implies \mathcal{P}(n+1) \right).$$

Alors on a : $\forall n \in X, \mathcal{P}(n)$.

Démonstration :

Soit Q la propriété définie sur X par :

$$\forall n \in X, (Q(n) \iff (\forall p \in I_n, \mathcal{P}(p))).$$

Démontrons que l'on peut appliquer à la propriété Q le théorème 2.2 si n_0 est nul, ou la variante 2.3, si n_0 n'est pas nul.

• On a : $I_{n_0} = \{n_0\}$ et par suite $Q(n_0)$.

• Soit n un élément quelconque de X . Supposons que l'on ait $Q(n)$.

On a donc : $(\forall p \in I_n, \mathcal{P}(p))$, et par suite : $\mathcal{P}(n+1)$.

Il en résulte : $(\forall p \in I_{n+1}, \mathcal{P}(p))$, c'est-à-dire : $Q(n+1)$.

Dans tous les cas on a donc : $(\forall n \in X, Q(n))$, ce qui équivaut à :

$(\forall n \in X, \mathcal{P}(n))$. ■

Exemples.

1. Démontrons, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , l'entier $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

Appelons $\mathcal{P}$ la propriété ainsi définie.

• On a : $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 11$. On a donc : $\mathcal{P}(0)$.

• Soit n un entier naturel quelconque tel que l'on ait $\mathcal{P}(n)$. Considérons l'entier $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 10(10^n - (-1)^n) + 10(-1)^n - (-1)^{n+1} \\ &= 10(10^n - (-1)^n) + (-1)^n(10 - (-1)) \\ &= 10(10^n - (-1)^n) + 11(-1)^n. \end{aligned}$$

Puisque $(10^n - (-1)^n)$ est un multiple de 11, il en est de même de la somme $10(10^n - (-1)^n) + 11(-1)^n$, c'est-à-dire $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.

• D'après le théorème 2.2, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

2. Démontrons par récurrence, que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $n^2 > 2n + 1$.

Désignons par $\mathcal{P}$ la propriété ainsi définie et par X l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 3.

• On a : $3^2 = 9$ et : $2 \times 3 + 1 = 7$.

On a donc : $\mathcal{P}(3)$.

• Soit n un entier naturel quelconque tel que l'on ait $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n + 1) + 2n + 1 = 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1.$$

On a donc : $\forall n \in X, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.

• D'après la variante 2.3, on a donc : $\forall n \in X, \mathcal{P}(n)$.

3. Soit A la matrice carrée réelle d'ordre deux égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit n un entier naturel quelconque non nul; calculons A^n .

Dans ce genre d'exercice, on calcule A^n pour les premières valeurs de n , de façon à avoir une idée du résultat. Il est indispensable de faire ensuite une démonstration par récurrence.

Calculons donc A^2 et A^3 . On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est naturel de chercher à démontrer l'égalité : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- On a bien : $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Soit n un entier naturel quelconque non nul tel que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons A^{n+1} .

On a : $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\left(A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \implies \left(A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)$.

- D'après la variante 2.3, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques : 1. L'exemple suivant montre qu'il est nécessaire que soit vérifiée l'une des hypothèses $\mathcal{P}(0)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$.

Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie sur $\mathbb{N}^*$ par : la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour l'entier non nul n si et seulement si $5^n + 1$ est un multiple de 4.

- $5^1 + 1 = 6$ n'est pas multiple de 4; la propriété $\mathcal{P}$ n'est donc pas vraie pour l'entier 1.

- Démontrons que la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ est pourtant vraie.

Soit donc n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $\mathcal{P}(n)$.

On a : $5^{n+1} + 1 = 5(5^n + 1) - 5 + 1 = 5(5^n + 1) - 4$.

Puisque $5^n + 1$ est un multiple de 4, il en est de même de $5^{n+1} + 1$.

2. Nous étudions dans le paragraphe suivant un exemple d'application du corollaire 2.4.

Suites. Notation indicielle.

2.5 DÉFINITION : Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et X un ensemble quelconque.

On appelle suite définie sur I , à valeurs dans X , toute application de I dans X .

L'image par une suite d'un entier n quelconque de I est notée u_n ; cette notation est appelée notation indicielle.

Par abus de notation, on désigne la suite par le symbole $(u_n)_{n \in I}$.

Si l'ensemble I est fini, la suite est dite suite finie.

Si l'ensemble X est égal à $\mathbb{R}$, la suite est dite suite réelle.

Dans le cas d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on utilise la notation :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

Dans le cas d'une suite réelle finie $(u_n)_{n \in I}$, la somme de tous les termes u_n de la suite

est notée par $\sum_{n \in I} u_n$ et leur produit par $\prod_{n \in I} u_n$.

Exemples.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1)$, est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.

2. Une suite peut être définie par une relation de récurrence; la suite est alors dite **suite récurrente**.

On donne par exemple soit le premier terme et une relation liant deux termes consécutifs, soit les deux premiers termes et une relation liant trois termes consécutifs.

a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 1)$$

est une suite réelle.

On a :

$$u_1 = 4u_0 - 1 = 4 \times 2 - 1 = 7,$$

$$u_2 = 4u_1 - 1 = 4 \times 7 - 1 = 27, \text{ etc.}$$

b) De même la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = \cos 3 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_1u_n - u_{n-1})$$

est une suite réelle.

On a :

$$u_2 = 2(\cos 3)(\cos 3) - 1 = 2\cos^2 3 - 1 = \cos(2 \times 3)$$

$$u_3 = 2(\cos 3)\cos(2 \times 3) - \cos 3 = \cos(3 \times 3) + \cos 3 - \cos 3 = \cos(3 \times 3).$$

3. Soient a et b deux réels quelconques; nous rappelons la **formule du binôme** :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p} \quad \text{avec} \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Exercice.

Reprenons l'exemple 2.b, et démontrons par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos 3n.$$

• On a bien : $\cos(3 \times 0) = \cos 0 = 1 = u_0$.

• Soit n un entier naturel quelconque non nul et soit I_n l'ensemble des entiers naturels p tels que : $0 \leq p \leq n$.

Supposons que l'on ait : $\forall p \in I_n, u_p = \cos 3p$.

D'après la relation de récurrence, on a alors :

$$u_{n+1} = 2(\cos 3)u_n - u_{n-1} = 2(\cos 3)(\cos 3n) - \cos 3(n-1).$$

$$= \cos(3 + 3n) + \cos(3n - 3) - \cos 3(n-1) = \cos 3(n+1).$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, ((\forall p \in I_n, (u_p = \cos 3p)) \implies (u_{n+1} = \cos 3(n+1)))$.

• D'après le corollaire 2.4, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos 3n$.

3. Numération.

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

3.1 THÉORÈME : Soient a un entier naturel quelconque et b un entier naturel quelconque non nul.

Il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que l'on ait :
 $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Trouver (q, r) connaissant (a, b) , c'est faire la division euclidienne de a par b .
 Les entiers q et r sont appelés respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Démonstration :

• On a : $(a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b) \iff (r = a - bq \text{ et } bq \leq a < b(q+1))$.
 Il suffit donc de trouver q pour déterminer le couple (q, r) .

La proposition : $(bq \leq a < b(q+1))$ équivaut à dire que l'entier $q+1$, s'il existe, est le plus petit des entiers naturels n tels que l'on ait : $a < nb$.

Ceci nous conduit à étudier l'ensemble E de tels entiers :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid a < nb\}.$$

• On a : $a \geq 0$ et $0b = 0$; on ne peut donc avoir : $a < 0b$.

L'entier 0 n'est donc pas un élément de E .

• On a :

$$(0 < b) \implies (1 \leq b) \implies (a \leq ab)$$

$$\implies (a < a + b \leq ab + b)$$

$$\implies (a < (a+1)b).$$

L'entier $(a+1)$ est donc un élément de E et par suite E n'est pas vide.

• D'après la propriété P_4 du paragraphe 2.1, l'ensemble E a un plus petit élément p ; cet entier p est non nul, et il admet donc un prédécesseur q .

On a alors : $bq \leq a < b(q+1)$. ■

Remarques : 1. Dire que pour tout couple (a, b) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'ensemble E n'est pas vide, équivaut à la proposition suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}^*, a < kb.$$

Cette proposition est connue sous le nom de **lemme d'Archimède**.

2. Si l'entier a est supérieur ou égal à b , on a alors : $q \geq 1$.

→ Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $\exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} / a = bq + r \text{ et } 0 \leq |r| < b$

Exemples.

0 et 7 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 7 par 10.

3 et 0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 21 par 7.

3 et 2 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 17 par 5.

Systemes de numération.

Un système de numération est une manière de représenter tout entier naturel.

Une méthode consiste à choisir un entier naturel a supérieur à 1, à définir a symboles et à écrire tout entier naturel à l'aide de ces a symboles.

On dit que l'on a alors défini un système de numération de base a ; les symboles utilisés sont appelés les chiffres de ce système.

Le système de numération utilisé dans le langage courant est le système de numération de base dix, appelé système de numération décimale; ce système utilise comme symboles les chiffres suivants, appelés chiffres arabes :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dans le système décimal l'entier dix s'écrit 10 et l'entier x qui s'écrit 357, est égal à : $3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$.

L'expression $3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$ est appelée développement de l'entier x suivant les puissances de dix.

Nous allons généraliser ces résultats dans le paragraphe suivant.

Développement d'un entier naturel suivant les puissances de a .

3.2 THÉORÈME : Soient a un entier naturel supérieur à 1 et x un entier naturel quelconque non nul.

Il existe un unique entier naturel n tel que l'on ait : $a^n \leq x < a^{n+1}$.

Démonstration :

Soit E l'ensemble des entiers naturels p tels que l'on ait : $x < a^p$.

Unicité.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que l'on ait : $a^n \leq x < a^{n+1}$.

L'entier $n + 1$ appartient donc à E ; démontrons que $n + 1$ est nécessairement le plus petit élément de E , s'il existe.

Supposons que le plus petit élément de E , s'il existe, soit un entier q distinct de $n + 1$ et, par suite, inférieur à $n + 1$.

On a alors : $(q < n + 1) \iff (q \leq n) \implies (a^q \leq a^n)$.

Or, par définition de n , on a : $(a^n \leq x)$ et par définition de q : $(a^q > x)$.

Il y a donc contradiction.

L'entier $n + 1$, s'il existe, est unique et il en est de même de l'entier n .

Existence.

Il suffit de démontrer que l'ensemble E admet un plus petit élément non nul.

Dire que a est supérieur à 1 équivaut à dire que a est supérieur ou égal à 2. Il existe donc un entier b supérieur ou égal à 1 tel que l'on ait : $a = 1 + b$.

On a alors, d'après la formule du binôme : $a^x = (1 + b)^x = 1^x + x 1^{x-1} b + \dots + b^x$.

Chacun des termes de cette somme est strictement positif; on a donc :

$a^x > x b \geq x \times 1$, et par suite : $a^x > x$.

L'entier x appartient à E , qui n'est donc pas vide.

D'autre part 0 n'appartient pas à E . Car si on avait $x < a^0 = 1$ et $x < 1$.

L'ensemble E admet donc un plus petit élément qui n'est pas nul. ■

Remarque : Soient n un entier naturel quelconque et A_n l'ensemble des entiers naturels non nuls x tels que l'on ait : $a^n \leq x < a^{n+1}$.

Le théorème 3.2 équivaut à dire que la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$.

$$\text{AS } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}^* \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^* / i \neq j$$

3.3 THÉORÈME : Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1. Pour tout entier naturel non nul x , il existe un unique entier naturel n et des uniques entiers naturels $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} x = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0 \\ 0 < x_n < a \\ \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, 0 \leq x_i < a. \end{cases}$$

L'expression $x_n a^n + \dots + x_1 a + x_0$ est appelée **développement de l'entier x suivant les puissances de a** .

Démonstration :

Nous allons faire cette démonstration en deux étapes.

• Soit p un entier naturel quelconque.

Appelons E_p l'ensemble $\{0, \dots, (a-1)\}^p \times \{1, \dots, (a-1)\}$. Tout élément de E_p est donc un $(p+1)$ -uplet $(x_0, \dots, x_p)$ tel que :

$(\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, 0 \leq x_i < a)$ et $(1 \leq x_p < a)$.

Soit φ_p l'application de E_p dans $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_p : E_p &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (x_0, \dots, x_p) &\longmapsto \sum_{i=0}^p x_i a^i \end{aligned}$$

Étudions l'application φ_p .

$\varphi_p(E_p) \subset A_p$.

A_p est l'ensemble défini dans la remarque du paragraphe 3.2.

Par définition de E_p on a :

$$\sum_{i=0}^p x_i a^i \leq \sum_{i=0}^p (a-1) a^i = \sum_{i=0}^p (a^{i+1} - a^i) = a^{p+1} - 1 < a^{p+1}.$$

D'autre part, on a aussi :

$$\sum_{i=0}^p x_i a^i \geq x_p a^p \geq a^p.$$

On a donc bien pour tout élément $(x_0, \dots, x_p)$ de E_p :

$a^p \leq \varphi_p(x_0, \dots, x_p) < a^{p+1}$, ce qui équivaut à : $\varphi_p(x_0, \dots, x_p) \in A_p$.

φ_p est injective.

Soient $(x_0, \dots, x_p)$ et $(x'_0, \dots, x'_p)$ deux éléments de E_p qui ont la même image par φ_p .

Dire que φ_p est injective équivaut à la proposition suivante :

$\forall (x_0, \dots, x_p) \in E_p, \quad \forall (x'_0, \dots, x'_p) \in E_p,$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^p x_i a^i = \sum_{i=0}^p x'_i a^i \right) \implies (\forall i \in \{0, \dots, p\}, x_i = x'_i) \right).$$

Soit F_p l'ensemble $\{0, \dots, a-1\}^{p+1}$. On a : $E_p \subset F_p$.

Pour démontrer la proposition précédente, il suffit de démontrer la proposition $\mathcal{P}$ suivante :

$$\forall (x_0, \dots, x_p) \in F_p, \quad \forall (x'_0, \dots, x'_p) \in F_p,$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^p x_i a^i = \sum_{i=0}^p x'_i a^i \right) \implies (\forall i \in \{0, 1, \dots, p\}, x_i = x'_i) \right).$$

$$\text{On a : } \forall (x_0, x'_0) \in F_0 \times F_0, \quad (x_0 a^0 = x'_0 a^0) \iff (x_0 = x'_0).$$

On a donc $\mathcal{P}(0)$.

Supposons que l'on ait $\mathcal{P}(p)$.

Soient $(x_0, \dots, x_p, x_{p+1})$ et $(x'_0, \dots, x'_p, x'_{p+1})$ deux éléments quelconques de

$$F_{p+1} \text{ satisfaisant à : } \sum_{i=0}^{p+1} x_i a^i = \sum_{i=0}^{p+1} x'_i a^i.$$

Appelons x l'entier ainsi défini. On a :

$$x = \sum_{i=0}^p x_i a^i + x_{p+1} a^{p+1} = \sum_{i=0}^p x'_i a^i + x'_{p+1} a^{p+1}.$$

Par définition de F_p , on a comme précédemment :

$$0 \leq \sum_{i=0}^p x_i a^i < a^{p+1} \quad \text{et} \quad 0 \leq \sum_{i=0}^p x'_i a^i < a^{p+1}.$$

Les entiers x_{p+1} (resp. x'_{p+1}) et $\sum_{i=0}^p x_i a^i$ (resp. $\sum_{i=0}^p x'_i a^i$) sont donc respectivement

le quotient et le reste de la division euclidienne de x par a^{p+1} . On a donc :

$$(x_{p+1} = x'_{p+1}) \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=0}^p x_i a^i = \sum_{i=0}^p x'_i a^i \right)$$

et par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall i \in \{0, \dots, p+1\}, \quad x_i = x'_i.$$

On a donc : $\mathcal{P}(p+1)$.

La proposition $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout entier naturel p .

$$\varphi_p(E_p) = A_p.$$

L'ensemble E_p est un ensemble fini et l'application φ_p est injective. On a donc :

$$\text{card } E_p = \text{card } \varphi_p(E_p).$$

Cherchons le nombre d'éléments de $E_p = \{0, \dots, (a-1)\}^p \times \{1, \dots, a-1\}$.

$$\text{On a : } \text{card } \{0, \dots, (a-1)\}^p = a^p \text{ et } \text{card } \{1, \dots, a-1\} = a-1.$$

$$\text{On a donc : } \text{card } E_p = a^p(a-1) \text{ et par suite : } \text{card } \varphi_p(E_p) = a^p(a-1).$$

Nous savons que $\varphi_p(E_p)$ est inclus dans l'ensemble fini A_p .

Cherchons donc le nombre d'éléments de A_p .

Par définition de A_p on a :

$$A_p = \{a^p, a^p + 1, \dots, a^{p+1} - 1\}.$$

$$\text{On a donc : } \text{card } A_p = a^{p+1} - 1 - (a^p - 1) = a^p(a-1).$$

Des propositions : $\varphi_p(E_p) \subset A_p$ et $(\text{card } \varphi_p(E_p) = \text{card } A_p)$, il résulte que

$$\text{l'on a : } \varphi_p(E_p) = A_p.$$

Tout élément de A_p est donc l'image par φ_p d'un élément unique de E_p .

• Soit maintenant x un entier naturel quelconque non nul. D'après les résultats du paragraphe 3.2, il existe un unique entier naturel n tel que x appartienne à A_n . D'après la première partie de la démonstration, x est donc l'image par φ_n d'un unique

élément $(x_0, \dots, x_n)$ de E_n . On a donc bien : $x = \sum_{i=0}^n x_i a^i$. ■

Remarque : Le théorème 3.3 affirme l'existence et l'unicité du développement d'un entier naturel non nul suivant les puissances de a , mais la démonstration donnée ne fournit pas de méthode pour la recherche pratique de ce développement. Dans les exemples qui suivent, nous indiquons une méthode pour cette recherche.

Exemples.

1. Cherchons le développement de l'entier naturel 3 suivant les puissances de sept. On a : $7^0 < 3 < 7^1$; le développement cherché est donc : 3.

2. Soit n un entier naturel quelconque non nul. Cherchons le développement de l'entier naturel a^n suivant les puissances de a .

On a : $a^n \leq a^n < a^{n+1}$, et par suite : $a^n = 1 \times a^n + 0 \times a^{n-1} + \dots + 0 \times a + 0$.

3. Cherchons le développement suivant les puissances de cinq de l'entier naturel dont l'écriture dans le système décimal est 53.

On a : $5^2 < 53 < 5^3$. Le développement cherché est donc de la forme :

$$x_2 \times 5^2 + x_1 \times 5 + x_0. \quad 53 = 5(x_2 \times 5 + x_1) + x_0$$

L'entier x_0 apparaît donc comme le reste de la division euclidienne de 53 par 5.

On a : $53 = 5 \times 10 + 3$ et par suite : $x_0 = 3$.

On a alors : $53 - 3 = 5(x_2 \times 5 + x_1)$, c'est-à-dire : $10 = 5x_2 + x_1$.

L'entier x_1 apparaît donc comme le reste de la division euclidienne de 10 par 5. On a :

$$10 = 5 \times 2 + 0 \text{ et par suite : } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 2.$$

On a donc finalement : $53 = 2 \times 5^2 + 0 \times 5 + 3$.

Cette méthode est celle qui est le plus couramment employée.

4. Cherchons le développement suivant les puissances de douze de l'entier naturel dont l'écriture dans le système décimal est 4 606.

$$\text{On a : } 4\,606 = 12 \times 383 + 10$$

$$383 = 12 \times 31 + 11$$

$$31 = 12 \times 2 + 7$$

$$\text{On a donc : } 4\,606 = 2 \times 12^3 + 7 \times 12^2 + 11 \times 12 + 10.$$

Système de numération de base a .

3.4 Soit a un entier naturel strictement supérieur à 1.

Le développement suivant les puissances de a de tout entier naturel x tel que : $0 \leq x < a$ est égal à x .

Si l'on prend comme **chiffres les a entiers naturels** : $0, 1, \dots, a - 1$, tout entier naturel x inférieur à a s'exprime à l'aide d'un chiffre.

Plus généralement, soit x un entier naturel dont le développement suivant les puissances de a est $x_n a^n + \dots + x_1 a + x_0$. Chacun des entiers $x_n, \dots, x_1, x_0$ est un chiffre et x est déterminé par la donnée de ces $n + 1$ chiffres. On écrira x sous la forme : $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0^a$. Cette expression est appelée **écriture de x dans le système de numération de base a** .

Nous avons déjà parlé du système de base dix, ou **système décimal**. Un autre système très employé est le système de base deux, appelé **système binaire**.

Si la base a est inférieure ou égale à dix, on utilise comme chiffres les chiffres arabes correspondant aux entiers inférieurs à a . L'ensemble des chiffres du système binaire est $\{0, 1\}$.

Si la base a est supérieure à dix, il faut introduire d'autres symboles. On utilise en général l'alphabet grec. Par exemple l'ensemble des chiffres du système de base douze est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$.

Exemples.

Reprenons les exemples du paragraphe 3.3.

$$1. 3 = \overline{3}^{\text{sept}}$$

$$2. a^n = \underbrace{\overline{10 \dots 0}}_{n \text{ zéros}}^a; \quad \text{en particulier: } a = \overline{10}^a.$$

$$3. 53 = \overline{203}^{\text{cinq}}.$$

$$4. 4\,606 = \overline{27\beta\alpha}^{\text{douze}}.$$

Comparaison de deux entiers écrits dans le même système de numération.

3.5 Dire qu'un entier x s'écrit à l'aide de n chiffres dans le système de numération de base a équivaut à dire que cet entier satisfait aux inégalités : $a^n \leq x < a^{n+1}$. Pour comparer deux entiers écrits en base a , on compare donc d'abord le nombre de leurs chiffres.

Si ces deux entiers ont un nombre différent de chiffres, celui qui a le plus grand nombre de chiffres est le plus grand.

Si ces deux entiers ont le même nombre de chiffres, on compare alors les chiffres correspondant à la plus grande puissance de a , et ainsi de suite.

Exemples.

$$1. \text{ Comparons } \overline{10010}^{\text{deux}} \text{ et } \overline{111}^{\text{deux}}; \quad \text{on a : } \overline{111}^{\text{deux}} \leq \overline{10010}^{\text{deux}}.$$

$$2. \text{ Comparons } \overline{4530}^{\text{sept}} \text{ et } \overline{4521}^{\text{sept}}; \quad \text{on a : } \overline{4521}^{\text{sept}} \leq \overline{4530}^{\text{sept}}.$$

Addition et multiplication d'entiers écrits dans le même système de numération.

3.6 Pour additionner ou multiplier deux entiers écrits en numération décimale, il suffit de connaître la somme ou le produit de deux chiffres quelconques. Il est d'usage d'écrire tous ces résultats dans des tables appelées traditionnellement **tables d'addition** et **tables de multiplication**.

On utilise la même méthode pour additionner ou pour multiplier deux entiers écrits dans un système de numération de base quelconque.

Voici à titre d'exemple les tables d'addition et de multiplication en base deux et en base quatre.

en base deux :

+	0	1
0	0	1
1	1	$\overline{10}$

×	0	1
0	0	0
1	0	1

en base quatre :

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	$\overline{10}$
2	2	3	$\overline{10}$	$\overline{11}$
3	3	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	$\overline{10}$	$\overline{12}$
3	0	3	$\overline{12}$	$\overline{21}$

Exemples.

1. Calculons la somme : $\overline{1011}$ deux + $\overline{111}$ deux.

$$\begin{array}{r} \text{On écrit : } \begin{array}{r} \overline{11} \\ 011 \\ \hline 111 \\ 10\ 010 \end{array} \end{array}$$

On a donc : $\overline{1011}$ deux + $\overline{111}$ deux = $\overline{10010}$ deux

2. Calculons le produit : $\overline{231}$ quatre × $\overline{32}$ quatre.

$$\begin{array}{r} \text{On écrit : } \begin{array}{r} 231 \\ \times 32 \\ \hline 1\ 122 \\ 20\ 13 \\ \hline 21\ 312 \end{array} \end{array}$$

On a donc : $\overline{231}$ quatre × $\overline{32}$ quatre = $\overline{21312}$ quatre.

△ pour dresser les tables de (+ & ×) on convertit d'abord dans le système décimal, ensuite on effectue l'opération dans le système, puis on convertit le résultat.

EXERCICES

Ensembles ordonnés.

1 Soit $(\mathcal{V}_2, +)$ le groupe additif des vecteurs du plan. On définit une relation binaire, notée $\leq$, dans l'ensemble $\mathcal{V}_2$ par :

$$\forall (\vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2, ((\vec{v} \leq \vec{w}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{N}^*, \vec{w} = \lambda \vec{v})).$$

1° Montrer que cette relation est une relation d'ordre.

2° Le groupe $(\mathcal{V}_2, +)$ est-il ordonné par cette relation d'ordre?

2 Soit $(\mathcal{V}_2, +)$ le groupe additif des vecteurs du plan et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}_2$. On définit une relation binaire, notée $\leq$, dans l'ensemble $\mathcal{V}_2$ par :

$$\forall (\vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2, ((\vec{v} \leq \vec{w}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{N}, \vec{w} - \vec{v} = \lambda \vec{u})).$$

1° Montrer que cette relation est une relation d'ordre.

2° Le groupe $(\mathcal{V}_2, +)$ est-il ordonné par cette relation d'ordre?

3° Montrer qu'un sous-ensemble à deux éléments de $\mathcal{V}_2$ n'admet, en général, ni majorant, ni minorant.

4° Déterminer tous les sous-ensembles totalement ordonnés de $\mathcal{V}_2$.

5° Reprendre le problème en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}_+$ dans la définition de la relation $\leq$.

3 On considère dans ce problème un anneau unitaire $(A, +, \cdot)$ qui satisfait à la propriété suivante : $\forall x \in A, x^2 = x$ (1)

On notera 0 l'élément neutre de l'addition de A et 1 l'élément neutre de la multiplication de A.

1° Démontrer que l'on a : $\forall x \in A, x + x = 0$.

(On considérera $(x + x)^2$).

2° Montrer que A est un anneau commutatif.

3° On définit une relation binaire, notée $\leq$, dans l'ensemble A par :

$$\forall (x, y) \in A^2, ((x \leq y) \iff (xy = x)).$$

Montrer que cette relation est une relation d'ordre sur A.

Que peut-on dire des éléments 0 et 1 ?

4° Soient x et y deux éléments quelconques de A. Montrer que l'élément xy est la borne inférieure de l'ensemble $\{x, y\}$.

5° Démontrer : $\forall (x, y) \in A^2, \sup(x, y) = x + y + xy$.

En déduire que l'on a : $\forall (x, y) \in A^2, \sup(x, y) + \inf(x, y) = x + y$.

6° La relation d'ordre $\leq$ est-elle compatible avec la multiplication de A? est-elle compatible avec l'addition de A?

7° Soit E un ensemble non vide; on définit, sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, les lois de composition suivantes :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), A \cdot B = A \cap B.$$

Montrer que $(\mathcal{P}(E), +, \cdot)$ est un anneau unitaire qui possède la propriété (1).

Interpréter la relation d'ordre $\leq$ dans $\mathcal{P}(E)$.

4 Soit $(G, \cdot)$ un groupe; on note 1 l'élément neutre de G et g^{-1} l'inverse d'un élément quelconque g de G .

On considère un sous-ensemble P de G qui satisfait aux conditions suivantes :

- (1) $1 \in P$.
- (2) $\forall g \in P, ((g \in P \text{ et } g^{-1} \in P) \implies (g = 1))$.
- (3) $\forall (g, h) \in G^2, ((g \in P \text{ et } h \in P) \implies (gh \in P))$.

1° Montrer que la relation binaire, notée $\leq$, définie dans G par :

$\forall (g, h) \in G^2, ((g \leq h) \iff (g^{-1}h \in P))$ est une relation d'ordre.

2° Cette relation d'ordre est-elle compatible avec la loi de G ? Que peut-on dire si G est commutatif?

3° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la relation $\leq$ soit compatible avec la loi de G est :

(4) $\forall (g, h) \in G^2, ((g \in P) \implies (hgh^{-1} \in P))$.

4° Réciproquement, soit $\leq$ une relation d'ordre telle que $(G, \cdot, \leq)$ soit un groupe ordonné.

Montrer que le sous-ensemble Q de G défini par : $Q = \{g \in G \mid 1 \leq g\}$ satisfait aux conditions (1), (2), (3), (4).

5 Soit $(G, +, \leq)$ un groupe abélien ordonné.

On note $-a$ le symétrique d'un élément quelconque a de G ; la relation d'ordre n'est pas nécessairement une relation d'ordre total.

1° Démontrer que l'on a :

$\forall (a, b) \in G^2, ((a \leq b) \iff (-b \leq -a))$.

2° Soit M une partie non vide de G . On désigne par $(-M)$ l'ensemble défini par :

$\forall a \in G, ((a \in (-M)) \iff (-a \in M))$.

Montrer que M est majorée (resp. admet une borne supérieure) si et seulement si $(-M)$ est minorée (resp. admet une borne inférieure).

3° Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall (a, b) \in G^2, \exists c \in G, c = \sup(a, b)$

(2) $\forall (a, b) \in G^2, \exists d \in G, d = \inf(a, b)$.

On supposera désormais que l'une de ces conditions est réalisée.

* 4° Établir la propriété :

$\forall (a, b) \in G^2, a + b - \inf(a, b) \geq \sup(a, b)$.

* 5° En déduire que l'on a :

$\forall (a, b) \in G^2, \sup(a, b) + \inf(a, b) = a + b$.

6 On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une loi de composition interne notée $+$ par :

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{Z}^2, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

et une relation binaire notée $\leq$ par :

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{Z}^2, ((a, b) \leq (c, d)) \iff (a \leq c \text{ et } b \leq d)$.

1° Montrer brièvement que $(\mathbb{Z}^2, +, \leq)$ est un groupe ordonné. Ce groupe est-il totalement ordonné?

2° Soient (a, b) et (c, d) deux éléments quelconques de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Déterminer $\sup\{(a, b), (c, d)\}$ et $\inf\{(a, b), (c, d)\}$.

Vérifier que l'on a :

$\sup\{(a, b), (c, d)\} + \inf\{(a, b), (c, d)\} = (a, b) + (c, d)$

(cf. ex. n° 5, 5° question).

3° Généraliser cet exercice au produit $G \times H$ de deux groupes totalement ordonnés G et H .

Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

- 7 Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls tels que l'on ait : $ab < c$. Montrer que l'on a : $a + b \leq c$.
(Concours scolaire suédois 1965.)
- 8 On définit dans l'ensemble $\mathbb{N}$ une loi de composition interne, notée $\star$, par :
 $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \star b = a + b + ab$.
1° Montrer que cette loi est associative et commutative. Admet-elle un élément neutre ?
2° On définit $a^{(n)}$ par : $a^{(1)} = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad a^{(n)} = a^{(n-1)} \star a$.
Exprimer $a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ en fonction de a .
Établir l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de n et de a .
- 9 Développer par la formule du binôme de Newton les expressions suivantes :
 $(x+1)^{2n} \quad (x-1)^{2n} \quad (x^2-1)^{2n}$.
En déduire que la somme : $1 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - \dots + (-1)^{2n} (C_{2n}^{2n})^2$ est égale à $(-1)^n C_{2n}^n$.
- 10 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , l'entier rationnel $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
- 11 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , l'entier naturel $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- 12 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier naturel $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.
- 13 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier naturel $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.
- ◆ Soit n un entier naturel quelconque. Dans les exercices suivants (nos 14 à 18), démontrer par récurrence les égalités indiquées :
- 14 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 15 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 16 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \dots + n)^2$.
- 17 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.
- 18 $1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \dots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1$.

Numération.

- 19 Écrire dans la base dix le nombre qui s'écrit $\alpha\alpha\alpha$ en base onze.
- 20 Dresser les tables d'addition et de multiplication correspondant à la base sept. Effectuer en base sept les opérations :
 $\overline{241} \times \overline{63}, \quad \overline{1234} + \overline{503} + \overline{126}$.
Écrire en base dix les résultats obtenus.

21 / Même exercice que le n° 20 pour la base onze.

22 / Effectuer le produit : $\overline{129}^{\text{onze}} \times \overline{\alpha\alpha 0}^{\text{onze}}$

23 / Effectuer le produit $\overline{\alpha 1 \beta}^{\text{douze}} \times \overline{90\alpha}^{\text{douze}}$.

24 / Dans quelle base a a-t-on l'égalité : $\overline{32}^a \times \overline{14}^a = \overline{1103}^a$? *Cinq*

25 / Dans quelle base a a-t-on l'égalité : $\overline{75}^a \times \overline{57}^a = \overline{3902}^a$? *onze*

26 / Existe-t-il une base dans laquelle on ait : $\overline{54} \times \overline{21} = \overline{1314}$? *non*

27 / Existe-t-il une base dans laquelle on ait : $\overline{18} + \overline{14} = \overline{44}$? *non*

28 / Existe-t-il une base dans laquelle on ait : $\overline{18} + \overline{14} = \overline{33}$? *non*

Calculer dans cette base : $\overline{81} + \overline{41}$
 $\overline{81} \times \overline{41}$
 $\overline{18} \times \overline{14}$.

29 / Déterminer l'ensemble des nombres qui s'écrivent $\overline{xyz}$ en base cinq et $\overline{yzx}$ en base sept.

30 / Un nombre s'écrit $\overline{xy}$ en base neuf et $\overline{yx}$ en base onze. Trouver ce nombre.

31 / Déterminer l'entier naturel qui s'écrit $\overline{abca}$ en base onze et $\overline{bbac}$ en base sept.

32 / Trouver les nombres de deux chiffres dans la numération décimale qui s'écrivent $\overline{ab}$ en base dix et $\overline{ba}$ en base sept.

33 1° Soit E l'ensemble des entiers naturels dont l'expression dans le système de numération décimale comporte cinq chiffres tous différents, le premier n'étant pas un zéro. Calculer le nombre d'éléments de E .

2° Soit F le sous-ensemble de E qui a pour éléments ceux des nombres de E dont l'expression contient les deux chiffres 0 et 1. Calculer le nombre d'éléments de F .

34 / Soient x, y, z trois entiers naturels tels que l'écriture en base x de y soit $\overline{131}$ et que l'écriture en base x de z soit $\overline{101}$.

1° Montrer que l'on peut, sans connaître x , exprimer dans le système de base x le produit xyz . *$= \overline{132320}^x$*

2° On suppose, de plus, que la somme $x + y + z$ est égale, dans le système décimal, à 50. Déterminer alors, dans le système décimal, les entiers x et xyz .

$$x = 4, xyz = \overline{132320}_4$$

(Baccalauréat 1972.)

35 / Soient a, b, n trois entiers naturels supérieurs à 1. Déterminer le plus petit entier n tel que l'on ait : $n = \overline{300}^a = \overline{33}^b$. *$(-1) n = 3a^2 = 3b + 3$
 $n = 48$*

36 / Même question que pour le n° 35 avec : $n = \overline{101}^a = \overline{41}^b$. *$n = 17$
 $n = a^2 + a = 4b + 4$
 $a^2 = 4b + 3 = 4b + 4 - 1 = 4(b+1) - 1$
 $a = 4$*

37 Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On définit trois suites d'entiers (u_n) , (v_n) , (ε_n) par les conditions suivantes :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2u_{n+1} + \varepsilon_n \quad 0 \leq \varepsilon_n \leq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2v_n$$

1° Montrer qu'il existe un entier N supérieur ou égal à 1 tel que l'on ait :

$$u_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad ((n > N) \implies (u_n = 0)).$$

2° Montrer que l'on a : $\sum_{i=0}^N \varepsilon_i v_i = ab$.

3° Justifier le procédé suivant de calcul du produit de deux entiers : soit, par exemple, $a = 25$ et $b = 12$. On dispose les nombres u_n et v_n sur deux colonnes, on barre les lignes qui correspondent à u_n pair et on additionne les v_n qui restent.

On trouve : $ab = 12 + 96 + 192 = 300 = 25 \times 12$.

u_n	v_n
25	12
12	24
6	48
3	96
1	192

4° Comparer la méthode indiquée au 3° à la multiplication usuelle en base deux.

38 Soit b un entier naturel supérieur ou égal à deux.

Montrer que le nombre qui s'écrit $\underbrace{10 \dots 01}_{2n \text{ fois}}$ dans le système de base b est divisible

par le nombre qui s'écrit $\overline{11}$ dans ce même système. (On désignera par w le chiffre qui représente l'entier $b - 1$ dans le système de base b .)

* **39** Soit b un entier naturel supérieur ou égal à deux.

On considère dans toute la suite le système de numération de base b .

1° Montrer que $\overline{10101}$ est divisible par $\overline{111}$ (on pourra calculer le produit $(b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$).

2° Montrer que $\overline{100010001}$ est divisible par $\overline{10101}$ et divise $\overline{10000000100000001}$.

3° Généraliser.

LYSÉE BAY

* **40** Soit x un entier naturel quelconque. On désigne par $p(x)$ le produit de ses chiffres en numération décimale.

Résoudre l'équation : $x^2 - 10x - 22 = p(x)$. (Olympiades, Moscou 1968.)

(Nous suggérons au lecteur l'approche suivante :

1° Montrer qu'il n'existe pas de solution à un chiffre. (raisonnement par élimination)

2° Chercher toutes les solutions à deux chiffres : en utilisant des majorations, montrer que le chiffre des dizaines est nécessairement 1.

3° En utilisant d'autres majorations, montrer qu'il n'y a pas de solution à trois chiffres ou plus.)

* **41** Montrer que tout entier naturel n peut se mettre, de manière unique, sous la forme : $n = a_1 (1!) + a_2 (2!) + \dots + a_k (k!) + \dots$ où les $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ sont des entiers, nuls à partir d'un certain rang, qui vérifient les inégalités :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq a_i \leq i$$

(Concours scolaire suédois, 1967.)

(Indication : reprendre point par point la démonstration du théorème 3.3. Pour le premier point, utiliser l'exercice n° 18.)

2.

* Entiers rationnels Entiers modulo n

$$\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$$

$$\text{avec } \text{pgcd}(a, b) = 1$$

$$\varphi \in \mathbb{D} \Leftrightarrow b = 2^n \times 5^m; n, m \in \mathbb{N}$$

Note : Nous adoptons la terminologie d' " entiers rationnels " de préférence à celle d' " entiers relatifs " utilisée par le programme. Il n'existe, à notre avis, aucune justification sérieuse à l'emploi du mot " relatif " ; au contraire, la terminologie d' " entier rationnel " rentre dans le cadre d'une théorie générale ; c'est d'ailleurs cette terminologie qui est généralement utilisée par les mathématiciens.

1. Construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels.

Dans le chapitre 1, nous avons étudié l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Cet ensemble est muni d'une loi de composition interne, notée $+$; cette loi est commutative, associative, admet un élément neutre 0 ; tout élément de $\mathbb{N}$ est régulier pour cette loi, mais seul 0 a un symétrique pour cette loi. La loi $+$ ne munit donc pas $\mathbb{N}$ d'une structure de groupe.

Dans les classes précédentes, nous avons rencontré les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ qui sont trois ensembles contenant $\mathbb{N}$ et sur chacun desquels est définie une addition qui prolonge celle définie sur $\mathbb{N}$ et qui les munit d'une structure de groupe commutatif. Nous avons d'autre part : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ apparaît donc comme « le plus petit » de ces ensembles.

Le but de ce paragraphe est de construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$. Cette construction n'est autre que l'application à $\mathbb{N}$ d'une construction générale, appelée **symétrisation**. Nous allons expliquer, dans le cas général, en quoi consiste cette symétrisation, mais conformément au programme, nous ne ferons les démonstrations que dans le cas de $\mathbb{N}$.

Symétrisation.

1.1 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $*$, commutative, associative, qui admet un élément neutre, noté e , et telle que tout élément de E soit régulier pour cette loi.

Symétriser E , c'est trouver un ensemble S muni d'une loi de composition interne, notée $\overset{\circ}{*}$ et une injection φ de E dans S , satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. $(S, \overset{\circ}{*})$ est un groupe commutatif.
2. φ est un homomorphisme de $(E, *)$ dans $(S, \overset{\circ}{*})$; dans ces conditions $(E, *)$ est isomorphe à $(\varphi(E), \overset{\circ}{*})$.
3. Si G est un ensemble quelconque muni d'une loi de composition interne, notée T , et ψ une injection de E dans G satisfaisant aux deux propriétés précédentes, alors il existe un sous-groupe de (G, T) isomorphe à $(S, \overset{\circ}{*})$.

On démontre que, s'il existe un tel triplet $(S, \overset{\circ}{*}, \varphi)$, il est unique, à un isomorphisme près; on peut construire un tel triplet de la manière suivante :

• S est l'ensemble-quotient de E^2 par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (a, b) \in E^2, \forall (a', b') \in E^2, ((a, b) \mathcal{R} (a', b')) \iff (a * b' = b * a')$$

• La loi $\overset{\circ}{*}$ est définie par :

$$\forall (\overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b}) \in S, \forall (\overset{\circ}{c}, \overset{\circ}{d}) \in S, (\overset{\circ}{a}, \overset{\circ}{b}) \overset{\circ}{*} (\overset{\circ}{c}, \overset{\circ}{d}) = \overset{\circ}{(a * c, b * d)}.$$

• L'application φ de E dans S est définie par : $\forall a \in E, \varphi(a) = \overset{\circ}{(a, e)}$.

Le groupe $(S, \overset{\circ}{*})$ est appelé le **symétrisé** de $(E, *)$.

Remarque : L'introduction de la relation $\mathcal{R}$ peut être motivée par les considérations suivantes :

Soit $(S, \overset{\circ}{*})$ un groupe commutatif.

Pour tout couple (s, s') de S^2 , l'équation $s \overset{\circ}{*} x = s'$ a une solution et une seule dans S .

Réciproquement, tout élément de S peut être considéré comme l'unique solution d'une infinité de telles équations.

Ceci nous conduit à étudier, dans E , les équations de la forme : $a * x = b$ et à chercher à quelle condition deux équations de cette forme ont pour ensemble de solutions le même singleton.

Si (a, b) est un couple quelconque de E^2 , une telle équation n'a pas nécessairement de solution; toutefois, s'il existe un élément c de E tel que : $b = a * c$, d'après la régularité de la loi $*$, l'ensemble des solutions est $\{c\}$.

Soient maintenant (a, b) et (a', b') deux couples de E^2 tels que chacune des équations : $a * x = b$ et $a' * x = b'$ ait pour ensemble de solutions le singleton $\{c\}$ de E . On a alors :

$$\begin{aligned} \left(\begin{cases} a * c = b \\ a' * c = b' \end{cases} \right) &\implies \left(\begin{cases} b' * a * c = b' * b \\ b * a' * c = b * b' \end{cases} \right) \implies (b' * a * c = b * a' * c) \\ &\implies (a * b' = b * a'). \end{aligned}$$

Définition de $(\mathbb{Z}, \dot{+})$.

$(\mathbb{Z}, \dot{+})$ apparaît comme le symétrisé de $(\mathbb{N}, +)$. Nous allons donc le construire de la manière développée au paragraphe 1.1.

1.2 THÉORÈME ET DÉFINITION : La relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^2$ par :

$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall (a', b') \in \mathbb{N}^2, ((a, b) \mathcal{R} (a', b')) \iff (a + b' = b + a')$ est une relation d'équivalence.

On appelle ensemble des entiers rationnels, et on note $\mathbb{Z}$, l'ensemble quotient de $\mathbb{N}^2$ par $\mathcal{R}$.

Nous notons $\dot{(a, b)}$ la classe du couple (a, b) de $\mathbb{N}^2$.

Démonstration :

• On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, a + b = b + a$.

La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.

• Soient a, b, a', b' des entiers naturels quelconques. On a :

$$\begin{aligned} ((a, b) \mathcal{R} (a', b')) &\iff (a + b' = b + a') \iff (a' + b = b' + a) \\ &\iff ((a', b') \mathcal{R} (a, b)). \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

• Soient a, b, a', b', a'', b'' des entiers naturels quelconques. On a :

$$\begin{aligned} ((a, b) \mathcal{R} (a', b') \text{ et } (a', b') \mathcal{R} (a'', b'')) &\iff (a + b' = b + a' \text{ et } a' + b'' = b' + a'') \\ &\implies (a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a'') \\ &\implies (a + b'' = b + a'') \\ &\iff ((a, b) \mathcal{R} (a'', b'')). \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}^2$; on pose $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2 / \mathcal{R}$. ■

1.3 THÉORÈME ET DÉFINITION : La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi de composition interne, notée $+$, définie dans $\mathbb{N}^2$ par :

$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{N}^2, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Cette propriété permet de définir dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ une loi de composition interne, notée provisoirement $\dot{+}$, par :

$$\dot{(a, b)} \in \mathbb{Z}, \dot{(c, d)} \in \mathbb{Z}, \dot{(a, b)} \dot{+} \dot{(c, d)} = \dot{(a + c, b + d)}.$$

Démonstration :

Soient $a, b, a', b', c, d, c', d'$ des entiers naturels quelconques. On a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} (a, b) \mathcal{R} (a', b') \\ (c, d) \mathcal{R} (c', d') \end{array} \right) &\iff \left(\begin{array}{l} a + b' = b + a' \\ c + d' = d + c' \end{array} \right) \\ &\implies (a + b' + c + d' = b + a' + d + c') \\ &\iff ((a + c, b + d) \mathcal{R} (a' + c', b' + d')). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.4 THÉORÈME : $(\mathbb{Z}, \dot{+})$ est un groupe commutatif.

Démonstration :

- La loi $\dot{+}$ est associative dans $\mathbb{Z}$.

Soient a, b, c, d, e, f des entiers naturels quelconques. On a :

$$\begin{aligned} ((\dot{a}, \dot{b}) \dot{+} (\dot{c}, \dot{d})) \dot{+} (\dot{e}, \dot{f}) &= \dot{(a+c, b+d)} \dot{+} (\dot{e}, \dot{f}) \\ &= ((\dot{a+c} + \dot{e}, \dot{b+d} + \dot{f})) = \dot{(a+(c+e), b+(d+f))} \\ &= (\dot{a}, \dot{b}) \dot{+} \dot{(c+e, d+f)} = (\dot{a}, \dot{b}) \dot{+} ((\dot{c}, \dot{d}) \dot{+} (\dot{e}, \dot{f})). \end{aligned}$$

Remarquons que cette démonstration utilise l'associativité de la loi $+$ dans $\mathbb{N}$.

- La loi $\dot{+}$ est commutative dans $\mathbb{Z}$.

La démonstration est analogue à la démonstration précédente.

- La classe $(\dot{0}, \dot{0})$ est élément neutre pour la loi $\dot{+}$ dans $\mathbb{Z}$; on l'appelle l'entier nul de $\mathbb{Z}$.

On a : $\forall (\dot{a}, \dot{b}) \in \mathbb{Z}, (\dot{a}, \dot{b}) \dot{+} (\dot{0}, \dot{0}) = \dot{(a+0, b+0)} = (\dot{a}, \dot{b})$.

La loi $\dot{+}$ est commutative dans $\mathbb{Z}$; ces égalités suffisent donc à démontrer le résultat.

- Tout élément $(\dot{a}, \dot{b})$ de $\mathbb{Z}$ admet un symétrique pour la loi $\dot{+}$; on l'appelle l'opposé de $(\dot{a}, \dot{b})$.

On a : $(\dot{a}, \dot{b}) \dot{+} (\dot{b}, \dot{a}) = \dot{(a+b, b+a)} = (\dot{0}, \dot{0})$.

L'opposé de $(\dot{a}, \dot{b})$ est donc $(\dot{b}, \dot{a})$, et l'opposé de $(\dot{b}, \dot{a})$ est $(\dot{a}, \dot{b})$. ■

1.5 THÉORÈME : Soit $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers rationnels de la forme

$(\dot{n}, \dot{0})$.

$(\mathbb{N}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}_+, \dot{+})$.

Démonstration :

Soit φ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}_+$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = (\dot{n}, \dot{0})$.

- De la définition de $\mathbb{Z}_+$, il résulte que φ est surjective.
- Soient n et n' deux entiers naturels quelconques. On a :

$$\begin{aligned} ((\varphi(n) = \varphi(n')) &\iff ((\dot{n}, \dot{0}) = (\dot{n'}, \dot{0})) \iff ((n, 0) \mathcal{R} (n', 0)) \\ &\iff (n+0 = 0+n') \iff (n = n'). \end{aligned}$$

L'application φ est donc injective.

- Soient n et n' deux entiers naturels quelconques. On a :

$$\varphi(n+n') = \dot{(n+n', 0)} = (\dot{n}, \dot{0}) \dot{+} (\dot{n'}, \dot{0}) = \varphi(n) \dot{+} \varphi(n'). \quad \blacksquare$$

On appelle entier positif tout élément de $\mathbb{Z}_+$.

Soit $\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des entiers rationnels de la forme $(\dot{0}, \dot{n})$.

On appelle entier négatif tout élément de $\mathbb{Z}_-$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que $(\mathbb{N}, +)$ est aussi isomorphe à $(\mathbb{Z}_-, \dot{+})$.

1.6 Propriétés.

P1 Soient a, b, a', b' des entiers naturels tels que : $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$(a \leq b) \iff (a' \leq b') \quad (1)$$

$$(a \geq b) \iff (a' \geq b') \quad (2)$$

Démonstration :

- Démontrons l'équivalence (1). On a :

$$\left(\begin{array}{l} a + b' = b + a' \\ a \leq b \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} a + b' = b + a' \\ a + b' \leq b + b' \end{array} \right)$$

$$\implies (b + a' \leq b + b') \implies (a' \leq b')$$

et de même :

$$\left(\begin{array}{l} a + b' = b + a' \\ a' \leq b' \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} a + b' = b + a' \\ a' + b \leq b' + b \end{array} \right)$$

$$\implies (a + b' \leq b' + b) \implies (a \leq b).$$

- L'équivalence (2) se démontre de façon analogue. ■

P2 On a : $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{(\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{0})\}$ et $\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$

Démonstration :

- Soit $(\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b})$ un élément quelconque de $\mathbb{Z}$. On a :

$$((\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}) \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-) \iff (\exists (n, n') \in \mathbb{N}^2, (\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}) = (\overset{\cdot}{n}, \overset{\cdot}{0}) = (\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{n})).$$

$$\text{D'autre part : } ((\overset{\cdot}{n}, \overset{\cdot}{0}) = (\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{n})) \iff (n + n' = 0 + 0) \iff (n = n' = 0).$$

$$\text{On a donc : } ((\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}) \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-) \iff ((\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}) = (\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{0})).$$

- Les ensembles $\mathbb{Z}_+$ et $\mathbb{Z}_-$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$.

$$\text{On a donc : } \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}.$$

Soit maintenant $(\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b})$ un élément quelconque de $\mathbb{Z}$. Il n'y a que deux cas possibles : $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Si l'on a l'inégalité : $a \leq b$, appelons n l'unique entier naturel tel que : $a + n = b$.

$$\text{On a alors : } (\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}) = (\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{n}).$$

Si l'on a l'inégalité $b \leq a$, appelons n l'unique entier naturel tel que : $b + n = a$.

$$\text{On a alors : } (\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b}) = (\overset{\cdot}{n}, \overset{\cdot}{0}).$$

Puisque, d'après P₁, la distinction entre les deux cas est indépendante du représentant choisi, on a donc : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$.

Des propositions : $\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$ il résulte que l'on a : $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$. ■

P3 L'opposé de l'entier positif $(\overset{\cdot}{n}, \overset{\cdot}{0})$ est l'entier négatif $(\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{n})$. Réciproquement, l'opposé de l'entier négatif $(\overset{\cdot}{0}, \overset{\cdot}{n})$ est l'entier positif $(\overset{\cdot}{n}, \overset{\cdot}{0})$.
La somme de deux entiers positifs est un entier positif.
La somme de deux entiers négatifs est un entier négatif.

La démonstration de cette propriété résulte des théorèmes 1.4 et 1.5.

Remarque : La somme d'un entier positif et d'un entier négatif peut être soit un entier positif, soit un entier négatif.

On a, par exemple : $\dot{(0, 3)} + \dot{(2, 0)} = \dot{(2, 3)} = \dot{(0, 1)}$
 $\dot{(0, 3)} + \dot{(4, 0)} = \dot{(4, 3)} = \dot{(1, 0)}.$

Multiplication dans $\mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une multiplication, notée $\times$. Nous allons définir une multiplication dans $\mathbb{Z}$, notée provisoirement $\dot{\times}$, telle que l'application φ soit un isomorphisme de $(\mathbb{N}, \times)$ sur $(\mathbb{Z}_+, \dot{\times})$.

1.7 THÉORÈME ET DÉFINITION : La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi de composition interne, notée $\times$, définie dans $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall (c, d) \in \mathbb{N}^2, (a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Cette propriété permet de définir dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ une loi de composition interne, notée provisoirement $\dot{\times}$, par :

$$\forall \dot{(a, b)} \in \mathbb{Z}, \forall \dot{(c, d)} \in \mathbb{Z}, \dot{(a, b)} \dot{\times} \dot{(c, d)} = \dot{(ac + bd, ad + bc)}.$$

L'entier rationnel $\dot{(ac + bd, ad + bc)}$ est appelé le **produit** de l'entier rationnel $\dot{(a, b)}$ par l'entier rationnel $\dot{(c, d)}$.

Démonstration :

Soient $a, b, a', b', c, d, c', d'$ des entiers naturels quelconques.

Démontrons que l'on a :

$$((a, b) \mathcal{R} (a', b') \text{ et } (c, d) \mathcal{R} (c', d')) \implies ((a, b) \times (c, d) \mathcal{R} (a', b') \times (c', d'))$$

ce qui équivaut à démontrer :

$$(a + b' = b + a' \text{ et } c + d' = d + c') \implies (ac + bd + a'd' + b'c' = ad + bc + a'c' + b'd').$$

Posons : $A = ac + bd + a'd' + b'c'$ et $B = ad + bc + a'c' + b'd'$.

On a alors :

$$\begin{aligned} A + b'c + a'd + a'c + b'd &= c(a + b') + d(b + a') + a'(c + d') + b'(c' + d) \\ &= c(b + a') + d(a + b') + a'(d + c') + b'(d' + c) \\ &= B + a'c + b'd + a'd + b'c \end{aligned}$$

ce qui équivaut à : $A = B$. ■

1.8 THÉORÈME : La bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}_+$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = \dot{(n, 0)} \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{N}, \times) \text{ sur } (\mathbb{Z}_+, \dot{\times}).$$

Démonstration :

Soient n et n' deux entiers naturels quelconques. On a :

$$\varphi(n) \dot{\times} \varphi(n') = \dot{(n, 0)} \dot{\times} \dot{(n', 0)} = \dot{(n \times n', 0)} = \varphi(n \times n'). \quad \blacksquare$$

1.9 THÉORÈME : $(\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif unitaire.

Démonstration :

- Du théorème 1.4, il résulte que $(\mathbb{Z}, \dot{+})$ est un groupe commutatif.

- La loi $\dot{\times}$ est associative dans $\mathbb{Z}$.

Soient a, b, c, d, e, f des entiers naturels quelconques. On a :

$$\begin{aligned} ((\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} (\dot{c}, \dot{d})) \dot{\times} (\dot{e}, \dot{f}) &= (\overbrace{ac + bd, ad + bc}^{\dot{\times}}) \dot{\times} (\dot{e}, \dot{f}) \\ &= ((\overbrace{ac + bd}^{\dot{\times}}) \dot{e} + (\overbrace{ad + bc}^{\dot{\times}}) \dot{f}, (\overbrace{ad + bc}^{\dot{\times}}) \dot{e} + (\overbrace{ac + bd}^{\dot{\times}}) \dot{f}) \\ &= (\overbrace{a(ce + df) + b(de + cf)}^{\dot{\times}}, \overbrace{b(ce + df) + a(de + cf)}^{\dot{\times}}) \\ &= (\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} (\overbrace{ce + df, de + cf}^{\dot{\times}}) \\ &= (\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} ((\dot{c}, \dot{d}) \dot{\times} (\dot{e}, \dot{f})). \end{aligned}$$

- La loi $\dot{\times}$ est commutative dans $\mathbb{Z}$.

La démonstration est analogue à la démonstration précédente.

- La loi $\dot{\times}$ est distributive par rapport à la loi $\dot{+}$ dans $\mathbb{Z}$.

La loi $\dot{\times}$ est commutative dans $\mathbb{Z}$; pour démontrer la distributivité, il suffit donc de démontrer la proposition suivante :

$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{N}^6$,

$$(\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} ((\dot{c}, \dot{d}) \dot{+} (\dot{e}, \dot{f})) = ((\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} (\dot{c}, \dot{d})) \dot{+} ((\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} (\dot{e}, \dot{f})).$$

La démonstration de cette proposition est analogue à la démonstration de l'associativité de la loi $\dot{\times}$ dans $\mathbb{Z}$.

- La classe $(\dot{1}, \dot{0})$ est élément neutre pour la loi $\dot{\times}$ dans $\mathbb{Z}$; on l'appelle aussi élément unité.

On a : $\forall (\dot{a}, \dot{b}) \in \mathbb{Z}, (\dot{a}, \dot{b}) \dot{\times} (\dot{1}, \dot{0}) = (\dot{a}, \dot{b}) = (\dot{1}, \dot{0}) \dot{\times} (\dot{a}, \dot{b}).$ ■

1.10 Propriétés.

P1 Le produit de deux entiers positifs est un entier positif.
 Le produit de deux entiers négatifs est un entier positif.
 Le produit d'un entier positif et d'un entier négatif est un entier négatif.

Démonstration :

Soient n et n' deux entiers naturels quelconques.

Du théorème 1.8, il résulte que l'on a : $(\dot{n}, \dot{0}) \dot{\times} (\dot{n'}, \dot{0}) = (\dot{nn'}, \dot{0}).$

D'autre part, on a :

$$(\dot{0}, \dot{n}) \dot{\times} (\dot{0}, \dot{n'}) = (\overbrace{0 + nn'}^{\dot{\times}}, \dot{0}) = (\dot{nn'}, \dot{0})$$

et :

$$(\dot{n}, \dot{0}) \dot{\times} (\dot{0}, \dot{n'}) = (\overbrace{0, nn'}^{\dot{\times}}) = (\dot{0}, \dot{nn'}). \quad \blacksquare$$

Remarque : L'opposé du produit de deux entiers rationnels est le produit de l'un quelconque de ces deux entiers par l'opposé de l'autre.

P2

Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Démonstration :

Cherchons séparément les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_+$ et de $\mathbb{Z}_-$.

- Soit $(n, 0)$ un élément quelconque de $\mathbb{Z}_+$. Cherchons s'il admet un symétrique (c, d) pour la loi $\dot{\times}$. On doit avoir : $(n, 0) \dot{\times} (c, d) = (1, 0)$.

L'entier rationnel $(1, 0)$ est élément de $\mathbb{Z}_+$; de P_1 , il résulte que nécessairement (c, d) est un élément de $\mathbb{Z}_+$, soit $(n', 0)$.

On a :

$$\begin{aligned} ((n, 0) \dot{\times} (n', 0) = (1, 0)) &\iff ((nn', 0) = (1, 0)) \iff ((nn', 0) \mathcal{R} (1, 0)) \\ &\iff (nn' = 1) \iff (n = n' = 1). \end{aligned}$$

Le seul élément inversible de $\mathbb{Z}_+$ est donc l'élément unité $(1, 0)$.

- Soit $(0, n)$ un élément quelconque de $\mathbb{Z}_-$. Cherchons s'il admet un symétrique pour la loi $\dot{\times}$. De même que précédemment, il résulte de P_1 que ce symétrique est nécessairement un élément de $\mathbb{Z}_-$, soit $(0, n')$.

On a :

$$((0, n) \dot{\times} (0, n') = (1, 0)) \iff ((nn', 0) = (1, 0)) \iff (n = n' = 1).$$

Le seul élément inversible de $\mathbb{Z}_-$ est donc $(0, 1)$. ■

Notations.

1.11 Il est d'usage de noter $+n$ l'entier positif non nul $(n, 0)$, $-n$ l'entier négatif non nul $(0, n)$ et 0 l'entier rationnel nul $(0, 0)$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible,

on note simplement n l'entier positif $(n, 0)$, ce qui revient à identifier $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}_+$.

L'opposé de l'entier rationnel $+n$ est l'entier rationnel $-n$, et réciproquement, l'opposé de l'entier rationnel $-n$ est l'entier rationnel $+n$.

Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ sont l'élément unité $+1$ et son opposé -1 .

Il est également d'usage de noter simplement $+$ et $\times$ les deux lois définies sur $\mathbb{Z}$ et $-x$ l'opposé d'un entier rationnel quelconque x .

La propriété P_1 du paragraphe 1.10 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (+n) \times (+n') &= + (nn') \\ (-n) \times (+n') &= - (nn') \\ (-n) \times (-n') &= + (nn'). \end{aligned}$$

Cette propriété est connue sous le nom de **règle des signes**.

Relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leq$.

Nous allons munir $\mathbb{Z}$ d'une relation d'ordre, notée provisoirement $\preceq$, qui prolonge celle de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire telle que l'on ait :

$$\forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, ((n \leq n') \iff (+n \preceq +n')).$$

1.12 THÉORÈME ET DÉFINITION : La relation, notée $\preceq$, définie dans $\mathbb{Z}$ par :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((x \preceq y) \iff (y - x \in \mathbb{Z}_+))$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{Z}$, qui prolonge la relation d'ordre $\leq$ définie dans $\mathbb{N}$.

Démonstration :

La relation $\preceq$ est une relation d'ordre.

- La relation $\preceq$ est réflexive.

0 appartient à $\mathbb{Z}_+$ et on a : $\forall x \in \mathbb{Z}, x - x = 0$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{Z}, x \preceq x$.

- La relation $\preceq$ est antisymétrique.

On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((x \preceq y \text{ et } y \preceq x) \iff (y - x \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } x - y \in \mathbb{Z}_+))$

$$\iff ((y - x) \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } (y - x) \in \mathbb{Z}_-)$$

$$\iff (y - x \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-) \iff (y - x = 0) \iff (y = x)$$

- La relation $\preceq$ est transitive.

On a :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, (x \preceq y \text{ et } y \preceq z) \iff (y - x \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } z - y \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\implies ((z - y) + (y - x) \in \mathbb{Z}_+) \iff (z - x \in \mathbb{Z}_+) \iff (x \preceq z).$$

La relation $\preceq$ est une relation d'ordre total.

Soient x et y deux éléments quelconques de $\mathbb{Z}$. De l'égalité $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$, il résulte que l'entier rationnel $y - x$ appartient soit à $\mathbb{Z}_+$ soit à $\mathbb{Z}_-$.

On a, d'autre part : $(y - x \in \mathbb{Z}_+) \iff (x \preceq y)$

et : $(y - x \in \mathbb{Z}_-) \iff (x - y \in \mathbb{Z}_+) \iff (y \preceq x).$

On a donc soit $x \preceq y$, soit $y \preceq x$.

La relation $\preceq$ prolonge la relation d'ordre $\leq$ définie dans $\mathbb{N}$.

Soient n et n' deux entiers naturels quelconques. On a :

$$(+n \preceq +n') \iff ((+n') - (+n) \in \mathbb{Z}_+) \iff ((\overset{\circ}{n'}, \overset{\circ}{0}) \dot{+} (\overset{\circ}{0}, \overset{\circ}{n}) \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\iff ((\overset{\circ}{n'}, \overset{\circ}{n}) \in \mathbb{Z}_+) \iff (n \leq n'). \quad \blacksquare$$

Notation : Nous noterons simplement $\leq$ la relation $\preceq$ définie dans $\mathbb{Z}$ et nous emploierons le vocabulaire utilisé pour l'ensemble $\mathbb{N}$.

1.13 Propriétés.

P1

L'ensemble $\mathbb{Z}_+$ est l'ensemble des entiers rationnels supérieurs ou égaux à l'entier nul; l'ensemble $\mathbb{Z}_-$ est l'ensemble des entiers rationnels inférieurs ou égaux à l'entier nul.

Démonstration :

Soit x un entier rationnel quelconque.

On a : $(x \in \mathbb{Z}_+) \iff (x - 0 \in \mathbb{Z}_+) \iff (0 \leq x)$

et : $(x \in \mathbb{Z}_-) \iff (-x \in \mathbb{Z}_+) \iff (0 - x \in \mathbb{Z}_+) \iff (x \leq 0)$. ■

Remarque : Il résulte de P_1 que tout élément de $\mathbb{Z}_-$ est inférieur à tout élément de $\mathbb{Z}_+$.

P2 L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ est un anneau totalement ordonné.

Démonstration :

• On a : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, ((x \leq y) \iff (y - x \in \mathbb{Z}_+))$
 $\iff ((y + z) - (x + z)) \in \mathbb{Z}_+ \iff (x + z \leq y + z)$.

De plus la loi $+$ est commutative dans $\mathbb{Z}$; la relation $\leq$ est donc compatible avec cette loi.

• On a : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, ((x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \iff (y - x \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } z \in \mathbb{Z}_+))$
 $\implies ((y - x)z \in \mathbb{Z}_+) \iff ((yz - xz) \in \mathbb{Z}_+) \iff (xz \leq yz)$.

Puisque la loi $\times$ est commutative dans $\mathbb{Z}$, les deux propositions suivantes sont vraies :

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, (x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies (xz \leq yz)$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, (x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies (zx \leq zy)$. ■

Remarque : Si x et y sont deux entiers rationnels quelconques, on a :

$(x \leq y) \iff (-y \leq -x)$.

Valeur absolue dans $\mathbb{Z}$.

1.14 DÉFINITION : Soit x un entier rationnel quelconque.

On appelle valeur absolue de x , et on note $|x|$, l'entier sup $(x, -x)$.

Remarques : 1. Si l'entier rationnel x est nul, on a : $x = -x = 0$; il en résulte : $|0| = 0$.

2. La relation d'ordre $\leq$ définie dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre total; si x est non nul, la borne supérieure de l'ensemble $\{x, -x\}$ est donc le plus grand élément de cet ensemble.

L'ensemble $\{x, -x\}$ est constitué d'un entier rationnel positif et d'un entier rationnel négatif. La valeur absolue de l'entier rationnel x est donc l'entier rationnel positif de l'ensemble $\{x, -x\}$.

3. On a : $\forall x \in \mathbb{Z}, ((x \in \mathbb{Z}_+) \iff (-x \in \mathbb{Z}_-) \iff (|x| = x))$

et : $\forall x \in \mathbb{Z}, ((x \in \mathbb{Z}_-) \iff (-x \in \mathbb{Z}_+) \iff (|x| = -x))$.

La valeur absolue d'un entier rationnel positif x est donc x .

La valeur absolue d'un entier rationnel négatif x est donc $-x$.

Par exemple, on a : $|-3| = |+3| = +3 = 3$.

4. La définition donnée peut être généralisée à un groupe muni d'une relation d'ordre, même si cette relation n'est pas une relation d'ordre total; il suffit que toute paire admette une borne supérieure. C'est par exemple le cas des fonctions numériques d'une variable réelle.

1.15 THÉORÈME : Les trois propositions suivantes sont vraies :

- $\forall x \in \mathbb{Z}, (|x| = 0) \iff (x = 0)$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, |xy| = |x| |y|$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration :

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (|x| = 0) \iff ((\sup(x, -x) = 0) \iff (x = 0 \text{ ou } -x = 0) \iff (x = 0)).$$

- Soient x et y deux entiers rationnels quelconques.

On a : $|xy| = \sup(xy, -xy)$

$$\begin{aligned} \text{et : } |x| |y| &= \sup(x, -x) \times \sup(y, -y) \\ &= \sup\{xy, (-x)y, (-y)x, (-x)(-y)\} \\ &= \sup(xy, -xy) \end{aligned}$$

- Soient x et y deux entiers rationnels quelconques.

On a : $|x + y| = \sup(x + y, -(x + y))$

$$\begin{aligned} \text{et : } |x| + |y| &= \sup(x, -x) + \sup(y, -y) \\ &= \sup\{x + y, x - y, -x + y, -x - y\} \\ &\geq \sup(x + y, -(x + y)). \blacksquare \end{aligned}$$

1.16 Propriétés.

P1

L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre.

(Pas de diviseur de zéro)

Rappel : Dire que l'anneau $(E, +, \times)$, d'élément nul 0, est **intègre** équivaut à la proposition suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, ((xy = 0) \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)).$$

On appelle **diviseurs de zéro** de E deux éléments quelconques non nuls x et y de E tels que l'on ait : $xy = 0$.

Un anneau intègre ne possède pas de diviseurs de zéro.

Démonstration :

Soient x et y deux entiers rationnels quelconques. Des propriétés de la multiplication dans $\mathbb{N}$ et de la valeur absolue dans $\mathbb{Z}$, il résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} (xy = 0) &\iff (|xy| = 0) \iff (|x| |y| = 0) \iff (|x| = 0 \text{ ou } |y| = 0) \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } y = 0). \blacksquare \end{aligned}$$

P2

Tout élément de $\mathbb{Z}^*$ est régulier pour la multiplication.

Démonstration :

Puisque la loi $\times$ est commutative dans $\mathbb{Z}$, dire que tout élément de $\mathbb{Z}^*$ est régulier pour cette loi équivaut à la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^*, \forall (y, z) \in \mathbb{Z}^2, (xy = xz) \implies (y = z).$$

Soient x un élément quelconque de $\mathbb{Z}^*$ et y et z deux éléments quelconques de $\mathbb{Z}$.

De P_1 , il résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} (xy = xz) &\iff (xy - xz = 0) \\ &\iff (x(y - z) = 0) \implies (y - z = 0) \iff (y = z). \blacksquare \end{aligned}$$

2. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Multiples d'un entier rationnel.

- 2.1 Soit a un entier rationnel quelconque. Nous rappelons qu'un entier rationnel b est appelé **multiple de a** si et seulement s'il existe un entier rationnel k tel que l'on ait : $b = ka$.

Nous noterons $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de l'entier rationnel a .

$$a\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = ka\}.$$

Remarques : 1. Les résultats suivants sont immédiats :

$$0\mathbb{Z} = \{0\}, \quad 1\mathbb{Z} = (-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

2. Si a est un entier rationnel quelconque, on a : $a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$.

2.2 THÉORÈME : Soit a un entier rationnel quelconque.

L'ensemble $a\mathbb{Z}$ des multiples de a est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Démonstration :

Utilisons le théorème 1.5 du chapitre 1 du tome 1.

- Soient x et y deux éléments quelconques de $a\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} x \in a\mathbb{Z} \\ y \in a\mathbb{Z} \end{array} \right) &\iff \left(\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z}, x = ka \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, y = k'a \end{array} \right) \implies (\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2, x + y = (k + k')a) \\ &\implies (\exists k'' \in \mathbb{Z}, x + y = k''a) \iff (x + y) \in a\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- De l'égalité $0 = 0a$, il résulte que l'entier nul 0 appartient à $a\mathbb{Z}$.

- Soit x un élément quelconque de $a\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} (x \in a\mathbb{Z}) &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = ka) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, -x = -(ka) = (-k)a) \\ &\iff (\exists k' \in \mathbb{Z}, -x = k'a) \iff (-x \in a\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

L'ensemble $a\mathbb{Z}$ est donc un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. ■

Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

- 2.3 Soient a et b deux entiers rationnels quelconques. On dit que b **divise** a et on note $b|a$ si et seulement si a est un multiple de b . On dit aussi que b est un **diviseur de a** .

On définit ainsi une relation binaire dans $\mathbb{Z}$, appelée **relation de divisibilité**.

Il est immédiat que cette relation est réflexive et transitive dans $\mathbb{Z}$; montrons qu'elle n'est pas antisymétrique.

On a la proposition suivante :

P1 $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, ((a b \text{ et } b a) \implies (a = b \text{ ou } a = -b))$
--

Démonstration :

Soient a et b deux entiers rationnels quelconques.

Supposons que l'on ait : $a|b$ et $b|a$.

Il existe alors des entiers rationnels k et k' tels que l'on ait : $b = ka$ et $a = k'b$.

Remarquons d'abord que, si a est nul, alors b est aussi nul.

Supposons maintenant a non nul.

On a alors : $a = k'(ka) = (k'k) a$ et par suite :

$(a \neq 0 \text{ et } a = (k'k) a) \implies (1 = k'k) \iff (k = k' = 1 \text{ ou } k = k' = -1).$ ■

La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique dans $\mathbb{Z}$; ce n'est donc pas une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Remarquons toutefois que la restriction de cette relation à $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre; cet ordre n'est pas un ordre total.

P2

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, ((b | a) \iff (a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}))$$

Démonstration :

Soient a et b deux entiers rationnels quelconques.

• Supposons : $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$.

Alors a appartient à $b\mathbb{Z}$ et par suite a est un multiple de b ; on a donc bien $b | a$.

• Supposons : $b | a$.

Alors il existe un entier rationnel c tel que l'on ait : $a = bc$.

Soit x un élément quelconque de $a\mathbb{Z}$; on a :

$$\begin{aligned} (x \in a\mathbb{Z}) &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = ka) \implies (\exists k \in \mathbb{Z}, x = (kc) b) \\ &\implies (\exists k' \in \mathbb{Z}, x = k'b) \iff (x \in b\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

On a donc bien : $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$. ■

Remarque : Si a est non nul, on a de façon immédiate :

$$(b | a) \implies (|b| \leq |a|).$$

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons généraliser à $\mathbb{Z}$ le théorème 3.1 du chapitre 1.

2.4 THÉORÈME : Soient a un entier rationnel quelconque et b un entier naturel quelconque non nul.

Il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

Nous emploierons le même vocabulaire que pour la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
Démonstration :

• Supposons : $a \geq 0$.

D'après le théorème 3.1 du chapitre 1, il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que l'on ait : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

• Supposons : $a < 0$.

Il n'y a que deux cas possibles : b divise a ou b ne divise pas a .

Si b divise a , il existe un entier rationnel q tel que l'on ait : $a = bq$. De plus, si q' et q'' sont deux entiers rationnels quelconques, on a :

$$(bq' = bq'' \text{ et } b \neq 0) \implies (q' = q'').$$

L'entier q est donc unique et on a bien : $a = bq + 0$.

Si b ne divise pas a , l'entier b ne divise pas non plus l'entier positif $|a|$. D'après le théorème 3.1 du chapitre 1, il existe un unique entier naturel q' tel que l'on ait : $bq' < |a| < b(q' + 1)$.

On a : $|a| = -a$ et, par suite, les inégalités précédentes sont équivalentes à : $b(-q' - 1) < a < b(-q')$.

Posons : $q = -q' - 1$ et $r = a - bq$.

On a alors : $bq < a < b(q + 1)$ et $r = a - bq$,

ce qui équivaut à : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Le couple (q, r) est un couple cherché; il est unique à cause de l'unicité de q' . ■

Exemples.

4 et 0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 12 par 3,
- 4 et 0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de - 12 par 3.

4 et 11 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 111 par 25.

- 5 et 14 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de - 111 par 25.

Caractérisation des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Nous avons vu que l'ensemble des multiples d'un entier rationnel est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Nous allons démontrer que, réciproquement, tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est l'ensemble des multiples d'un entier rationnel.

2.5 THÉORÈME : Soit E un sous-groupe quelconque de $(\mathbb{Z}, +)$. Il existe un unique entier naturel n tel que l'on ait : $E = n\mathbb{Z}$.

On dit que l'entier naturel n engendre le sous-groupe E .

Démonstration :

Unicité.

Soient n et n' deux entiers naturels quelconques. Des propriétés de la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$, il résulte que l'on a :

$$(n\mathbb{Z} = n'\mathbb{Z}) \iff (n\mathbb{Z} \subset n'\mathbb{Z} \text{ et } n'\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}) \iff (n' \mid n \text{ et } n \mid n') \\ \implies (n = n').$$

Existence.

Il n'y a que deux cas possibles : $E = \{0\}$ ou $E \neq \{0\}$.

- $E = \{0\}$.

On a alors : $E = 0\mathbb{Z}$.

- $E \neq \{0\}$.

E admet donc au moins un élément non nul a ; puisque E est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, l'entier naturel non nul $|a|$, qui est égal, soit à a , soit à $-a$, appartient donc à E et par suite à $E \cap \mathbb{N}^*$. Le sous-ensemble $E \cap \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{N}$ n'est donc pas vide; soit n son plus petit élément. Démontrons l'égalité : $n\mathbb{Z} = E$.

Soit x un élément quelconque de $n\mathbb{Z}$. Il existe donc un entier rationnel k tel que l'on ait : $x = kn$. On a alors : $|x| = |kn| = |k|n = \underbrace{n + \dots + n}_{|k| \text{ fois}}$

Puisque E est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, l'entier $|x|$ appartient à E et par suite, il en est de même de x . On a donc : $n\mathbb{Z} \subset E$.

Soit x' un élément quelconque de E . Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de x' par n .

On a : $x' = nq + r$ et $0 \leq r < n$.

Supposons r non nul. On a alors : $r = x' - nq$ et $0 < r < n$.

Puisque E est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et que $n\mathbb{Z}$ est inclus dans E , l'entier naturel non nul r appartient à E et donc à $E \cap \mathbb{N}^*$. Or, r est strictement inférieur à n qui est le plus petit élément de $E \cap \mathbb{N}^*$. Il y a donc contradiction et par suite r est nul. On a alors $x' = nq$ et par suite, on a également : $E \subset n\mathbb{Z}$.

Des propositions : $n\mathbb{Z} \subset E$ et $E \subset n\mathbb{Z}$, il résulte : $E = n\mathbb{Z}$. ■

3. Congruences dans $\mathbb{Z}$.

Construction de l'ensemble des entiers modulo n .

3.1 THÉORÈME ET DÉFINITION : Soit n un entier naturel quelconque. La relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x \mathcal{R} y) \iff (x - y \in n\mathbb{Z})$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

On l'appelle relation de congruence modulo n . L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par cette relation est appelé ensemble des entiers modulo n .

On le note : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Nous noterons $x \mathcal{R} y$ par $x \equiv y \pmod{n}$ et nous dirons : x est congru à y modulo n .
Démonstration :

• On a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x - x = 0$$

et par suite :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x \equiv x \pmod{n}.$$

La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.

• Soient x et y deux entiers rationnels quelconques. Puisque $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, on a :

$$\begin{aligned} (x \equiv y \pmod{n}) &\iff (x - y \in n\mathbb{Z}) \iff (- (x - y) \in n\mathbb{Z}) \\ &\iff (y - x \in n\mathbb{Z}) \iff (y \equiv x \pmod{n}). \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

• Soient x, y, z des entiers rationnels quelconques. Puisque $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} x \equiv y \pmod{n} \\ y \equiv z \pmod{n} \end{array} \right) &\iff \left(\begin{array}{l} x - y \in n\mathbb{Z} \\ y - z \in n\mathbb{Z} \end{array} \right) \implies ((x - y) + (y - z) \in n\mathbb{Z}) \\ &\implies (x - z \in n\mathbb{Z}) \iff (x \equiv z \pmod{n}). \end{aligned}$$

La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive. ■

Exemples.

$$\text{On a : } 5 \equiv 2 \pmod{3} \text{ et } -5 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Remarques : 1. Soient x et y deux entiers rationnels quelconques. Dire que x et y sont congrus modulo n équivaut à dire que x et y ont le même reste dans la division euclidienne par n .

2. Cherchons les ensembles $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$.

Soient x et y deux entiers rationnels quelconques.

On a : $(x \equiv y \pmod{0}) \iff (x - y \in 0\mathbb{Z}) \iff (x - y = 0) \iff (x = y)$

et : $(x \equiv y \pmod{1}) \iff (x - y \in 1\mathbb{Z}) \iff (x - y \in \mathbb{Z})$.

Si x est un entier rationnel quelconque sa classe d'équivalence modulo 0 est donc $\{x\}$ et sa classe d'équivalence modulo 1 est $\mathbb{Z}$ tout entier. L'ensemble $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$ peut donc être identifié à $\mathbb{Z}$ et l'ensemble $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ est un singleton.

3.2 THÉORÈME : Soit n un entier naturel quelconque non nul. L'ensemble des entiers congrus modulo n est un ensemble fini à n éléments et l'on a :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dots, \overbrace{(n-1)}^{\cdot}\}.$$

Démonstration :

De la remarque 1 du paragraphe 3.1, il résulte que tout entier rationnel x est congru au reste r de la division euclidienne de x par n et par suite on a : $\dot{x} = \dot{r}$.

Il y a donc autant de classes de congruence modulo n que de restes dans la division euclidienne par n .

L'ensemble des restes est l'ensemble à n éléments $\{0, 1, \dots, n-1\}$; l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc l'ensemble à n éléments $\{\dot{0}, \dot{1}, \dots, \overbrace{(n-1)}^{\cdot}\}$. ■

Exemples.

On a :

- $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\dot{0}\}$

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$ avec $\dot{0} = 2\mathbb{Z}$ et $\dot{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k + 1\}$

$\dot{0}$ est l'ensemble des entiers rationnels pairs et $\dot{1}$ est l'ensemble des entiers rationnels impairs.

- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$

Dans ce cas, on a par exemple : $9 \in \dot{0}$, $-8 \in \dot{1}$, $26 \in \dot{2}$.

Structure de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Désormais on supposera toujours n non nul.

3.3 THÉORÈME ET DÉFINITION : La relation de congruence modulo n est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

Cette propriété permet de définir dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une addition et une multiplication, notées respectivement $\dot{+}$ et $\dot{\times}$, par :

$$\forall (\dot{x}, \dot{y}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2, \dot{x} \dot{+} \dot{y} = \overbrace{x + y}^{\cdot} \text{ et } \dot{x} \dot{\times} \dot{y} = \overbrace{xy}^{\cdot}.$$

Démonstration :
Soient x, y, x', y' des entiers rationnels quelconques.

• On a :

$$\left(\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{n} \\ y \equiv y' \pmod{n} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} x - x' \in n\mathbb{Z} \\ y - y' \in n\mathbb{Z} \end{array} \right) \implies ((x - x') + (y - y')) \in n\mathbb{Z} \\ \implies (x + y) - (x' + y') \in n\mathbb{Z} \iff (x + y \equiv x' + y' \pmod{n}).$$

• On a de même :

$$\left(\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{n} \\ y \equiv y' \pmod{n} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \exists h \in \mathbb{Z}, x = x' + hn \\ \exists k \in \mathbb{Z}, y = y' + kn \end{array} \right) \\ \implies \exists (h, k) \in \mathbb{Z}^2, xy = (x' + hn)(y' + kn) \\ \implies \exists (h, k) \in \mathbb{Z}^2, xy = x'y' + n(hy' + kx' + hkn) \\ \implies \exists e \in \mathbb{Z}, xy = x'y' + ne \\ \iff (xy \equiv x'y' \pmod{n}). \blacksquare$$

Exemples.

Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on a : $\dot{4} + \dot{3} = \dot{7} = \dot{2}$ et $\dot{3} \times \dot{2} = \dot{6} = \dot{1}$.

3.4 THÉORÈME : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

Démonstration :

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se déduisent de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ exactement de la même manière que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$ se déduisent de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{N}^2$ définies aux paragraphes 1.3 et 1.7.

On traduit cette analogie en disant que ces lois sont définies par "passage au quotient".

Les démonstrations des différentes propriétés nécessaires à la structure d'anneau commutatif unitaire sont donc analogues à celles des théorèmes 1.4 et 1.9. L'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la classe de l'élément neutre de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\dot{0}$, et de même l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la classe de l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\dot{1}$. $\blacksquare$

Exemples.

Voici les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

• pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

● pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Remarques : 1. Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; l'élément unité $\bar{1}$ est son propre inverse; de même l'égalité $\bar{2} \times \bar{2} = \bar{1}$ montre que $\bar{2}$ est son propre inverse.

Tout élément distinct de $\bar{0}$ a un inverse : l'anneau $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \times)$ est donc un corps commutatif.

Il en est de même de l'ensemble $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. L'examen de la table de multiplication montre que $\bar{2}$ n'a pas d'inverse. De plus, on a $\bar{2} \times \bar{2} = \bar{0}$ ce qui montre que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ possède des diviseurs de zéro; ce n'est pas un anneau intègre. L'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est donc pas un corps.

Nous généralisons ces résultats au chapitre suivant.

Propriétés.

3.5 Les deux premières propriétés qui vont suivre ont été énoncées et démontrées dans le théorème 3.3. Nous les rappelons toutefois en raison de leur importance.

$$\mathbf{P1} \quad \forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4, \quad \left(\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{n} \\ y \equiv y' \pmod{n} \end{array} \right) \implies (x + y \equiv x' + y' \pmod{n})$$

$$\mathbf{P2} \quad \forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4, \quad \left(\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{n} \\ y \equiv y' \pmod{n} \end{array} \right) \implies (xy \equiv x'y' \pmod{n})$$

$$\mathbf{P3} \quad \forall (x, x') \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad (x \equiv x' \pmod{n}) \implies (kx \equiv kx' \pmod{n})$$

La propriété P_3 est l'application de P_2 au cas où $y = y' = k$.

Remarque : La réciproque de P_3 est fautive : ainsi, par exemple, on a :

$2 \times 3 \equiv 2 \times 6 \pmod{6}$, mais les entiers 3 et 6 ne sont pas congrus modulo 6.

On peut toutefois démontrer la propriété suivante :

$$\mathbf{P4} \quad \text{Soient } n \text{ et } d \text{ deux entiers naturels non nuls, } x \text{ et } x' \text{ deux entiers rationnels quelconques. Si } n, x, x' \text{ sont des multiples de } d, \text{ et si } n_1, x_1, x'_1 \text{ sont les quotients respectifs de } n, \text{ de } x, \text{ et de } x' \text{ par } d, \text{ alors on a :}$$

$$(x \equiv x' \pmod{n}) \implies (x_1 \equiv x'_1 \pmod{n_1}).$$

Démonstration :

On a par hypothèse : $x = dx_1$, $x' = dx'_1$, $n = dn_1$ et $d \neq 0$.

Il en résulte les équivalences :

$$\begin{aligned} (x \equiv x' \pmod{n}) &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x - x' = kn) \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, d(x_1 - x'_1) = dkn_1) \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x_1 - x'_1 = kn_1) \\ &\iff (x_1 \equiv x'_1 \pmod{n_1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dans l'exemple de la remarque précédente, on a : $2 \times 3 \equiv 2 \times 6 \pmod{6}$ et $3 \equiv 6 \pmod{3}$.

Exercices.

Le lecteur devra s'exercer à résoudre les exercices du type suivant : trouver le reste de la division euclidienne de 19^{52} par 7.

Cela revient à chercher la classe de congruence de 19^{52} modulo 7.

On a : $19 \equiv 5 \pmod{7}$ et par suite $19^{52} \equiv 5^{52} \pmod{7}$.

On étudie alors la suite des puissances de 5 modulo 7. On a :

$$5^1 \equiv 5 \pmod{7} \quad 5^2 \equiv 4 \pmod{7} \quad 5^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$5^4 \equiv 2 \pmod{7} \quad 5^5 \equiv 3 \pmod{7} \quad 5^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Soit n un entier naturel non nul; on a alors :

$$5^{6n} \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{7}$$

$$5^{6n+1} \equiv 5 \pmod{7}$$

$$5^{6n+2} \equiv 5^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$5^{6n+3} \equiv 6 \pmod{7}$$

$$5^{6n+4} \equiv 2 \pmod{7}$$

$$5^{6n+5} \equiv 3 \pmod{7}.$$

Effectuons la division euclidienne de 52 par 6.

On a : $52 = 8 \times 6 + 4$ et par conséquent : $19^{52} \equiv 5^{52} \equiv 5^4 \equiv 2 \pmod{7}$.

Le reste de la division euclidienne de 19^{52} par 7 est donc 2.

Congruences et critères de divisibilité.

3.6 L'étude qui suit est faite dans le système de numération décimale, mais elle peut être généralisée facilement au cas d'une base quelconque.

Soit p un entier naturel non nul. Donner un critère de divisibilité par p , c'est énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel quelconque x , écrit en base dix, soit divisible par p , c'est-à-dire soit congru à zéro modulo p .

Dans ce paragraphe, nous considérons un entier naturel quelconque x , dont l'écriture en base dix est : $x = \overline{x_n \dots x_0}$.

On a par définition : $x = 10^n x_n + \dots + 10 x_1 + x_0$.

Ceci nous conduit à étudier les classes de congruence modulo p des puissances successives de dix. On obtient des résultats particulièrement simples dans les cas suivants :

P1 L'entier naturel x est divisible par 2 (resp. par 5) si et seulement si x_0 est divisible par 2 (resp. par 5).

Démonstration :

2 et 5 sont des diviseurs de 10; on a donc : $10 \equiv 0 \pmod{2}$ et $10 \equiv 0 \pmod{5}$

d'où : $\forall i \in \mathbb{N}^*, 10^i \equiv 0 \pmod{2}$ et $10^i \equiv 0 \pmod{5}$

et par conséquent : $x \equiv x_0 \pmod{2}$ et $x \equiv x_0 \pmod{5}$. ■

P2 L'entier naturel x est divisible par 3 (resp. par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres $x_n + \dots + x_0$ est divisible par 3 (resp. par 9).

Démonstration :

3 et 9 sont des diviseurs de $10 - 1$; on a donc : $10 \equiv 1 \pmod{3}$ et $10 \equiv 1 \pmod{9}$

d'où : $\forall i \in \mathbb{N}, 10^i \equiv 1 \pmod{3}$ et $10^i \equiv 1 \pmod{9}$

et par conséquent : $x \equiv x_n + \dots + x_0 \pmod{3}$ et $x \equiv x_n + \dots + x_0 \pmod{9}$. ■

P3 L'entier naturel x est divisible par 11 si et seulement si la somme :
 $(-1)^n x_n + (-1)^{n-1} x_{n-1} + \dots + x_2 - x_1 + x_0$
est divisible par 11.

Démonstration :

On a : $10 \equiv -1 \pmod{11}$ et par suite : $\forall i \in \mathbb{N}, 10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$; d'où le résultat. ■

Remarque : En base a , on obtient de la même manière des critères analogues à P_1 (resp. P_2, P_3) pour la divisibilité par un diviseur de a (resp. $a - 1, a + 1$).

EXERCICES

Ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels.

1 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $|x + 3| = |1 - 2x|$.

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

3 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $|2x^2 - 9x + 9| = 1$.

4 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $|x^2 - 4x - 3| = 3$.

5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $|x - 4| = -2x^2 + 9x - 4$.

6 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $|x + 5| = x^2 + x - 4$.

* 7 1° Soient $(G, \star)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et φ un homomorphisme de $(G, \star)$ dans $(G', \perp)$. Démontrer que l'image par φ de tout sous-groupe de $(G, \star)$ est un sous-groupe de $(G', \perp)$.

2° Soit $(G, \star)$ un groupe fini. Démontrer que le seul homomorphisme de $(G, \star)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ est l'homomorphisme nul.

- 8 Soit $(G, \star)$ un groupe commutatif.
 1° Soit g un élément quelconque de G . Démontrer qu'il existe un unique homomorphisme φ de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, \star)$ tel que : $\varphi(1) = g$.
 2° En déduire tous les homomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, \star)$.

Congruences dans $\mathbb{Z}$.

- 9 Trouver le reste de la division euclidienne par 5 de 8^{1974} . $8^4 \equiv 1 \pmod{5}$
- 10 Calculer le reste de la division euclidienne par 7 de $(33)^{38}$.
- 11 Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de $(2917)^{541}$.
- 12 Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier naturel :
 $35(487)^{200} + 42(523)^{100} - 224$.
- 13 Déterminer le reste de la division euclidienne par 12 de l'entier naturel :
 $(1234)^{567} + (89)^{1011}$.
 (Concours scolaire suédois 1963.)
- 14 Quel est le reste de la division euclidienne par 7 de l'entier $(1976)^{57}$? Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(1976)^n$ soit congru à 4 modulo 7.
- 15 1° En remarquant que : $999 = 27 \times 37$, montrer que, pour tout entier naturel n on a : $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$.
 2° En déduire le reste de la division euclidienne par 37 de l'entier naturel :
 $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.
- 16 1° Démontrer que, pour tout entier naturel p , les entiers 3^p et 3^{p+6} ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
 2° Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , les entiers $(2103)^n$ et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
 Déterminer n pour que ce reste soit égal à 5.
- 17 1° Trouver le reste de la division euclidienne par 5 de $(7)^{45}$.
 2° Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , l'entier naturel $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par 5.
- 18 1° A tout entier naturel n , on fait correspondre le reste u_n de la division euclidienne de 4^n par 7.
 Montrer qu'il existe un entier naturel non nul a tel que l'on ait :
 $(u_n = u_{n+a})$ et $(u_n \neq u_{n+k} \text{ si } 0 < k < a)$.
 2° Même question pour le reste v_n de la division euclidienne de 5^n par 7.
 3° Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7?
- 19 Trouver, suivant les valeurs de l'entier n , le reste de la division euclidienne par 11 de l'entier naturel $10^{2n+4} - 2 \cdot 10^{n+2} + 1$.
- 20 1° Déterminer, pour tout entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 3.
 2° Déterminer, pour tout entier naturel n , le reste de la division euclidienne de $(275\,423)^n$ par 3.
 3° Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que l'entier naturel $(275\,423)^n + (372\,121)^n$ soit divisible par 3.

- 21 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$. $n = 13k + 2$
- 22 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , l'entier $5^n + 5n + 1$ est-il divisible par 6? $n = 6k + 2$
- 23 Déterminer les restes de la division euclidienne par 13 des quatre premières puissances de 5.
En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier naturel $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13. $5^{4n-1}(5^2+1)$
- 24 1° Déterminer les entiers rationnels n tels que l'on ait : $n^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
2° Déterminer les entiers rationnels n tels que l'on ait : $n^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
3° Démontrer que, pour tout entier rationnel n , l'entier rationnel $(n^3 + 1)(n^3 - 1)$ est divisible par 42. 49 erreur.
- 25 1° Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que l'entier $2^n - 1$ soit divisible par 9?
2° Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels pour lesquels la division euclidienne par 9 de l'entier $2^x 11^y$ donne 1 pour reste.
- 26 Démontrer la proposition suivante :
 $\forall n \in \mathbb{N}, (17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n} \equiv 0 \pmod{5})$.
- 27 1° Démontrer la proposition suivante :
 $\forall n \in \mathbb{N}, (3^{2n+1} + 2 \cdot 4^{3n+1} \equiv 0 \pmod{11})$.
2° Déterminer l'ensemble des entiers rationnels a tels que l'on ait :
 $\forall n \in \mathbb{N}, (3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 0 \pmod{11})$. $a = 2 + 53k$
- 28 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que l'on ait :
 $(5^n - 2 \equiv 0 \pmod{7})$ et $2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{5}$. $n = 4k + 1$
- 29 Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'entier $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.
- 30 Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n , l'entier $n^2(n^4 - 1)$ est divisible par 60.
- 31 Déterminer les entiers naturels n tels que l'entier $2 \cdot 3^n + 3$ soit divisible par 11.
- 32 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , l'entier $5^{5n} + 5^n + 2$ est-il multiple de 7?
- 33 Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que l'entier $n^3 - 3n^2 - 2$ soit multiple de 7.
- 34 Démontrer que, si aucun des trois entiers naturels a, b, c n'est multiple de 3, alors l'entier $a^2 + b^2 + c^2$ est multiple de 3.
- 35 1° Démontrer la proposition suivante :
 $\forall x \in \mathbb{Z}, (x \equiv 1 \pmod{2}) \implies (x^2 \equiv 1 \pmod{4})$.
2° Démontrer la proposition suivante :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x \equiv 1 \pmod{2}) \implies (x^2 - 3y^2 \not\equiv 0 \pmod{4})$.

36 Soient p un entier naturel non nul et x un entier rationnel.

- 1° Démontrer que, si $x^2 - x$ est un multiple de p , alors, quel que soit l'entier naturel non nul n , l'entier rationnel $x^n - x$ est un multiple de p .
- 2° Déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que, pour toute valeur de n , l'entier rationnel $x^n - x$ soit un multiple de 6.

37 Soient E un ensemble fini à n éléments, F l'ensemble des parties de E , et G l'ensemble des parties de F . On rappelle que F est fini et possède 2^n éléments. Soit m le nombre d'éléments de G . Trouver, suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier m .

(Baccalauréat 1970.)

38 Soient a et b deux entiers rationnels.

- 1° Développer $(a + b)^7$. En déduire que $(a + b)^7$ est congru à $a^7 + b^7$ modulo 7.
- 2° En déduire que $(a + b)^7$ est multiple de 7 si et seulement si $a^7 + b^7$ est multiple de 7.
- 3° Trouver tous les entiers rationnels x tels que :

$$\begin{cases} -10 \leq x \leq 10 \\ x^7 + 128 \text{ est multiple de } 7. \end{cases}$$

- 39 1° Montrer que, pour tout entier a , on a soit $a^4 \equiv 0 \pmod{16}$, soit $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$.
- 2° En déduire que pour tout entier naturel k inférieur à 15, il existe une infinité d'entiers naturels qui ne sont pas somme de k puissances quatrièmes d'entiers.

- * 40 1° Démontrer que, si trois nombres entiers rationnels x, y, z sont tels que la somme $x^3 + y^3 + z^3$ soit divisible par 3, alors la somme $x + y + z$ est divisible par 3.
- 2° Démontrer que, si la somme $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9, alors l'un au moins des trois nombres x, y, z est divisible par 3.

41 Montrer qu'il n'existe pas quatre entiers rationnels x, y, z, k tels que l'on ait : $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 7$.

$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}$ (Concours scolaire suédois 1966-1967.)

Congruences et numération.

42 Déterminer le chiffre des unités, dans le système décimal, de l'entier naturel : $(3\,548)^9 \times (2\,537)^{31}$.

* 43 Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{xyz0}$ en base a et $\overline{xyz}$ en base douze; on suppose que x n'est pas nul. Déterminer les entiers a, x, y, z, N . (On pourra utiliser la congruence modulo $a - 1$).

44 Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale, N s'écrit $\overline{abcd}$ et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.

- 1° a) Montrer que, si $a = 0$ ou $a = 7$, alors N est divisible par 7.
- b) Montrer que $10N - 3a$ est divisible par 7. En déduire que, si N est divisible par 7, alors $a = 0$ ou $a = 7$.
- 2° On suppose que l'on a : $a = 7, \quad b = d, \quad c = 0$.
Déterminer N pour qu'il soit divisible par 3.

(Baccalauréat 1972.)

45 Un entier naturel N s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système de numération à base sept. Déterminer x et y de manière que ce nombre N soit divisible par 6.

46 Soient x et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à deux. On désigne par $a(x, n)$ le nombre qui s'écrit, dans le système de numération de base x , avec n chiffres dont le premier et le dernier sont des 1 et les autres (s'il y a lieu) des 0.

1° Montrer que, quel que soit x , le nombre $a(x, n)$ est divisible par $a(x, \text{deux})$ si et seulement si n est pair.

2° A quelles conditions x et n doivent-ils satisfaire pour que le nombre $a(x, n)$ soit divisible par trois ?

(Baccalauréat 1971.)

47 Déterminer l'ensemble des couples de chiffres (x, y) tels que l'entier qui s'écrit $\overline{11x1y}$ en base dix soit divisible par 28.

* 48 Déterminer les entiers x et y tels que le nombre qui s'écrit $\overline{x32y}$ dans la base cinq soit divisible par 3 et par 4.

49 Un entier A s'écrit $\overline{13321}$ dans le système de numération de base quatre. Quel est, en base dix, le reste de la division euclidienne de A par 7 ?

50 On considère l'entier naturel n qui s'écrit : $\overline{342x}$ dans le système de numération de base b .

1° Si $b = 6$, déterminer x de façon que : $n \equiv 0 \pmod{5}$.

2° Si $b = 7$, déterminer x de façon que : $n \equiv 0 \pmod{3}$.

3° Si $b = 17$, déterminer x de façon que : $n \equiv 0 \pmod{12}$.

51 Trouver tous les entiers naturels compris entre 100 et 200 (en base dix), divisibles par 9 et qui, dans le système de numération de base six, s'écrivent : $\overline{x3y}$.

52 Pour tout entier naturel n , on considère l'entier : $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

1° Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+3} \equiv A_n \pmod{7}$.

2° En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n soit divisible par 7.

3° Soient a, b, c trois entiers naturels qui s'écrivent respectivement dans le système de numération de base deux : $\overline{1110}$, $\overline{1010100}$, $\overline{1001001000}$.
Ces nombres sont-ils divisibles par 7 ?

Équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

53 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0 \pmod{7}$.

54 Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$.

55 1° Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$.

2° Déterminer l'ensemble des entiers rationnels n tels que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 3n$ par 5 soit égal à 3.

56 Soit (p, q) un couple d'éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Déterminer successivement tous les couples (p, q) tels que l'équation dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $x^2 + px + q = \bar{0}$, admette :

- a) la solution $\bar{0}$
- b) la solution $\bar{1}$
- c) la solution $\bar{2}$
- d) aucune solution.

57 1° Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \bar{2}x - \bar{3} = \bar{0}$.

2° Trouver tous les diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

3° Résoudre dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \bar{2}x - \bar{3} = \bar{0}$.

58 Résoudre l'équation $x^3 = x$:

1° dans l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,

2° dans l'ensemble $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

59 Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{1}x - \bar{1}y = \bar{2} \end{cases}$$

60 1° Écrire la table de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

2° En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ de chacune des deux équations suivantes :

$$\bar{3}x + \bar{4} = \bar{0} \quad \text{et} \quad \bar{2}x + \bar{1} = \bar{0}.$$

3° En déduire les solutions dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ du système :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{4}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases}$$

4° Démontrer que l'équation $\bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1} = \bar{0}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

61 1° Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation : $\bar{2}x = \bar{0}$.

2° Résoudre dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le système :

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{4} \\ \bar{5}x + \bar{3}y = \bar{3} \end{cases}$$

62 Résoudre dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ le système :

$$\begin{cases} \bar{3}x + y = \bar{3} \\ x + y = \bar{1} \end{cases}$$

63 Résoudre dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le système :

$$\begin{cases} \bar{2}x - \bar{4}y = \bar{2} \\ x + \bar{5}y = \bar{2} \end{cases}$$

64 1° Démontrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

2° Soit I l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Démontrer que $(I, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \times)$ (groupe de Klein).

3.

* P.G.C.D. P.P.C.M. Nombres premiers

1. pgcd et ppcm.

- 1.1 Les sigles pgcd et ppcm signifient respectivement "plus grand commun diviseur" et "plus petit commun multiple" de deux ou plusieurs entiers. Ces expressions, d'usage très courant, sont ambiguës car les mots "plus grand" et "plus petit" concernent à la fois la relation de divisibilité et la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.

Le point de vue intéressant est celui qui concerne la relation de divisibilité.

Plus précisément, si a et b sont deux entiers naturels quelconques, nous appellerons **plus grand commun diviseur de a et de b** et nous noterons **pgcd** (a, b) la borne inférieure, si elle existe, du sous-ensemble $\{a, b\}$ de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$. De même nous appellerons **plus petit commun multiple de a et de b** et nous noterons **ppcm** (a, b) la borne supérieure, si elle existe, du sous-ensemble $\{a, b\}$ de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Dans le chapitre précédent nous avons démontré l'équivalence suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (x | y) \iff (y\mathbb{Z} \subset x\mathbb{Z}).$$

Si δ est un entier naturel quelconque, on a alors :

$$\begin{aligned} (\delta = \inf(a, b)) &\iff \left(\begin{array}{l} \delta | a \text{ et } \delta | b \\ \forall d \in \mathbb{N}, (d | a \text{ et } d | b \implies d | \delta) \end{array} \right) \\ &\iff \left(\begin{array}{l} a\mathbb{Z} \subset \delta\mathbb{Z} \text{ et } b\mathbb{Z} \subset \delta\mathbb{Z} \\ \forall d \in \mathbb{N}, (a\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z} \text{ et } b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}) \implies (\delta\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}) \end{array} \right) \\ &\iff (\delta\mathbb{Z} = \sup(a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z})) \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence suivante :

$$(\delta = \inf(a, b)) \iff (\delta\mathbb{Z} = \sup(a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z})).$$

On démontre de même l'équivalence :

$$(\mu = \sup(a, b)) \iff (\mu\mathbb{Z} = \inf(a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z})).$$

Ceci nous conduit à étudier l'existence de borne inférieure et de borne supérieure pour la relation d'inclusion dans l'ensemble des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Étude de l'ensemble $\mathcal{G}$ des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

1.2 THÉORÈME : Soient E et F deux sous-groupes quelconques de $(\mathbb{Z}, +)$. L'ensemble $E \cap F$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et on a : $E \cap F = \inf(E, F)$.

Démonstration :

• En classe de Première, nous avons vu que l'intersection de deux sous-groupes d'un même groupe est encore un sous-groupe.

• On a de façon immédiate :

$$\begin{cases} E \cap F \subset E \text{ et } E \cap F \subset F \\ \forall G \in \mathcal{G}, ((G \subset E \text{ et } G \subset F) \implies (G \subset E \cap F)) \end{cases}$$

ce qui équivaut à : $E \cap F = \inf(E, F)$. ■

Exemples.

Soit a un entier rationnel quelconque; on a les égalités :

$$a\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}; \quad a\mathbb{Z} \cap 0\mathbb{Z} = 0\mathbb{Z}; \quad a\mathbb{Z} \cap 1\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}.$$

1.3 THÉORÈME : Soient E et F deux sous-groupes quelconques de $(\mathbb{Z}, +)$. L'ensemble $E + F$ défini par : $E + F = \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists (x, y) \in E \times F, z = x + y\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et on a : $E + F = \sup(E, F)$.

Démonstration :

$E + F$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Utilisons le théorème 1.5 du chapitre 1 du tome 1.

• Soient z et z' deux éléments quelconques de $E + F$.

Puisque E et F sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{cases} z \in E + F \\ z' \in E + F \end{cases} \right) &\iff \left(\begin{cases} \exists (x, y) \in E \times F, z = x + y \\ \exists (x', y') \in E \times F, z' = x' + y' \end{cases} \right) \\ &\implies \exists (x, x', y, y') \in E^2 \times F^2, z + z' = x + x' + y + y' \\ &\implies \exists (x'', y'') \in E \times F, z + z' = x'' + y'' \iff (z + z' \in E + F). \end{aligned}$$

• De l'égalité : $0 = 0 + 0$, il résulte que 0 appartient à $E + F$.

• Soit z un élément quelconque de $E + F$. Puisque E et F sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, on a :

$$\begin{aligned} (z \in E + F) &\iff \exists (x, y) \in E \times F, z = x + y \\ &\iff \exists (x, y) \in E \times F, -z = -x - y \\ &\implies \exists (x', y') \in E \times F, -z = x' + y' \iff (-z \in E + F). \end{aligned}$$

$E + F = \sup(E, F)$.

• De la proposition : $(\forall x \in E, x = x + 0)$, il résulte que l'on a : $E \subset E + F$.

• De même on a : $F \subset E + F$.

• Soit G un élément quelconque de $\mathcal{G}$ tel que l'on ait : $E \subset G$ et $F \subset G$.

Soit z un élément quelconque de $E + F$. Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, on a alors :

$$\begin{aligned} (z \in E + F) &\iff \exists (x, y) \in E \times F, z = x + y \\ &\implies \exists (x, y) \in G^2, z = x + y \implies (z \in G). \end{aligned}$$

On a donc : $E + F \subset G$. ■

Exemples.

Soit a un entier rationnel quelconque; on a les égalités :

$$a\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z};$$

$$a\mathbb{Z} + 0\mathbb{Z} = a\mathbb{Z};$$

$$a\mathbb{Z} + 1\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

Remarque : Les théorèmes 1.2 et 1.3 sont vrais dans l'ensemble des sous-groupes d'un groupe commutatif quelconque.

- 1.4 DÉFINITIONS :** Soient a et b deux entiers rationnels quelconques. On appelle plus grand commun diviseur de a et de b , et on note $\text{pgcd}(a, b)$, l'entier naturel qui engendre le sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{Z}, +)$. On appelle plus petit commun multiple de a et de b et on note $\text{ppcm}(a, b)$, l'entier naturel qui engendre le sous-groupe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{Z}, +)$.

Remarques : 1. Il résulte du théorème 2.5 du chapitre 2 que les entiers naturels $\text{pgcd}(a, b)$ et $\text{ppcm}(a, b)$ existent et sont uniques.

2. Des égalités : $a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z} = |b|\mathbb{Z}$, il résulte que l'on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(|a|, |b|) \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(a, b) = \text{ppcm}(|a|, |b|).$$

Dans toute la suite, nous ne considérons donc que des entiers naturels; les définitions seront toutefois données dans le cas général.

Exemples.

1. Des égalités : $(a\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z})$ et $(a\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z})$, il résulte que l'on a : $\text{pgcd}(a, a) = |a|$ et $\text{ppcm}(a, a) = |a|$.

2. Des égalités : $(a\mathbb{Z} + 0\mathbb{Z} = a\mathbb{Z})$ et $(a\mathbb{Z} \cap 0\mathbb{Z} = 0\mathbb{Z})$, on déduit : $\text{pgcd}(a, 0) = |a|$ et $\text{ppcm}(a, 0) = 0$.

3. Des égalités : $a\mathbb{Z} + 1\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap 1\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, on déduit : $\text{pgcd}(a, 1) = 1$ et $\text{ppcm}(a, 1) = |a|$.

Propriétés.

- 1.5** Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des entiers naturels non nuls.

$$\boxed{\text{P1} \quad \forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a) \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(a, b) = \text{ppcm}(b, a).}$$

Cette propriété résulte des égalités :

$$(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad (a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z}).$$

P2

Soient a, b, δ, μ des entiers naturels quelconques non nuls.

On a :

$$(\text{pgcd}(a, b) = \delta) \implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \delta = au + bv)$$

$$(\text{ppcm}(a, b) = \mu) \implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \mu = au = bv)$$

Cette propriété résulte immédiatement des égalités :

$$\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}.$$

P3 L'ensemble des multiples communs à deux entiers naturels quelconques non nuls est l'ensemble des multiples de leur ppcm.
L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers naturels quelconques non nuls est l'ensemble des diviseurs de leur pgcd.

Démonstration :

Soient a et b deux entiers naturels quelconques non nuls, δ leur pgcd et μ leur ppcm.

La première proposition est une traduction de l'égalité : $\mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Démontrons la seconde proposition. Il suffit de démontrer :

$\forall d \in \mathbb{N}^*, (d \mid \delta) \iff (d \mid a \text{ et } d \mid b)$.

Or ceci équivaut à dire que δ est la borne inférieure pour la relation de divisibilité de $\{a, b\}$. ■

P4 Soient a, b, k des entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $\text{pgcd}(ka, kb) = k \text{pgcd}(a, b)$.

Démonstration :

Posons : $\delta' = \text{pgcd}(ka, kb)$ et $\delta = \text{pgcd}(a, b)$.

Démontrons que l'on a : $\delta' = k\delta$, c'est-à-dire, puisque les entiers δ, δ', k sont positifs, on a : $\delta'\mathbb{Z} = (k\delta)\mathbb{Z}$.

Des définitions de δ' et de δ , il résulte les égalités :

$\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $\delta'\mathbb{Z} = (ka)\mathbb{Z} + (kb)\mathbb{Z}$.

$\delta'\mathbb{Z} \subset (k\delta)\mathbb{Z}$.

Soit x un élément quelconque de $\delta'\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} (x \in \delta'\mathbb{Z}) &\implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, x = (ka)u + (kb)v) \\ &\implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, x = k(au + bv)). \end{aligned}$$

L'entier rationnel $au + bv$ appartient à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et par suite à $\delta\mathbb{Z}$.

Il existe donc un entier rationnel w tel que l'on ait : $au + bv = \delta w$.

On a alors :

$$(x \in \delta'\mathbb{Z}) \implies (\exists w \in \mathbb{Z}, x = k\delta w = (k\delta)w) \implies (x \in (k\delta)\mathbb{Z}).$$

$(k\delta)\mathbb{Z} \subset \delta'\mathbb{Z}$.

Soit x un élément quelconque de $(k\delta)\mathbb{Z}$. On a :

$$(x \in (k\delta)\mathbb{Z}) \implies (\exists w \in \mathbb{Z}, x = k\delta w).$$

D'après P₂ il existe deux entiers rationnels u et v tels que l'on ait : $\delta = au + bv$.

On a alors :

$$\begin{aligned} (x \in (k\delta)\mathbb{Z}) &\implies (\exists (u, v, w) \in \mathbb{Z}^3, x = kw(au + bv) = (ka)(uw) + (kb)(vw)) \\ &\implies (\exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2, x = kau' + kbv') \\ &\implies (x \in (ka)\mathbb{Z} + (kb)\mathbb{Z}) \\ &\implies (x \in \delta'\mathbb{Z}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

P'4 Soient a, b, k des entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $\text{ppcm}(ka, kb) = k \text{ppcm}(a, b)$.

Démonstration :

Posons : $\mu' = \text{ppcm}(ka, kb)$ et $\mu = \text{ppcm}(a, b)$.

Démontrons que l'on a : $\mu' = k\mu$, c'est-à-dire, puisque les entiers μ, μ', k sont positifs, que l'on a : $\mu'\mathbb{Z} = (k\mu)\mathbb{Z}$.

Des définitions de μ et de μ' , il résulte les égalités :

$$\mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mu'\mathbb{Z} = (ka)\mathbb{Z} \cap (kb)\mathbb{Z}.$$

$$\mu'\mathbb{Z} \subset (k\mu)\mathbb{Z}.$$

Soit x un élément quelconque de $\mu'\mathbb{Z}$. On a :

$$(x \in \mu'\mathbb{Z}) \implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, x = (ka)u \quad \text{et} \quad x = (kb)v)$$

$$\implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, x = k(au) \quad \text{et} \quad x = k(bv)).$$

L'entier k est non nul; l'égalité : $kau = kbv$ implique l'égalité : $au = bv$.

Il existe donc un entier rationnel w tel que l'on ait : $au = bv = \mu w$.

$$\text{On a alors : } (x \in \mu'\mathbb{Z}) \implies (\exists w \in \mathbb{Z}, x = k\mu w) \implies (x \in (k\mu)\mathbb{Z}).$$

$$(k\mu)\mathbb{Z} \subset \mu'\mathbb{Z}.$$

Soit x un élément quelconque de $k\mu\mathbb{Z}$. On a :

$$x \in (k\mu)\mathbb{Z} \implies \exists w \in \mathbb{Z}, x = k\mu w.$$

D'après P_2 il existe deux entiers rationnels u et v tels que l'on ait : $\mu = au = bv$.

$$\text{On a alors : } (x \in (k\mu)\mathbb{Z}) \implies (\exists (u, v, w) \in \mathbb{Z}^3, x = k(au)w \quad \text{et} \quad x = k(bv)w)$$

$$\implies (\exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2, x = kau' \quad \text{et} \quad x = kbv')$$

$$\implies (x \in (ka)\mathbb{Z} \cap (kb)\mathbb{Z}) \implies (x \in \mu'\mathbb{Z}). \quad \blacksquare$$

Remarque : Les propriétés P_4 et P'_4 s'écrivent aussi sous la forme :

$$k(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = ka\mathbb{Z} + kb\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad k(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) = ka\mathbb{Z} \cap kb\mathbb{Z}.$$

P5

Soient a et b deux entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$.

Démonstration :

Posons : $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ et $\mu = \text{ppcm}(a, b)$.

Démontrons que l'on a : $\mu\delta = ab$, c'est-à-dire, puisque les entiers a, b, δ, μ sont positifs, que l'on a : $(\mu\delta)\mathbb{Z} = (ab)\mathbb{Z}$.

$$(\mu\delta)\mathbb{Z} \subset (ab)\mathbb{Z}.$$

Par définition de δ et de μ , on a :

$$\begin{aligned} (\mu\delta)\mathbb{Z} &= \mu(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = (\mu a)\mathbb{Z} + (\mu b)\mathbb{Z} = a(\mu\mathbb{Z}) + b(\mu\mathbb{Z}) \\ &= a(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) + b(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) = (a^2\mathbb{Z} \cap ab\mathbb{Z}) + (ab\mathbb{Z} \cap b^2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Or on a : $((a^2\mathbb{Z} \cap (ab)\mathbb{Z}) \subset (ab)\mathbb{Z})$ et $((ab)\mathbb{Z} \cap b^2\mathbb{Z}) \subset (ab)\mathbb{Z}$
et par définition de la somme de deux sous-groupes : $(\mu\delta)\mathbb{Z} \subset (ab)\mathbb{Z}$.

$$(ab)\mathbb{Z} \subset (\mu\delta)\mathbb{Z}.$$

Par définition de δ et de μ , on a :

$$\begin{aligned} (\mu\delta)\mathbb{Z} &= \delta(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) = (a\delta)\mathbb{Z} \cap (b\delta)\mathbb{Z} = a(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) \cap b(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) \\ &= (a^2\mathbb{Z} + (ab)\mathbb{Z}) \cap ((ab)\mathbb{Z} + b^2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Or on a : $(ab)\mathbb{Z} \subset a^2\mathbb{Z} + (ab)\mathbb{Z}$ et $(ab)\mathbb{Z} \subset b^2\mathbb{Z} + (ab)\mathbb{Z}$

et par définition de l'intersection de deux sous-groupes : $(ab)\mathbb{Z} \subset (\mu\delta)\mathbb{Z}. \quad \blacksquare$

Recherche pratique du pgcd et du ppcm.

- 5 Nous allons indiquer une méthode pratique de recherche du pgcd de deux entiers appelée **algorithme d'Euclide**. De la propriété P_5 nous déduisons leur ppcm. Cette méthode utilise les deux propriétés suivantes :

P1 Soient a et b deux entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $(b \mid a) \implies (\text{pgcd}(a, b) = b \text{ et } \text{ppcm}(a, b) = a).$

Démonstration :

On a : $(b \mid a) \implies (a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z})$
 $\implies ((a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}) \text{ et } (a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}))$
 $\implies (\text{pgcd}(a, b) = b \text{ et } \text{ppcm}(a, b) = a). \blacksquare$

P2 Soient a et b deux entiers naturels quelconques non nuls et q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .
On a : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r).$

Démonstration :

De l'égalité : $a = bq + r$, il résulte que tout diviseur commun à a et à b est un diviseur commun à b et à r , et que, réciproquement, tout diviseur commun à b et à r est un diviseur commun à a et à b .

L'ensemble des diviseurs communs à a et à b est donc égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et à r et, d'après la propriété P_3 du paragraphe 1.5, il résulte que l'on a : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r). \blacksquare$

- Le principe de l'algorithme d'Euclide est le suivant :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls distincts dont on cherche le pgcd. Supposons par exemple que l'on ait : $a > b$. On effectue la division euclidienne de a par b . On obtient un couple (q_1, r_1) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ 0 \leq r_1 < b. \end{cases}$$

Si r_1 est nul, d'après la propriété P_1 du paragraphe 1.6, on a : $\text{pgcd}(a, b) = b$.

Si r_1 n'est pas nul, d'après la propriété P_2 du paragraphe 1.6, on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1).$$

Puisque l'on a : $r_1 < b$, la division euclidienne de b par r_1 détermine un couple (q_2, r_2) d'entiers naturels tels que l'on ait : $b = r_1q_2 + r_2$ et $0 \leq r_2 < r_1$.

Si r_2 est nul, d'après la propriété P_1 du paragraphe 1.6, on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = r_1.$$

Si r_2 n'est pas nul, d'après la propriété P_2 du paragraphe 1.6, on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2).$$

Et ainsi de suite.

Chaque nouveau reste est inférieur au reste précédent; au bout d'un nombre fini de telles divisions, on obtient un reste nul. D'après les propriétés P_1 et P_2 du paragraphe 1.6, le pgcd de a et de b est donc égal au dernier reste non nul obtenu dans les divisions successives.

Il est d'usage de présenter les calculs de la façon suivante :

Exemples.

1. Recherche de pgcd (168, 96).

q_i		1	1	3
	168	96	72	24
r_i	72	24	0	

On a donc : $\text{pgcd}(168, 96) = 24$ et par suite : $\text{ppcm}(168, 96) = \frac{168 \times 96}{24} = 672.$

2. Recherche de pgcd (385, 324).

		1	5	3	4	1	3
	385	324	61	19	4	3	1
	61	19	4	3	1	0	

On a donc : $\text{pgcd}(385, 324) = 1$ et par suite : $\text{ppcm}(385, 324) = 385 \times 324 = 124\,740.$

Nous venons de voir que deux entiers naturels peuvent avoir un pgcd égal à 1. Dans ce cas, 1 est le seul diviseur commun positif de ces deux entiers. De tels entiers sont dits premiers entre eux. Nous les étudions dans le paragraphe suivant.

Entiers premiers entre eux.

1.7 DÉFINITION : Soient a et b deux entiers rationnels quelconques non nuls. Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si l'on a : $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Remarques : 1. Dire que a et b sont premiers entre eux équivaut à dire que l'on a : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

2. Dire que a et b sont premiers entre eux équivaut à dire que les seuls diviseurs communs à a et à b sont 1 et -1 .

1.8 THÉORÈME : Soient a et b deux entiers rationnels quelconques non nuls. On a : $(\text{pgcd}(a, b) = 1) \iff (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1).$

L'égalité : $au + bv = 1$ est connue sous le nom d'identité de Bezout.

Démonstration :

• Supposons que l'on ait : $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

L'application de la propriété P_2 du paragraphe 1.5 au cas particulier où δ est égal à 1, donne le résultat cherché.

• Supposons que l'on ait : $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$.

Posons : $\delta = \text{pgcd}(a, b)$. L'entier δ est nécessairement non nul. L'entier 1 appartient à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, donc à $\delta\mathbb{Z}$; or l'entier naturel δ est le plus petit élément positif non nul du sous-groupe $\delta\mathbb{Z}$; on a donc : $\delta = 1$. ■

Remarque : Si a et b ne sont pas premiers entre eux, dire qu'il existe un couple (u, v) d'entiers rationnels tels que l'on ait : $au + bv = d$ n'implique pas que d soit le pgcd de a et de b . Toutefois d est alors un multiple du pgcd de a et de b .
Par exemple on a : $12 \times 1 - 3 \times 2 = 6$ et $\text{pgcd}(12, 3) = 3$.

Propriétés.

1.9

P1 Soient a et b deux entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $(\text{pgcd}(a, b) = 1) \iff (\text{ppcm}(a, b) = ab)$.

Cette propriété résulte de l'égalité : $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$.

P2 Soient a et b deux entiers naturels quelconques non nuls et δ leur pgcd.
On a : $(\delta = \text{pgcd}(a, b))$
 $\iff (\exists (a', b') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, a = \delta a' \text{ et } b = \delta b' \text{ et } \text{pgcd}(a', b') = 1)$.

Les entiers a' et b' sont les quotients respectifs de a et b par δ .

D'après la propriété P_4 du paragraphe 1.5, l'égalité : $\text{pgcd}(a', b') = 1$ est équivalente à l'égalité : $\text{pgcd}(a, b) = \delta$.

Cette propriété est très utile dans de nombreux exercices. Elle permet de limiter les recherches à des entiers premiers entre eux.

P3 Soient a, b, c des entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $(\text{pgcd}(a, b) = 1 \text{ et } \text{pgcd}(a, c) = 1) \implies (\text{pgcd}(a, bc) = 1)$.

Démonstration :

On a : $(\text{pgcd}(a, b) = 1) \iff (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1)$
 $\implies (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, acu + bcv = c)$.

Soit d un diviseur commun à a et à bc . On a :

$(d \mid a \text{ et } d \mid bc) \implies (d \mid a(cu) + (bc)v) \implies (d \mid c)$.

L'entier d est donc un diviseur commun à a et à c .

Puisque a et c sont premiers entre eux, d est nécessairement égal à 1 ou à -1 , et par suite a et bc sont premiers entre eux. ■

P4 Soient a, b, c des entiers naturels quelconques non nuls.
On a : $(c \mid ab \text{ et } \text{pgcd}(a, c) = 1) \implies (c \mid b)$.

Cette propriété est connue sous le nom de **théorème de Gauss**.
Démonstration :

On a : $(\text{pgcd}(a, c) = 1) \iff (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + cv = 1)$

On a alors : $(c \mid ab \text{ et } c \mid cb) \implies (c \mid abu + cbv) \implies (c \mid b)$. ■

Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ d'équations du type : $ax + by = c$.

1.10 Soient a, b, c des entiers naturels quelconques non nuls.

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $ax + by = c$, c'est trouver l'ensemble S des couples (x, y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que l'on ait : $ax + by = c$.

Posons : $\delta = \text{pgcd}(a, b)$.

Si c n'est pas un multiple de δ , alors S est l'ensemble vide.

Soit (x_0, y_0) un élément de S ; l'entier $ax_0 + by_0$ appartient à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, donc à $\delta\mathbb{Z}$. Cet entier ne peut être égal à c que si l'entier c appartient lui aussi à $\delta\mathbb{Z}$.

Dans toute la suite nous supposons donc que c est un multiple de δ .

On peut toujours supposer que a et b sont premiers entre eux.

Posons : $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, $c = \delta c'$.

On a alors : $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $((ax + by = c) \iff (a'x + b'y = c'))$.

Dans toute la suite, nous supposons donc que l'on a : $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

La connaissance d'une solution permet de trouver toutes les autres à l'aide des solutions de l'équation : $ax + by = 0$.

Soit (x_0, y_0) un élément de S . On a donc : $ax_0 + by_0 = c$.

Soit (x, y) un élément quelconque de S . On a :

$$\begin{aligned} ((x, y) \in S) &\iff (ax + by = c) \iff (ax + by = ax_0 + by_0) \\ &\iff (a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0). \end{aligned}$$

Si S' est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $ax + by = 0$, on a donc :

$$((x, y) \in S) \iff ((x - x_0, y - y_0) \in S').$$

Pour résoudre l'équation : $ax + by = c$, il suffit donc de chercher une solution particulière (x_0, y_0) de cette équation, puis de résoudre l'équation : $ax + by = 0$.

Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $ax + by = 0$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Cette équation est équivalente à l'équation : $ax = -by$.

L'entier a divise by et est premier avec b ; d'après le théorème de Gauss, a divise y .

Il existe donc un entier rationnel k tel que l'on ait : $y = ka$.

On a donc : $ax = -bka$ et par suite : $x = -kb$.

L'ensemble S' des solutions de l'équation : $ax + by = 0$, est donc l'ensemble des couples $(-kb, ka)$ où k décrit $\mathbb{Z}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation : $ax + by = c$.

Puisque a et b sont premiers entre eux, il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que l'on ait : $au + bv = 1$.

Une solution particulière de l'équation : $ax + by = c$ est donc le couple (cu, cv) .

Nous donnons dans les exemples qui suivent deux méthodes de recherche d'un couple (u, v) .

Exemples.

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $8x + 14y = 4$.

(1)

On a : $\text{pgcd}(8, 14) = 2$.

L'équation (1) équivaut à : $4x + 7y = 2$.

(2)

Cherchons un couple (u, v) tel que l'on ait : $4u + 7v = 1$.

On a : $(4u + 7v = 1) \implies (7v \equiv 1 \pmod{4}) \implies (3v \equiv 1 \pmod{4})$
 $\implies (3 \cdot \dot{v} = \dot{1})$.

D'après la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on a $\dot{v} = \dot{3}$.

Une valeur de v est donc 3; on en déduit la valeur correspondante de u , soit : -5 .

Un couple (u, v) est donc le couple $(-5, 3)$.

Une solution de (2) est donc $(-10, 6)$.

D'autre part l'ensemble S' des solutions de l'équation : $4x + 7y = 0$ est l'ensemble des couples de la forme $(-7k, 4k)$ où k est un entier rationnel quelconque.

L'ensemble S des solutions de l'équation : $8x + 14y = 4$ est donc l'ensemble des couples de la forme $(-7k - 10, 4k + 6)$ où k est un entier rationnel quelconque.

La recherche d'un couple (u, v) à l'aide des congruences n'est pratique que si les entiers $|a|$ et $|b|$ sont assez petits.

Nous donnons dans le second exemple une autre méthode plus générale.

2. Cherchons un couple (u, v) d'entiers rationnels tels que : $364u + 165v = 1$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que 364 et 165 sont premiers entre eux.

Écrivons les divisions successives de l'algorithme d'Euclide; on a :

$$364 = 165 \times 2 + 34;$$

$$165 = 34 \times 4 + 29;$$

$$34 = 29 \times 1 + 5;$$

$$29 = 5 \times 5 + 4;$$

$$5 = 4 \times 1 + 1.$$

En utilisant l'une après l'autre les égalités précédentes, exprimons les restes successifs 34, 29, 5, 4, 1 à l'aide des entiers 364 et 165; nous obtenons les égalités :

$$34 = 364 - 165 \times 2;$$

$$165 = (364 - 165 \times 2) \times 4 + 29; \quad 29 = 165 \times 9 - 364 \times 4;$$

$$364 - 165 \times 2 = (165 \times 9 - 364 \times 4) \times 1 + 5;$$

$$5 = 364 \times 5 - 165 \times 11;$$

$$165 \times 9 - 364 \times 4 = (364 \times 5 - 165 \times 11) \times 5 + 4;$$

$$4 = 165 \times 64 - 364 \times 29;$$

$$364 \times 5 - 165 \times 11 = (165 \times 64 - 364 \times 29) \times 1 + 1;$$

$$1 = 364 \times 34 - 165 \times 75.$$

Un couple (u, v) cherché est donc $(34, -75)$.

Généralisation des notions de pgcd et ppcm.

L'intersection et l'addition sont deux lois de composition interne associatives dans l'ensemble $\mathcal{G}$ des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Cette remarque permet de donner les définitions suivantes.

1.11 DÉFINITIONS : Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers rationnels quelconques.

On appelle pgcd de $a_1, \dots, a_n$, et on note : $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$, l'entier naturel qui engendre le sous-groupe $(a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z})$ de $(\mathbb{Z}, +)$.

On appelle ppcm de $a_1, \dots, a_n$, et on note : $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$, l'entier naturel qui engendre le sous-groupe $a_1\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_n\mathbb{Z}$.

On calcule le pgcd et le ppcm de n entiers, de proche en proche, grâce à l'associativité de chacune des opérations $+$ et $\cap$.

On a par exemple, si a, b, c sont des entiers rationnels quelconques non nuls : $\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$.

1.12 DÉFINITION : Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers rationnels quelconques non nuls.

Les entiers $a_1, \dots, a_n$ sont dits premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si on a : $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Remarque : n entiers premiers entre eux dans leur ensemble ne sont pas nécessairement premiers entre eux deux à deux.

Par exemple on a : $\text{pgcd}(2, 3, 4) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(2, 3), 4) = \text{pgcd}(1, 4) = 1$
et $\text{pgcd}(2, 4) = 2$.

Les entiers 2, 3, 4, sont premiers entre eux dans leur ensemble et les entiers 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux.

2. Nombres premiers.

Définition et recherche.

Soient a un entier rationnel non nul et D_a l'ensemble de ses diviseurs. L'ensemble D_a est non vide et contient toujours 1, $-1, a, -a$.

Ainsi, par exemple : $D_1 = \{1, -1\}$
 $D_2 = \{1, -1, 2, -2\}$
 $D_6 = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Si a est différent de 1 et de -1 , il y a donc deux cas possibles :

soit D_a est égal à $\{1, -1, a, -a\}$

soit D_a contient d'autres éléments que 1, $-1, a$ et $-a$.

2.1 DÉFINITION : Soit a un entier rationnel non nul. L'entier a est un nombre premier si et seulement si a est différent de 1 et de -1 et si l'ensemble de ses diviseurs est égal à $\{1, -1, a, -a\}$.

Remarques : 1. Dans le chapitre précédent nous avons montré l'équivalence : $\forall (a, d) \in \mathbb{Z}^2, (d \mid a) \iff (a\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z})$.

Dire que a est un nombre premier équivaut donc à la conjonction des deux propositions suivantes :

- le sous-groupe $a\mathbb{Z}$ est distinct de $\mathbb{Z}$.
 - tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$, distinct de $\mathbb{Z}$ et contenant $a\mathbb{Z}$, est égal à $a\mathbb{Z}$.
- Si ces deux propositions sont vraies, il est d'usage de dire que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe propre et maximal de $\mathbb{Z}$.
2. Si p est un nombre premier, $-p$ est aussi un nombre premier.
3. Tout entier non premier a admet au moins un diviseur b tel que : $1 < b < |a|$.

2.2 THÉORÈME : Soit a un entier rationnel quelconque non premier et distinct de 1 et de -1 .
L'entier a admet au moins un diviseur positif p premier tel que l'on ait :
 $p^2 \leq |a|$.

Démonstration :

Soit D_a l'ensemble des diviseurs de a .

L'entier $|a|$ est un diviseur de a ; il est différent de 1; l'ensemble $D_a \cap (\mathbb{Z}_+ - \{0, 1\})$ n'est donc pas vide. Soit p son plus petit élément; on a : $p > 1$.

• L'entier p est premier.

Supposons que p ne soit pas premier; il admet donc un diviseur q tel que l'on ait :
 $1 < q < p$.

On a : $(q|p \text{ et } p|a) \implies (q|a)$.

L'entier q appartient donc à $D_a \cap (\mathbb{Z}_+ - \{0, 1\})$ et est inférieur à p ; ce qui est impossible.

• L'entier p est différent de $|a|$.

Ceci résulte du fait que a n'est pas premier.

• L'entier p satisfait à l'inégalité : $p^2 \leq |a|$.

Puisque p est différent de $|a|$ et divise a , il existe un entier rationnel b différent de 1 et de -1 tel que l'on ait : $a = pb$.

L'entier b est un diviseur de a ; par définition de p , on a donc : $|b| \geq p$.

Par suite, on a : $|a| = |pb| = p|b| \geq p^2$. ■

2.3 THÉORÈME : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration :

Supposons que l'ensemble P des nombres premiers soit fini. Appelons $p_1, p_2, \dots, p_k$ ses éléments positifs et posons $P_+ = \{p_1, \dots, p_k\}$.

Considérons alors l'entier naturel n défini par : $n = (p_1 \times \dots \times p_k) + 1$.

On a : $\forall i \in \{1, \dots, k\}, n > p_i$.

(1)

Il n'y a que deux cas possibles : n est premier ou n n'est pas premier.

• Si n était un nombre premier, alors n appartiendrait à P_+ ce qui est impossible d'après (1).

• Si n n'est pas un nombre premier, d'après le théorème 2.2, il admet au moins un diviseur positif p .

L'entier p appartient à P_+ et par suite il existe un élément i de $\{1, 2, \dots, k\}$ tel que l'on ait : $p = p_i$.

Par définition de n , on a : $n \equiv 1 (p_i)$ et, par définition de p , on a : $n \equiv 0 (p_i)$.

On a donc : $0 \equiv 1 (p_i)$, ce qui est impossible.

L'ensemble P n'est donc pas fini. ■

Recherche des nombres premiers positifs.

2.4 D'après la remarque 2 du paragraphe 2.1, nous ne considérons que des entiers strictement supérieurs à 1.

Trouver tous les nombres premiers inférieurs à un entier donné.

La méthode utilisée est appelée méthode du **crible d'Eratosthène**. Soit a un entier naturel supérieur à 1. On écrit tous les entiers naturels inférieurs à a et parmi ces entiers on barre tous ceux qui ne sont pas premiers en procédant de la façon suivante.

On barre 0 et 1 qui ne sont pas premiers.

On laisse 2 qui est premier, mais on barre tous ses multiples. Le premier entier non barré est 3 qui est premier. On le laisse et on barre tous les multiples de 3; le premier multiple de 3 à barrer est 3^2 , puisque 3×2 a déjà été barré comme multiple de 2. Et ainsi de suite.

Exemple.

Nombres premiers positifs inférieurs à 100 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Reconnaître si un entier donné est un nombre premier.

Soit a un entier naturel supérieur à 1.

D'après le théorème 2.2, l'entier a est premier si tous les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à a ne sont pas des diviseurs de a .

On considère donc successivement tous les nombres premiers positifs p dont le carré est inférieur ou égal à a .

On peut disposer les calculs de la manière suivante, où r est le reste de la division euclidienne de a par p .

Exemple.

Cherchons si l'entier 313 est premier.

p	p^2	r
2	4	1
3	9	1
5	25	3
7	49	5
11	121	5
13	169	1
17	289	7
19	361	

L'entier 313 est donc premier.

Nombres premiers et divisibilité.

2.5 Il ne faut pas confondre la notion de nombre premier et de nombres premiers entre eux.

Dans ce paragraphe nous donnons quelques propriétés relatives à ces deux notions.

P1 Soient a un entier rationnel quelconque et p un nombre premier quelconque.

Alors une et une seule des deux propositions suivantes est vraie :

- $p \mid a$.
- $\text{pgcd}(a, p) = 1$.

Démonstration :

Il n'y a que deux cas possibles : p divise a ou p ne divise pas a .

Si p ne divise pas a , l'ensemble des diviseurs communs à p et à a est $\{-1, 1\}$, ce qui équivaut à : $\text{pgcd}(a, p) = 1$. ■

Remarque : En particulier le nombre premier p est premier avec tous les entiers naturels non nuls inférieurs à $|p|$.

P2 Soient p et p' deux nombres premiers quelconques. Alors une et une seule des deux propositions suivantes est vraie :

- $|p| = |p'|$.
- $\text{pgcd}(p, p') = 1$.

Démonstration :

D'après la propriété P_1 , une et une seule des deux propositions suivantes est vraie : $p \mid p'$ ou $\text{pgcd}(p, p') = 1$.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} p \mid p' \\ p \in P \end{array} \right) &\iff \left(\begin{array}{l} p \in D_{p'} \\ p \in P \end{array} \right) \\ &\implies (p = p' \text{ ou } p = -p'). \\ &\implies (|p| = |p'|). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

P3 Soient a et b deux entiers rationnels quelconques non nuls et p un nombre premier quelconque.

On a : $(p \mid ab) \implies (p \mid a \text{ ou } p \mid b)$.

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème de Gauss et de la propriété P_1 .

P4 Soient p, q, q' des nombres premiers quelconques.

On a : $(p \mid qq') \implies (|p| = |q| \text{ ou } |p| = |q'|)$.

Cette propriété est une conséquence immédiate des propriétés P_2 et P_3 .

Application à l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.6 Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2. Dans le paragraphe 3.4 du chapitre précédent, nous avons vu que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif unitaire, et que pour certaines valeurs de n , par exemple 3, cet anneau est un corps, c'est-à-dire que tout élément distinct de $\dot{0}$ est inversible. Cherchons donc dans le cas général à quelle condition l'élément $\dot{x}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ distinct de $\dot{0}$ est inversible.

L'élément $\dot{x}$ est inversible si et seulement s'il existe un élément x' de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que l'on ait : $\dot{x} \dot{\times} \dot{x}' = \dot{1}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\exists \dot{x}' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{x} \dot{\times} \dot{x}' = \dot{1}) &\iff (\exists x' \in \mathbb{Z}, xx' \equiv 1 \pmod{n}) \\ &\iff (\exists (x', k) \in \mathbb{Z}^2, xx' = 1 + kn) \\ &\iff (\exists (x', k) \in \mathbb{Z}^2, xx' + (-kn) = 1) \\ &\iff (\text{pgcd}(x, n) = 1). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

$$\forall \dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, (\exists \dot{x}' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{x} \dot{\times} \dot{x}' = \dot{1}) \iff (\text{pgcd}(x, n) = 1).$$

On a alors le théorème suivant :

2.7 THÉORÈME : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif si et seulement si n est un nombre premier.

Démonstration :

Supposons que n soit un nombre premier.

Soit $\dot{x}$ un élément quelconque de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ différent de $\dot{0}$.

Dire que $\dot{x}$ est différent de $\dot{0}$ équivaut à dire que x n'est pas un multiple de n , ou encore que n ne divise pas x .

De la propriété P_1 du paragraphe 2.5, il résulte que l'on a : $\text{pgcd}(x, n) = 1$ et par suite $\dot{x}$ est inversible.

Tout élément différent de $\dot{0}$ est donc inversible et par suite $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif.

Supposons que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ soit un corps commutatif.

Nous rappelons qu'un corps n'a pas de diviseurs de zéro : si $(E, +, \times)$ est un corps commutatif d'élément nul 0, il n'existe aucun couple (x, y) d'éléments de E qui vérifie : $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $xy = 0$.

Supposons alors que l'entier n ne soit pas premier.

Il existe donc deux entiers naturels p et q différents de 1 et de n tels que l'on ait : $pq = n$. On a alors : $\dot{p} \neq \dot{0}$ et $\dot{q} \neq \dot{0}$ et $\dot{p} \dot{\times} \dot{q} = \dot{0}$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse.

L'entier n est donc premier. ■

Décomposition en facteurs premiers.

2.8 L'objet de ce paragraphe est de donner une démonstration du résultat concernant l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel différent de 0 et de 1.

Nous allons faire cette démonstration en plusieurs étapes.

Dans ce qui suit n désigne un entier naturel différent de 0 et de 1.

n est le produit d'un nombre fini de nombres premiers positifs.

Démonstration :

Nous allons démontrer cet énoncé par récurrence.

L'énoncé est vrai pour l'entier naturel 2.

Supposons que cet énoncé soit vrai pour tout entier naturel n' tel que l'on ait :

$2 \leq n' \leq n$.

Considérons l'entier naturel $n + 1$.

Si $n + 1$ est premier, l'énoncé est vrai.

Sinon, d'après le théorème 2.2, l'entier $n + 1$ admet au moins un diviseur premier positif p . Soit q le quotient de $n + 1$ par p .

On a donc : $n + 1 = pq$ et $1 < q < n + 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, q est produit d'un nombre fini de nombres premiers positifs; il en est donc de même pour $n + 1$.

L'énoncé est donc vrai pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2. ■

Soit $p_1, \dots, p_k$ une suite d'entiers premiers positifs tels que l'on ait :

$n = p_1 p_2 \dots p_k$.

Soit $\{q_1, \dots, q_h\}$ l'ensemble des nombres premiers qui figurent dans cette suite.

On a alors : $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_h^{\alpha_h}$ où, pour tout i de $\{1, \dots, h\}$, l'entier α_i est le nombre de termes de la suite $p_1, \dots, p_k$ égaux à q_i .

L'ensemble $\{q_1, \dots, q_h\}$ est égal à l'ensemble des diviseurs premiers positifs de n .

Démonstration :

Pour tout i de $\{1, \dots, h\}$, q_i est un diviseur premier positif de n .

Réciproquement si p est un diviseur premier positif de n , d'après la propriété P_4 du paragraphe 2.5 il existe un indice i de $\{1, \dots, h\}$ tel que : $p = q_i$. ■

Les entiers $q_1, \dots, q_h$ sont déterminés de manière unique.

Pour tout indice i de $\{1, \dots, h\}$, l'entier α_i est le plus grand des entiers naturels r tels que q_i^r divise n .

Démonstration :

Puisque la multiplication des entiers est commutative, il suffit de faire la démonstration pour $i = 1$.

Il est évident que $q_1^{\alpha_1}$ divise n .

Soit maintenant r un entier naturel tel que q_1^r divise n .

Posons : $n' = q_2^{\alpha_2} \dots q_h^{\alpha_h}$; d'après la propriété P_2 du paragraphe 2.5 et la propriété P_3 du paragraphe 1.9, on a : $\text{pgcd}(q_1, n') = 1$.

L'entier q_1^r divise n et est premier avec n' ; d'après le théorème de Gauss, il divise $q_1^{\alpha_1}$ et par suite on a : $q_1^r \leq q_1^{\alpha_1}$, c'est-à-dire : $r \leq \alpha_1$. ■

Les entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ sont déterminés de manière unique.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

2.9 THÉORÈME : Soit n un entier naturel différent de 0 et de 1.

Il existe un unique sous-ensemble fini P_n de l'ensemble P des nombres premiers et une unique application α de P_n dans $\mathbb{N}^*$ telle que l'on ait :

- $n = \prod_{p \in P_n} p^{\alpha(p)}$
- P_n est l'ensemble des diviseurs premiers positifs de n .
- pour tout p de P_n , l'entier $\alpha(p)$ est le plus grand des entiers naturels r tels que p^r divise n .

Le produit $\prod_{p \in P_n} p^{\alpha(p)}$ est appelé la décomposition en facteurs premiers de n .

Compléments.

Soient n un entier naturel non nul et p un diviseur premier positif de n .

2.10 La démonstration du théorème 2.9 fait intervenir l'ensemble des entiers naturels r tels que p^r divise n .

Plus généralement, soit p un nombre premier positif quelconque et F l'ensemble des entiers naturels r tels que p^r divise n .

- L'ensemble F est non vide.
L'entier nul appartient à cet ensemble.

- L'ensemble F est majoré.
D'après le théorème 3.2 du chapitre 1, il existe un entier naturel s tel que $n < p^s$;
pour tout entier naturel r supérieur à s , on a : $n < p^s < p^r$.

- L'ensemble F admet donc un plus grand élément qui est sa borne supérieure;
posons :

$$v_p(n) = \sup \{r \in \mathbb{N} \mid p^r \mid n\}.$$

- On a alors : $\{r \in \mathbb{N} \mid p^r \mid n\} = \{r \in \mathbb{N} \mid 0 \leq r \leq v_p(n)\}$.
L'entier $p^{v_p(n)}$ divise n , et par suite, pour tout r tel que : $0 \leq r \leq v_p(n)$, l'entier p^r divise n .

- Remarquons enfin que dans le cas où n est strictement supérieur à 1, p est un diviseur premier de n si et seulement si on a : $v_p(n) > 0$.
Plus précisément $v_p(n)$ est le nombre de facteurs égaux à p dans la décomposition de n en facteurs premiers et si n est égal à 1, $v_p(n)$ est toujours nul.

Les entiers $v_p(n)$ possèdent les propriétés suivantes.

P1

$$\forall (n, n') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad (n \mid n') \iff (\forall p \in P_+, \quad v_p(n) \leq v_p(n')).$$

Démonstration :

Supposons : $n \mid n'$.

Soit p un nombre premier quelconque positif.

Par définition de $v_p(n)$ et $v_p(n')$, on a :

$$v_p(n) = \sup \{r \in \mathbb{N} \mid p^r \mid n\} \text{ et } v_p(n') = \sup \{r \in \mathbb{N} \mid p^r \mid n'\}.$$

Puisque la relation de divisibilité est transitive, on a :

$$\{r \in \mathbb{N} \mid p^r \mid n\} \subset \{r \in \mathbb{N} \mid p^r \mid n'\}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \{r \in \mathbb{N} \mid 0 \leq r \leq v_p(n)\} \subset \{r \in \mathbb{N} \mid 0 \leq r \leq v_p(n')\}.$$

$$\text{Ce qui équivaut à : } v_p(n) \leq v_p(n').$$

Supposons : $\forall p \in P_+, v_p(n) \leq v_p(n')$.

Nous avons remarqué plus haut que le nombre premier p appartient à P_n si et seulement si on a : $v_p(n) > 0$. L'hypothèse implique donc que l'on a : $P_n \subset P_{n'}$.

Soit Q le complémentaire de P_n dans $P_{n'}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } n' &= \prod_{p \in P_{n'}} p^{v_p(n')} = \prod_{p \in P_n} p^{v_p(n')} \times \prod_{p \in Q} p^{v_p(n')} \\ &= \prod_{p \in P_n} p^{v_p(n)} \times \prod_{p \in P_n} p^{v_p(n') - v_p(n)} \times \prod_{p \in Q} p^{v_p(n')} \\ &= n \times \prod_{p \in P_n} p^{v_p(n') - v_p(n)} \times \prod_{p \in Q} p^{v_p(n')} \end{aligned}$$

On a donc : $n \mid n'$. ■

P2

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \forall p \in P_+, v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n).$$

Démonstration :

La démonstration est évidente si l'un des entiers m et n est égal à 1.

Supposons donc qu'ils soient chacun différent de 1.

Soit m' (resp. n') le quotient de m (resp. n) par $p^{v_p(m)}$ (resp. $p^{v_p(n)}$).

$$\text{On a : } m = p^{v_p(m)} m' \text{ et } \text{pgcd}(p, m') = 1$$

$$n = p^{v_p(n)} n' \text{ et } \text{pgcd}(p, n') = 1.$$

$$\text{et par suite : } mn = p^{v_p(m) + v_p(n)} m' n' \text{ et } \text{pgcd}(p, m' n') = 1.$$

D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, l'entier $v_p(m) + v_p(n)$ est donc le nombre de facteurs égaux à p dans la décomposition de mn . D'où l'égalité cherchée. ■

Applications.

2.11 Toutes les applications qui suivent résultent de la propriété P_2 du paragraphe 2.10.

Recherche des diviseurs positifs d'un entier naturel.

Soit n un entier naturel quelconque différent de 0 et de 1.

Soit d un entier naturel différent de 0.

$$\text{On a : } (d \mid n) \iff (\forall p \in P_+, v_p(d) \leq v_p(n))$$

$$(d \mid n) \iff (d = \prod_{p \in P_n} p^{\beta_p} \text{ et } \forall p \in P_n, \beta_p \leq v_p(n)).$$

On en déduit immédiatement que le nombre de diviseurs positifs de n est :

$$\prod_{p \in P_n} (v_p(n) + 1).$$

Exemple.

$$n = 2^5 \times 3^2 \times 7.$$

L'entier n possède $6 \times 3 \times 2 = 36$ diviseurs positifs, parmi lesquels par exemple : $2^3 \times 3^2 \times 7^0$.

Recherche du pgcd de deux entiers naturels.

Soient a et b deux entiers naturels différents de 0 et de 1.

Le pgcd δ de a et de b est la borne supérieure de l'ensemble des diviseurs communs à a et à b .

On a donc : $\forall p \in P_+, \quad v_p(\delta) = \inf(v_p(a), v_p(b)).$

Exemple.

Soient : $a = 3^4 \times 5^2 \times 7^3$ et $b = 2 \times 3^3 \times 7^5$. On a : $\delta = 3^3 \times 7^3$.

Recherche du ppcm de deux entiers naturels.

Soient a et b deux entiers naturels différents de 0 et de 1.

Le ppcm μ de a et de b est la borne inférieure de l'ensemble des multiples communs à a et à b .

On a donc : $\forall p \in P_+, \quad v_p(\mu) = \sup(v_p(a), v_p(b)).$

Exemple.

Soient : $a = 3^4 \times 5^2 \times 7^3$ et $b = 2 \times 3^3 \times 7^5$. On a : $\mu = 2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^5$.

EXERCICES

P.G.C.D. et P.P.C.M.

- ◆ Dans les exercices suivants (nos 1 à 5), trouver le pgcd et le ppcm des couples d'entiers rationnels indiqués :

1 (588, - 165 672). *

2 (51, 438). *

3 ($n - 1$, $n + 1$) où n est un entier naturel supérieur à 1. *

4 ($n^2 + 1$, $n(n^2 - 1)$) où n est un entier naturel supérieur à 1.

5 ($n^4 - 1$, $n^6 - 1$) où n est un entier naturel supérieur à 1. *

◆ Dans les exercices suivants (n°s 6 à 15), trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels qui satisfont aux conditions indiquées (on note μ le ppcm de a et de b et δ le pgcd de ces deux entiers) :

6 $\delta = 5$ et $\mu = 8\,160$.

7 $\delta = 13$ et $\mu = 286$.

8 $\delta = 4$ et $ab = 560$.

9 $(\delta = 5)$ et $(\mu = 720)$ et $\left(\exists r \in \mathbb{Z}, r^2 = \frac{a}{b}\right)$.

10 $\mu - \delta = 77$.

11 $\mu + 11\delta = 203$. $= 7 \times 29$

12 $\mu - 2\delta = 22$.

13 $a + b = 70$ et $\delta = 7$.

14 $5a - 2b = 357$ et $\mu = 119$.

15 $a - b = 42$ et $\mu = 1\,053$.

16 Calculer en fonction du pgcd δ de deux entiers naturels a et b , le pgcd des entiers naturels a' et b' définis par : $a' = 13a + 5b$ et $b' = 5a + 2b$.

17 Même question que pour le n° 16 avec : $a' = 4a + 5b$ et $b' = 3a + 4b$.

18 Soit E l'ensemble des entiers rationnels x solutions du système :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}$$

Indiquer la forme générale des éléments de E et trouver ceux de ces éléments qui sont compris entre $(-1\,000)$ et (-500) . Quel est le pgcd de deux éléments consécutifs de E ?

19 Trouver l'entier naturel x tel que le reste de la division euclidienne de $9\,733$ (resp. $6\,425$) par x soit égal à 73 (resp. 100).

20 Trouver les entiers naturels x tels que le reste de la division euclidienne de $11\,111$ (resp. $2\,112$) par x soit égal à 100 (resp. 110).

21 Soit E l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture dans le système décimal est formée des cinq chiffres distincts $1, 2, 3, 4, 5$.

1° Quel est le nombre d'éléments de E ?

Combien d'éléments de E sont-ils divisibles par 5 ?

2° Montrer que tout élément de E est divisible par 3 mais qu'aucun n'est divisible par 9 . En déduire qu'aucun élément de E n'est le carré d'un entier naturel.

22 Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

1° Démontrer que, si x et y sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, les entiers $x + y$ et xy sont de parités différentes.

2° Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels non nuls qui vérifient : $(a + b = 84 \text{ et } \mu = \delta^2)$

où μ (resp. δ) est le ppcm (resp. pgcd) de a et de b .

(On pourra poser $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$).

- 23 Soient a et b deux entiers naturels donnés. On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} x \equiv a & (9) \\ x \equiv b & (11) \end{cases}$$

1° Démontrer que toutes les solutions de ce système sont congrues à un même nombre modulo 99. (On pourra utiliser l'identité de Bezout.)
2° Déterminer toutes les solutions de ce système.

(Baccalauréat 1972.)

annale

- 24 1° Soient a et b deux entiers naturels, premiers entre eux. Trouver un entier naturel c tel que chacun des entiers a, b, c divise le produit des deux autres.
2° Soient a et b deux entiers naturels et soit d leur pgcd. Trouver tous les entiers naturels c tels que chacun des entiers a, b, c divise le produit des deux autres.
Application : $a = 15$, $b = 12$.

- 25 Soit n un entier naturel non nul.

1° Montrer que tout diviseur commun aux nombres $5n - 3$ et $n + 1$ est un diviseur de 8.
2° En déduire que $5n - 3$ et $n + 1$ sont premiers entre eux si n est pair.
3° Déterminer l'ensemble des entiers n tels que l'on ait :
 $\text{pgcd}(5n - 3, n + 1) = 8$.

- * 26 Soit x un nombre réel. Montrer que x est rationnel si et seulement si x^7 et x^{12} sont rationnels.

Est-il nécessairement vrai que x est rationnel si x^4 et x^6 le sont ?

(Concours scolaire suédois, 1968.)

27 On pose : $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

1° Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on peut écrire : $u^n = a_n + b_n \sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n \sqrt{3}$, où a_n et b_n sont des entiers naturels.

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .

2° Établir les égalités :

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1.$$

En déduire que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux, qu'il en est de même pour les entiers a_{n+1} et a_n , puis pour les entiers b_{n+1} et b_n .

- * 28 Soit n un entier naturel supérieur à 6.

1° Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels $n + 9$ est divisible par $n - 6$.
2° Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels les entiers $n + 9$ et $n - 6$ sont premiers entre eux.

(d'après Baccalauréat 1970.)

- * 29 Soit n un entier naturel quelconque. Mêmes questions que pour le n° 28 pour les entiers naturels $n^2 + 3$ et $n + 2$.

- * 30 Soit n un entier rationnel différent de -1 .

Mêmes questions que pour le n° 28 pour les entiers rationnels $2n - 3$ et $n + 1$.

31 Pour quels entiers rationnels n , le nombre réel $\frac{n^2 - 9}{n^2 - 5n + 4}$ est-il un entier rationnel ?

- * 32 Montrer que, pour tout entier rationnel n différent de 1 et de 5, le réel $\frac{n^2 - 9}{n^2 - 6n + 5}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}^*$.

33 1° Trouver le pgcd des entiers 1 683 et 969.

2° En déduire tous les couples (x, y) d'entiers rationnels, solutions des équations respectives suivantes :

- a) $969x - 1\,683y = 51$ (on vérifiera que $(7, 4)$ est solution).
 b) $969x - 1\,683y = 102$.
 c) $969x - 1\,683y = 84$.

34 1° Déterminer les entiers naturels α et β qui ont 11 pour pgcd et 10 164 pour produit.

2° Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $77x - 132y = 44$.

$$10164 = 2^2 \times 3 \times 847$$

◆ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ chacune des équations suivantes : (nos 35 à 40)

35 $7x - 14y = 3$.

36 $5x - 10y = 15$.

37 $23x + 56y = 3$.

38 $4x = 5y + 1$.

39 $(4x - 3y - 5)(4x + 2y - 1) = 0$.

40 $x^2 - 4y^2 = 36$.

✕ 41 Soit n un entier naturel supérieur à 1.

Trouver le pgcd et le ppcm des trois entiers $n^2 - 1$, $n^3 - 1$, $n^4 - 1$

42 Soient n un entier naturel supérieur à 1 et p un entier naturel inférieur à n .

Trouver le pgcd et le ppcm des trois entiers naturels :

$$C_n^p, \quad C_{n+1}^{p+1}, \quad C_{n+1}^p.$$

43 Calculer, en fonction du pgcd δ et du ppcm μ de deux entiers naturels a et b , le pgcd et le ppcm des trois entiers a^2 , ab , b^2 .

Nombres premiers.

44 On considère les entiers n qui vérifient la condition suivante : n est le produit de trois entiers naturels premiers a , b , c ($a < b < c$) dont l'un est la somme des deux autres.

Par exemple 286 est un tel nombre : $286 = 2 \times 11 \times 13$.

1° Déterminer a ; encadrer b de sorte que, si N_1 et N_2 sont deux entiers naturels donnés ($N_1 < N_2$), on ait : $N_1 \leq n \leq N_2$.

2° On donne : $N_1 = 6 \cdot 10^4$ et $N_2 = 8 \cdot 10^4$.

Déterminer les entiers naturels n correspondants.

(Baccalauréat 1973.)

45 Soient a et b deux nombres premiers positifs donnés et soit E l'ensemble des entiers naturels qui n'admettent pas d'autres diviseurs premiers que a et b .

1° Soit n un élément de E ; démontrer que, si $n = a^\alpha b^\beta$, le nombre des diviseurs de n est $(\alpha + 1)(\beta + 1)$.

2° Soient x et y deux éléments de E tels que le nombre des diviseurs de x soit 21 et celui des diviseurs de y soit 10.

a) Donner toutes les formes possibles de décomposition de x et de y en produit de facteurs premiers.

b) Le pgcd de x et de y est 18. Déterminer les nombres x, y, a, b .

46 Soient a, b, c, d, e cinq nombres premiers, deux à deux distincts. Soient x, y, z les entiers définis par : $x = ab^2c$, $y = a^3bd$, $z = a^2b^3e$.

1° On désigne par $\circ$ et $\star$ les opérations qui consistent à prendre respectivement le pgcd et le ppcm de deux entiers. Calculer :

$$\begin{aligned} m &= y \circ z & n &= z \circ x & p &= x \circ y \\ q &= y \star z & r &= z \star x & s &= x \star y \\ t &= r \circ s, & u &= x \circ q, & v &= x \star m, & w &= p \star n. \end{aligned}$$

2° Vérifier que l'on a : $v = t$ et $w = u$.

Expliquer ce résultat.

47 1° Quel est l'ensemble des diviseurs du nombre 72 ?

2° Soit p un entier naturel; mettre l'entier rationnel $p^2 - 6p - 63$ sous la forme d'une différence de deux entiers naturels tels que l'un soit un carré parfait et l'autre ne dépende pas de p .

En déduire tous les couples (p, q) d'entiers naturels, solutions de l'équation :

$$p^2 - 6p - 63 = q^2.$$

48 Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$x^3 - y^3 = 999. \quad (\text{Concours scolaire suédois, 1965.})$$

49 1° Montrer que, pour tout entier naturel a , l'entier $a^5 - a$ est divisible par 10.

2° Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que, si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

3° Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système :

$$\begin{cases} a^5 - b^5 \equiv 0 \pmod{10} \\ a^2 - b^2 = 1\,940. \end{cases}$$

4° Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système :

$$\begin{cases} a^5 - b^5 \equiv 0 \pmod{10} \\ a^2 - b^2 = 720. \end{cases}$$

50 1° Soit n un entier naturel quelconque. Montrer que l'entier $n^4 + 4$ est le produit de deux entiers naturels qui dépendent de n .

En déduire que l'entier 5 est le seul nombre premier de la forme $n^4 + 4$.

2° Démontrer que, si n n'est pas un multiple de 5, alors $n^4 + 4$ est un multiple de 5.

51 1° Soient m et n deux entiers naturels.

Exprimer la somme $n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + m)$ en fonction de m et de n (cf. exercice n° 14 du chapitre 1).

2° Déterminer toutes les suites de $m + 1$ entiers consécutifs $n, n + 1, \dots, n + m$ dont la somme est égale à 1 000.

52 1° Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x^2(2x + 1) = 468$.

2° Peut-on trouver un entier naturel b supérieur à 1 tel que le nombre qui s'écrit $\overline{941}$ dans le système décimal s'écrit $\overline{4205}$ dans le système de numération de base b ?

* **53** 1° Montrer que tout nombre premier impair est congru à 1 ou à -1 modulo 4.
2° Soit P' l'ensemble des nombres premiers congrus à -1 modulo 4 et soient $p_1, \dots, p_k$ des éléments de P' .

Si k est pair, on considère le nombre $n = p_1 \dots p_k + 2$. Montrer que n admet un diviseur dans P' . Que peut-on en conclure ?

Adapter l'étude précédente au cas où k est impair.

En conclure que l'ensemble P' est infini.

* **54** En s'inspirant de l'exercice n° 53, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n - 1$.

55 Théorème de Wilson.

Soit n un entier naturel.

1° Montrer que, si n est non premier et différent de 4, alors n divise $(n - 1)!$

2° On suppose désormais que n est premier et on considère le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times$. Déterminer l'ensemble des éléments de ce groupe qui sont égaux à leur inverse. En déduire que $(n - 1)!$ est congru à $n - 1$ modulo n .

* **56** Théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier positif.

1° Démontrer que, pour tout entier k tel que l'on ait : $0 < k < p$, l'entier C_p^k est divisible par p .

2° Soient n entiers naturels non nuls $a_1, \dots, a_n$ et p un nombre premier positif. Démontrer que l'on a :

$$(a_1 + \dots + a_n)^p \equiv a_1^p + \dots + a_n^p \pmod{p}.$$

3° Soit n un entier naturel non nul; en écrivant $n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}$, démontrer que l'on

$$a : n^p \equiv n \pmod{p}.$$

57 Soient p un nombre premier positif et v_p l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ définie dans le paragraphe 2.10.

1° Démontrer l'inégalité :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad v_p(m + n) \geq \inf(v_p(m), v_p(n)).$$

2° On définit une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad |x|_p = p^{-v_p(x)}$$

$$|0|_p = 0.$$

Montrer que cette application possède les trois propriétés d'une valeur absolue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad (|x|_p = 0) \iff (x = 0)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \quad |xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \quad |x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

58 Soient p un nombre premier positif et v_p l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ définie dans le paragraphe 2.10.

Soient a et b deux entiers non nuls. Montrer que deux au moins des trois entiers $v_p(a)$, $v_p(b)$, $v_p(a + b)$ sont égaux.

* 59 Dans ce problème, p désigne un nombre premier positif fixé.

Si m est un entier naturel quelconque, on désigne par $\alpha_p(m)$ la somme des chiffres de l'écriture de m dans la numération de base p ; autrement dit, si l'on a :

$$m = \sum_{i=0}^k m_i p^i, \text{ avec : } \forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, 0 \leq m_i < p,$$

$$\text{on pose : } \alpha_p(m) = \sum_{i=0}^k m_i.$$

1° Démontrer que l'on a :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \alpha_p(m) + \alpha_p(n) - \alpha_p(m+n) \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

2° On pose, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels :

$$r_p(m, n) = \frac{1}{p-1} (\alpha_p(m) + \alpha_p(n) - \alpha_p(m+n)).$$

Montrer que $r_p(m, n)$ est un entier positif, égal au nombre de « retenues » qu'on effectue dans l'addition des entiers m et n écrits en base p suivant la méthode usuelle.

3° On rappelle que si n est un entier naturel non nul, $v_p(n)$ désigne l'exposant de la plus grande puissance de p qui divise n (cf. § 2.10).

Démontrer que l'on a : $\forall m \in \mathbb{N}, r_p(m, 1) = v_p(m+1)$.

4° Établir par récurrence, à l'aide des questions 2° et 3°, la proposition suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, v_p(m!) = \frac{m - \alpha_p(m)}{p-1}.$$

5° Montrer que l'on a : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, r_p(m, n) = v_p(C_{m+n}^m)$.

6° Établir la proposition : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, r_p(m, n) \leq r_p(m, m) + r_p(n, n)$.

(On procédera par récurrence sur le nombre des chiffres : on montrera que si l'inégalité est vraie pour m et n inférieurs à p^r , elle est vraie pour m et n inférieurs à p^{r+1} .)

7° Montrer que C_{m+n}^m divise $C_{2m}^m \cdot C_{2n}^n$, quels que soient les entiers m et n .

(On utilisera le critère du paragraphe 2.10.)

Note : Au concours des Olympiades des Pays de l'Est (Cracovie, 1972) une des questions posées était la suivante :

$$\text{Démontrer la proposition : } \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \frac{(2m)! (2n)!}{m! n! (m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

Le problème 59 a été bâti à partir de la seule solution de cette question connue des auteurs.

4.

Nombres réels

Suites

Nous rappelons quelques notations : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ; nous rappelons aussi les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Tous ces nombres sont bien connus du lecteur qui sait les manipuler depuis plusieurs années. Nous allons, dans ce chapitre, nous intéresser aux nombres réels.

1. Inventaire des propriétés de $\mathbb{R}$.

Conformément au programme, nous ne donnons aucune introduction axiomatique de $\mathbb{R}$; nous nous contentons d'énoncer d'abord les propriétés fondamentales, puis de démontrer les conséquences de ces dernières.

Structure de corps commutatif.

Nous admettons le théorème suivant :

1.1 THÉORÈME : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

0 et 1 sont les éléments neutres respectifs de l'addition et de la multiplication.

Propriétés.

- 1.2 Les propriétés suivantes sont des conséquences de la structure de corps commutatif. Elles sont donc vraies dans n'importe quel corps commutatif.

P1 Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, l'équation $a + x = b$ admet une solution unique, le réel $b - a$.

Cette propriété est une conséquence de la structure de groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

P2 Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, l'équation $ax = b$ admet une solution unique, le réel $\frac{b}{a}$.

Cette propriété est une conséquence de la structure de groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

P3 $\mathbb{R}$ n'a pas de diviseurs de zéro, c'est-à-dire :
 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ((ab = 0) \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)).$

Démonstration :

Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $ab = 0$.

Il n'y a que deux cas possibles : $a = 0$ ou $a \neq 0$.

- Si l'on a : $a = 0$, alors la proposition est démontrée.
- Si l'on a : $a \neq 0$, désignons alors par a' l'inverse de a .

On a : $(ab = 0) \implies (a'(ab) = 0) \implies ((a'a)b = 0) \implies (1b = 0) \implies (b = 0).$ ■

P4 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}.$

Cette formule, connue sous le nom de **formule de binôme** a été rappelée dans l'exemple 3 du paragraphe 2.5 du chapitre 1. Sa démonstration, donnée en classe de Première, fait appel uniquement à la structure d'anneau commutatif de $(\mathbb{R}, +, \times)$; cette formule est donc vraie dans n'importe quel anneau commutatif.

P5 Soient a et b deux réels quelconques. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$

Démonstration :

Démontrons cette propriété par récurrence sur n .

- On a : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$
- Soit p un entier quelconque supérieur ou égal à 2; supposons que l'on ait :

$$a^p - b^p = (a - b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1})$$

et calculons alors $a^{p+1} - b^{p+1}$.

$$\begin{aligned} a^{p+1} - b^{p+1} &= a^{p+1} - ab^p + ab^p - b^{p+1} \\ &= a(a^p - b^p) + (a - b)b^p \\ &= (a - b)(a(a^{p-1} + a^{p-2}b + \dots + ab^{p-2} + b^{p-1}) + b^p) \\ &= (a - b)(a^p + a^{p-1}b + \dots + a^2b^{p-2} + ab^{p-1} + b^p). \end{aligned}$$

- La propriété est donc vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2. ■

P6 Soient a et b deux réels quelconques. Pour tout entier impair n , supérieur ou égal à 3, on a :
 $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$

Démonstration :

Utilisons la propriété P_5 .

Puisque n est impair, on a : $(-b)^n = -b^n$ et par suite :

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= a^n - (-b)^n \\ &= (a - (-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + \dots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}). \end{aligned}$$

Les entiers $n - 2$ et $n - 1$ sont respectivement impairs et pairs.

On a donc : $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$ ■

Remarques : 1. Les propriétés P_5 et P_6 utilisent seulement la structure d'anneau commutatif de $(\mathbb{R}, +, \times)$ et sont vraies dans n'importe quel anneau commutatif.
2. Le lecteur devra bien connaître les formules qui correspondent à $n = 3$ car elles sont d'un usage courant :

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

3. Il n'y a pas de formule de ce type pour exprimer le réel $a^n + b^n$ dans le cas où n est pair.

Puissances entières d'un réel.

1.3 Nous rappelons au lecteur que, si a est un réel non nul et n un entier rationnel, la puissance $n^{\text{ième}}$ de a est le réel, noté a^n , égal à :

$$\begin{cases} \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \text{ est strictement positif} \\ 1 & \text{si } n \text{ est nul} \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{si } n \text{ est strictement négatif.} \end{cases}$$

Soient a et b deux réels non nuls quelconques, n et p deux entiers rationnels quelconques; on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a^n \times a^p &= a^{n+p} & (1) & & \frac{a^n}{a^p} &= a^{n-p} & (2) \\ (a^n)^p &= a^{np} & (3) & & & & \\ (ab)^n &= a^n b^n & (4) & & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & (5) \end{aligned}$$

Ces formules ont été démontrées dans les classes précédentes.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

1.4 **THÉORÈME :** Soit a un réel non nul.

L'ensemble A des puissances entières de a , défini par :

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{Z}, x = a^n\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

L'application φ de $\mathbb{Z}$ dans A qui, à tout entier rationnel n , associe le réel a^n est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(A, \times)$.

Démonstration :

A est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Utilisons le théorème 1.5 du chapitre 1 du tome 1.

- Il résulte de la formule (1) du paragraphe 1.3 que la loi $\times$ est interne dans A .
- De l'égalité $a^0 = 1$, il résulte que l'élément neutre de $\mathbb{R}^*$ pour la loi $\times$ appartient à A .
- Si a^n est un élément quelconque de A , son inverse $\frac{1}{a^n}$ est égal à a^{-n} et appartient à l'ensemble A .

φ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(A, \times)$.

La formule (1) du paragraphe 1.3 traduit le fait que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(A, \times)$. Cet homomorphisme est surjectif par définition de A . ■

Structure de corps commutatif totalement ordonné.

Nous avons vu, dans les classes antérieures, que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total, et nous avons admis des règles de calcul sur les inégalités, en particulier les deux propriétés suivantes à partir desquelles on déduit toutes les autres :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ((a + c \leq b + c) \implies (a \leq b))$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ((0 \leq a \text{ et } 0 \leq b) \implies (0 \leq ab)).$$

Plus généralement, soit $(E, +, \times)$ un corps commutatif dont l'élément neutre pour la loi $+$ est noté 0_E . Donc, $(E, +, \times)$ est aussi un anneau commutatif.

Supposons E muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$.

On dit que $(E, +, \times, \leq)$ est un **corps commutatif totalement ordonné** si et seulement si $(E, +, \times, \leq)$ est un anneau commutatif totalement ordonné.

De la définition 1.6 du chapitre 1 et de la commutativité des lois $+$ et $\times$, il résulte :

1.5 THÉORÈME : $(E, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((x \leq y) \implies (x + z \leq y + z)) \quad (I)$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((x \leq y \text{ et } 0_E \leq z) \implies (xz \leq yz)) \quad (II)$$

Remarques : 1. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'équivalence :

$$(\forall (x, y, z) \in E^3, ((x \leq y \text{ et } 0_E \leq z) \implies (xz \leq yz))) \\ \iff (\forall (a, b) \in E^2, ((0_E \leq a \text{ et } 0_E \leq b) \implies (0_E \leq ab)))$$

2. Un corps n'admet pas de diviseurs de zéro; on a donc aussi :

$$\forall (a, b) \in E^2, ((0_E < a \text{ et } 0_E < b) \implies (0_E < ab)).$$

Nous admettons le théorème suivant :

1.6 THÉORÈME : $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

Propriétés.

1.7 Soient a, b, c, d des réels et n un entier naturel non nul quelconques. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

$(a \geq 0) \implies ((-a) \leq 0)$	(1)
$(a \geq 0 \text{ et } b \leq 0) \implies (ab \leq 0)$	(2)
$(a \leq 0 \text{ et } b \leq 0) \implies (ab \geq 0)$	(3)
$(a \leq b \text{ et } c \geq 0) \implies (ac \leq bc)$	(4)
$(0 < a < b \text{ et } 0 < c < d) \implies (ac < bd)$	(5)
$(0 < a < b) \implies (a^n < b^n)$	(6)

Nous démontrons seulement, à titre d'exemple, la propriété (1).

Les autres démonstrations seront proposées en exercice.

Démonstration :

Soit a un réel quelconque. De la proposition (I) du théorème 1.5, il résulte :

$$(a \geq 0) \implies ((a + (-a)) \geq -a) \iff (0 \geq -a). \quad \blacksquare$$

Remarque : Reprenons l'homomorphisme surjectif φ du théorème 1.4 et démontrons que cet homomorphisme est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(A, \times)$ si et seulement si a est différent de 1 et de -1 . On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(n) = a^n$.

Cherchons les réels non nuls a pour lesquels l'application φ n'est pas injective. Soient n et p deux entiers rationnels quelconques; posons : $r = n - p$.

On a : $(a^n = a^p) \iff (a^{n-p} = 1) \iff (a^r = 1)$.

Dire que φ n'est pas injective équivaut à dire qu'il existe un entier rationnel non nul r tel que : $a^r = 1$. Cherchons donc pour quelles valeurs de a un tel entier r existe.

Soit r un entier rationnel non nul; on a : $(a^r = 1) \implies ((a^r)^2 = 1) \implies ((a^2)^r = 1)$.

Le réel a^2 est strictement positif. Il résulte de la propriété (6) du paragraphe 1.7 les implications :

$$(0 < a^2 < 1) \implies ((a^2)^r < 1^r = 1);$$

$$(1 < a^2) \implies (1^r = 1 < (a^2)^r).$$

On a donc : $((a^2)^r = 1) \implies (a^2 = 1) \implies (a = 1 \text{ ou } a = -1)$.

D'autre part, pour tout entier non nul r , on a bien : $1^r = 1$ et pour tout entier pair non nul, $(-1)^r = 1$.

Les seules valeurs de a pour lesquelles il existe un entier rationnel non nul r tel que $a^r = 1$ sont donc 1 et -1 .

Intervalles de $\mathbb{R}$.

1.8 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a \leq b$.

- Nous rappelons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} &]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} &]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} &]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} &]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels, mais des symboles qui ont été introduits en classe de Première.

- Tous ces sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont appelés des **intervalles de $\mathbb{R}$** , leur borne supérieure ou leur borne inférieure éventuelle est appelée **borne de l'intervalle** : par exemple, a et b sont les bornes de l'intervalle $[a, b[$; le réel a est la borne inférieure de l'intervalle $]a, +\infty[$.

Remarquons que l'on a : $\forall a \in \mathbb{R}, ([a, a] = \{a\} \text{ et }]a, a[= \emptyset)$.

- Un **intervalle borné** est un intervalle qui admet une borne inférieure et une borne supérieure; les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont : $[a, b],]a, b], [a, b[,]a, b[, \{a\}$.

- Un **intervalle ouvert** est un intervalle qui ne contient pas ses bornes éventuelles : les seuls intervalles ouverts sont donc : $]a, b[,]-\infty, b[,]a, +\infty[, \mathbb{R}, \emptyset$.

- On appelle l'intervalle $[a, b]$ **segment** ou **intervalle fermé borné** et les intervalles $[a, b[$ et $]a, b]$ des **intervalles semi-ouverts**.

D'une manière générale, nous donnons la définition suivante.

1.9 DÉFINITION : Un sous-ensemble quelconque I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall (a, b) \in I^2, [a, b] \subset I.$$

Nous admettons que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'une des formes décrites ci-dessus.

Valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Nous rappelons la définition de la valeur absolue d'un réel et ses propriétés qui ont été étudiées dans les classes précédentes.

1.10 DÉFINITION : On appelle valeur absolue l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto \sup(x, -x)$.

On note $|x|$ le réel $\sup(x, -x)$ et on dit que ce réel est la **valeur absolue** du réel x .

Il est immédiat que l'on a : $|x| = |-x|$.

Propriétés.

1.11 On a les propriétés suivantes :

P1

Soit x un réel quelconque. On a :

$$\begin{aligned}(x > 0) &\implies (|x| = x) \\(x = 0) &\implies (|x| = 0) \\(x < 0) &\implies (|x| = -x).\end{aligned}$$

Exemples.

1. Exprimons, en fonction du réel x , le réel $|x^2 + x + 1|$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$

et par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, |x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$.

2. Exprimons, en fonction du réel x , le réel $|x - 3| + |x - 5|$.

Le résultat est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	3		5	$+\infty$
$ x - 3 $	$3 - x$	0	$x - 3$	2	$x - 3$
$ x - 5 $	$5 - x$	2	$5 - x$	0	$x - 5$
$ x - 3 + x - 5 $	$8 - 2x$	2	2	2	$2x - 8$

P2

Soient x et y deux réels quelconques. On a :

$$(|x| = 0) \iff (x = 0)$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

inégalité triangulaire

Nous démontrons en exercice l'égalité $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ et l'égalité :

$$|x + y| \geq ||x| - |y||.$$

Distance sur $\mathbb{R}$.

Nous rappelons que l'on appelle **distance sur un ensemble** E toute application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ qui satisfait aux trois propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2, ((d(x, y) = 0) \iff (x = y)).$
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x).$
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

1.12 THÉORÈME : L'application d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient x, y, z des réels quelconques. On a :

- $(d(x, y) = 0) \iff (|x - y| = 0) \iff (x - y = 0) \iff (x = y).$
- $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x).$
- $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq d(x, y) + d(y, z).$ ■

1.13 DÉFINITION : Soient a un réel et r un réel positif quelconques.
On appelle **intervalle ouvert** (resp. **fermé**) de centre a et de rayon r l'ensemble défini par : $\{x \in \mathbb{R} \mid d(a, x) < r\}$ (resp. $\{x \in \mathbb{R} \mid d(a, x) \leq r\}$).

Avec les notations précédentes, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (d(x, a) < r) \iff (|x - a| < r) \iff (a - r < x < a + r)$$

Nombres réels et entiers rationnels.

Nous admettons le théorème suivant :

1.14 THÉORÈME : L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x.$

On dit encore que $\mathbb{R}$ est **archimédien**; on déduit de cette propriété le théorème suivant :

1.15 THÉORÈME ET DÉFINITION : Pour tout réel x , il existe un unique entier rationnel p tel que l'on ait : $p \leq x < p + 1.$
Cet entier rationnel est appelé la **partie entière** de x et est noté $E(x).$

Démonstration :

Envisageons les trois cas suivants : $x > 0, x = 0, x < 0.$

- Si x est nul, alors on a : $E(x) = 0.$
- Supposons : $x > 0.$

Il résulte du théorème 1.14 qu'il existe un entier naturel a supérieur à $x.$

Considérons l'ensemble E défini par : $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}.$

E contient 0 et est majoré par $a.$ Il résulte de la propriété P_4 du paragraphe 2.1 du chapitre 1 que E admet un plus grand élément p qui satisfait à : $p \leq x < p + 1.$

• Supposons : $x < 0$.

Posons $x' = -x$; le réel x' est strictement positif et il résulte de l'étude précédente qu'il existe un entier naturel p' tel que l'on ait : $p' \leq x' < p' + 1$.

On a donc : $-p' \geq -x' > -p' - 1$,

c'est-à-dire : $-p' - 1 < x \leq -p'$.

Si l'on a : $x = -p'$, posons $p = -p'$; on a : $p \leq x < p + 1$.

Si l'on a : $x < -p'$, posons $p = -p' - 1$; on a : $p < x < p + 1$ et par suite : $p \leq x < p + 1$. ■

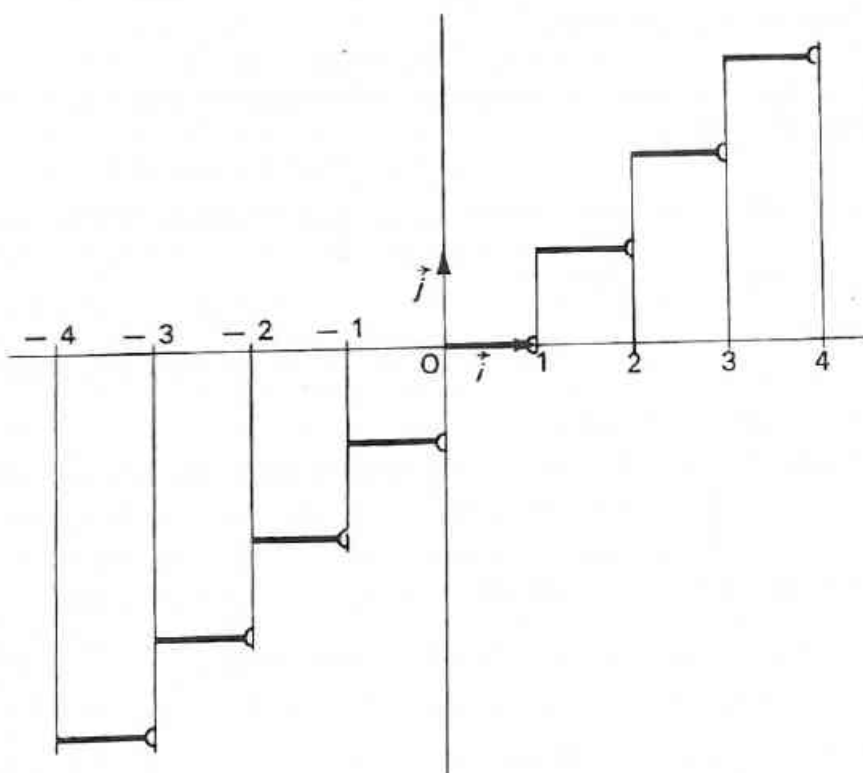
Remarques : 1. On démontre, de façon analogue, le résultat suivant :

Pour tout réel x , il existe un unique entier rationnel q tel que l'on ait :

$q < x \leq q + 1$.

2. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à x , associe $E(x)$ est une fonction en escalier.

Nous en donnons la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Nombres réels et nombres rationnels.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ bien connu du lecteur.

Nous rappelons que, pour tout rationnel r , il existe un élément (a, b) de

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que l'on ait : $r = \frac{a}{b}$.

Ce couple n'est d'ailleurs pas unique.

Propriétés.

1.16 L'ensemble $\mathbb{Q}$ possède, entre autres, les cinq propriétés suivantes :

P1 L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble propre de $\mathbb{R}$.

Démonstration : *Raisonnement par Absurde*

Montrons que le réel $\sqrt{2}$, par exemple, n'est pas un rationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel et que, par suite, il existe un élément (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que l'on ait : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On aurait alors : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, et par suite : $2q^2 = p^2$.

Désignons par α (resp. β) l'entier naturel exposant de 2 dans la décomposition de $|p|$ (resp. $|q|$) en facteurs premiers. L'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$ est $2\beta + 1$; cet exposant est égal à 2α dans la décomposition en facteurs premiers de p^2 .

De l'égalité : $2q^2 = p^2$, il résulte que l'on aurait : $2\alpha + 1 = 2\beta$.

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs sont disjoints; il y a donc impossibilité. ■

P2 L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-corps du corps commutatif $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Nous admettons cette propriété.

P3 Tout intervalle ouvert non vide $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel.

Nous admettons aussi cette propriété.

Pour traduire cette propriété P_3 , nous disons que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarques : 1. En fait, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels. Soient $]a, b[$ un tel intervalle et r_1 le rationnel qu'il contient; l'intervalle $]a, r_1[$ contient aussi au moins un rationnel r_2 et ainsi de suite.

2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$: l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[$, ouvert et non vide de $\mathbb{R}$ ne contient aucun entier rationnel.

P4 Soit a un réel quelconque. L'ensemble A des réels (resp. des rationnels) inférieurs à a n'admet pas de plus grand élément.

Démonstration :

On a : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ (resp. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$).

Supposons que A admette un plus grand élément α . On aurait alors : $\alpha < a$.

De la propriété P_3 , il résulte qu'il existerait un rationnel r tel que : $\alpha < r < a$.

Le rationnel r serait donc un élément de A , supérieur à α , ce qui est en contradiction avec la définition de α . ■

P'4 Soit a un réel quelconque. L'ensemble A des réels (resp. des rationnels) supérieurs à a n'admet pas de plus petit élément.

La démonstration de cette propriété est analogue à celle de P_4 .

Différence fondamentale entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant, que nous admettons, donne une propriété de $\mathbb{R}$ que $\mathbb{Q}$ ne possède pas.

1.17 THÉORÈME : Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).

Exemples.

1. Considérons la partie E de $\mathbb{R}$, formée des réels positifs dont le carré est inférieur ou égal à 3. On a : $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ et } x^2 \leq 3\}$.

Le réel 1 appartient à E qui n'est donc pas vide.

D'autre part, de la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R}_+, (x^2 \leq 3) \iff (x \leq \sqrt{3}))$

il résulte que $\sqrt{3}$ est un majorant de E . L'ensemble E admet donc une borne supérieure.

Le réel $\sqrt{3}$ appartient à E ; c'est donc le plus grand élément de E et, d'après la propriété P_2 du paragraphe 1.3 du chapitre 1, c'est la borne supérieure cherchée; cette borne supérieure appartient à E .

2. Considérons la partie F de $\mathbb{R}$, formée des rationnels positifs dont le carré est supérieur ou égal à 2. On a : $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ et } x^2 \geq 2\}$.

L'entier rationnel 5 appartient à F qui n'est donc pas vide.

D'autre part, de la proposition : $(\forall x \in \mathbb{Q}_+, ((x^2 \geq 2) \iff (x \geq \sqrt{2})))$,

il résulte que $\sqrt{2}$ est un minorant de F .

L'ensemble F admet donc une borne inférieure. Appelons M le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des minorants de F ; le réel $\sqrt{2}$ appartient à M , et par suite, si l'on note :

$M' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{2}\}$, on a : $M' \subset M$.

Démontrons que l'on a aussi : $M \subset M'$.

Soit y un réel, minorant quelconque de F . Supposons que l'on ait : $y > \sqrt{2}$; d'après la propriété P_3 du paragraphe 1.16, il existe un rationnel z tel que l'on ait : $y > z > \sqrt{2}$. On aurait alors : $y^2 > z^2 > 2$ et, par suite, z serait un élément de F , plus petit que y , ce qui est en contradiction avec la définition de y .

On a donc : $M = M'$ et $\sqrt{2}$ est le plus grand des minorants de F ; c'est donc la borne inférieure de F ; ce n'est pas un élément de F .

3. L'ensemble F de l'exemple précédent est aussi un sous-ensemble non vide de $\mathbb{Q}$, qui admet des minorants dans $\mathbb{Q}$, par exemple le rationnel $\frac{1}{2}$.

Cherchons si cette partie de $\mathbb{Q}$ admet, dans $\mathbb{Q}$, une borne inférieure. Nous savons, d'après l'étude précédente, que l'ensemble des minorants de F , considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est l'ensemble des réels y inférieurs ou égaux à $\sqrt{2}$. Puisque $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, l'ensemble M_1 des minorants de F , considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à $\sqrt{2}$. Il résulte de la propriété P_4 du paragraphe 1.16 que M_1 n'a pas de plus grand élément. L'ensemble F n'a donc pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.

Remarques : Nous dégageons de ces exemples les remarques suivantes :

1. Il existe des parties non vides majorées (resp. minorées) de $\mathbb{Q}$ qui n'admettent pas de borne supérieure (resp. pas de borne inférieure).

2. Toute partie E non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure (resp. borne inférieure) qui appartient ou non à E .

2. Suites.

Définitions.

2.1 • Nous rappelons qu'une **suite réelle** u est une application d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par abus de notation, on désigne souvent par $(u_n)_{n \in I}$ ou même, s'il n'y a pas de confusion possible, par (u_n) la suite u .

• La suite $(u_n)_{n \in I}$ est une **suite finie** si et seulement si l'ensemble I est une partie finie de $\mathbb{N}$.

• La suite $(u_n)_{n \in I}$ est une **suite constante** si et seulement s'il existe un réel a tel que l'on ait : $\forall n \in I, u_n = a$.

• Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont totalement ordonnés; on peut donc donner, comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle, les définitions suivantes :

La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **majorée** si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in I, u_n \leq A.$$

La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **minorée** si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\exists B \in \mathbb{R}, \forall n \in I, u_n \geq B.$$

La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **bornée** si et seulement si elle est majorée et minorée.

La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall (n, p) \in I^2, ((n < p) \implies (u_n \leq u_p))$$

$$(\text{resp. } \forall (n, p) \in I^2, ((n < p) \implies (u_n < u_p)))$$

La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall (n, p) \in I^2, ((n < p) \implies (u_n \geq u_p))$$

$$(\text{resp. } \forall (n, p) \in I^2, ((n < p) \implies (u_n > u_p))).$$

La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **monotone** si et seulement si elle est croissante ou si elle est décroissante.

Nous supposons toujours, désormais, que I est soit l'ensemble des entiers naturels compris entre deux entiers distincts a et b , soit l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à un entier naturel a .

Remarque : Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante (resp. décroissante), il suffit de montrer que la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall n \in I, u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{resp. } \forall n \in I, u_n \geq u_{n+1}).$$

Exemples.

1. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos 3n$ est majorée par 1 et minorée par -1.

2. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + 3$ est strictement croissante.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 3 + 2 = u_n + 2 > u_n.$$

Opérations sur les suites.

2.2 Comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle, on définit la somme et le produit de deux suites ainsi que le produit d'une suite par un réel.

Soient u et v deux suites quelconques définies sur une même partie I de $\mathbb{N}$ et soit λ un réel quelconque.

- La suite $u + v$ est définie par : $\forall n \in I, (u + v)_n = u_n + v_n$.
- La suite uv est définie par : $\forall n \in I, (uv)_n = u_n v_n$.
- La suite λu est définie par : $\forall n \in I, (\lambda u)_n = \lambda u_n$.

Remarque : L'addition et la multiplication munissent l'ensemble des suites définies sur I d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

L'élément nul est la suite constante définie par : $\forall n \in I, u_n = 0$.

L'élément unité est la suite constante définie par : $\forall n \in I, u_n = 1$.

L'addition et la multiplication par un réel munissent l'ensemble des suites définies sur I d'une structure d'espace vectoriel réel.

Convergence et divergence.

Dans les paragraphes 2.3 à 2.6, on s'intéresse à des suites définies sur un ensemble I constitué de tous les entiers supérieurs ou égaux à un entier a donné.

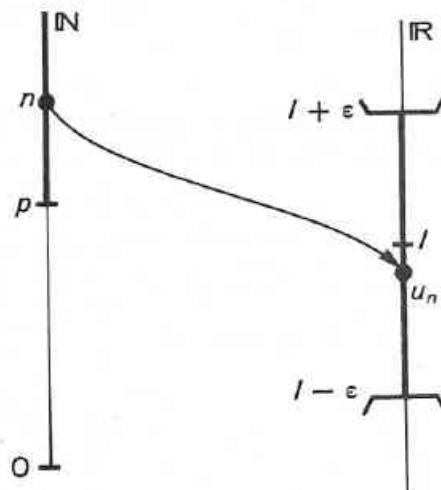
2.3 DÉFINITION : Soient $(u_n)_{n \in I}$ une suite réelle et l un réel.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ converge vers l si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in I, \forall n \in I, ((n > p) \implies (|u_n - l| < \varepsilon)).$$

On dit aussi que u_n a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$



Remarques : 1. Nous attirons l'attention du lecteur sur l'analogie entre cette définition et la définition de la limite d'une fonction numérique f d'une variable réelle en un point x_0 , donnée en classe de Première.

2. On démontre et nous admettons que, comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle, la limite d'une suite, si elle existe, est unique.

3. D'après les définitions, on a : $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0) \iff (\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0)$.

4. De l'inégalité : $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, il résulte que l'on a :

$$(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l) \implies (\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|).$$

La réciproque est fautive si l est non nul.

Convention de langage : On dit qu'une propriété est **vraie pour presque tous les entiers** si et seulement si elle est vraie pour tous les entiers sauf pour un nombre fini d'entre eux. Avec cette convention, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si, pour tout réel strictement positif ε , presque tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle de centre l et de rayon ε .

Exemples.

1. La suite (1^n) est la suite constante égale à 1. Tous ses termes sont égaux à 1 et, par suite, il est immédiat qu'elle converge vers 1. On dit aussi qu'une telle suite est **stationnaire**.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Démontrons que cette suite converge vers 1.

Soit donc ε un réel strictement positif. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - 1| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\text{et par suite : } \forall n \in \mathbb{N}^*, (|u_n - 1| < \varepsilon) \iff \left(\frac{1}{n} < \varepsilon \right) \iff \left(n > \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Il suffit donc de choisir pour p l'entier $E\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$.

Comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle, on a aussi les définitions :

2.4 DÉFINITIONS : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$** si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{I}, \forall n \in \mathbb{I}, ((n > p) \implies (u_n > A)).$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$** si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

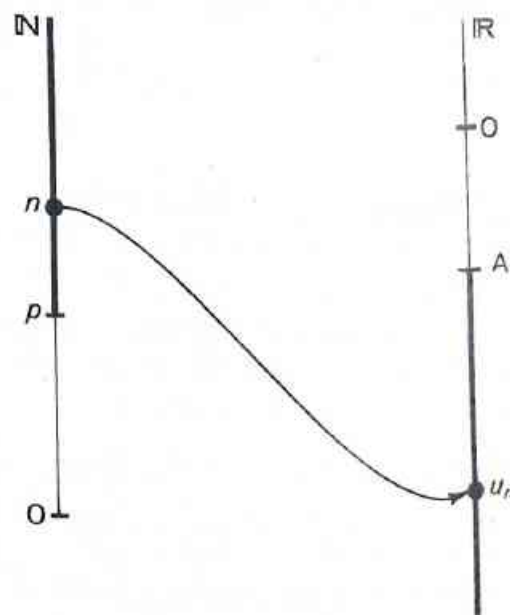
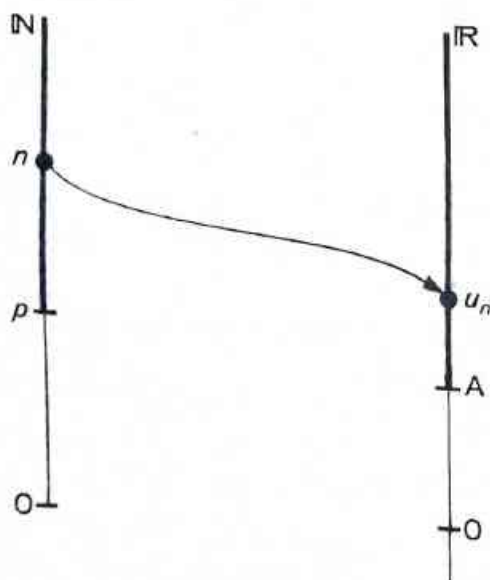
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{I}, \forall n \in \mathbb{I}, ((n > p) \implies (u_n < A)).$$

On note respectivement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$



Avec la convention de langage du paragraphe 2.3, on dit :

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout réel A , presque tous les termes de la suite sont supérieurs à A .

La suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout réel A , presque tous les termes de la suite sont inférieurs à A .

Exemples.

1. Démontrons que la suite $(2n)$ tend vers $+\infty$.

Soit donc A un réel quelconque.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, \left((2n > A) \iff \left(n > \frac{A}{2} \right) \right).$$

Il suffit donc de prendre pour p l'entier $\sup \left(1, E \left(\frac{A}{2} + 1 \right) \right)$.

2. Démontrons que la suite $(-n + 5)$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit donc A un réel quelconque.

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, \left((-n + 5 < A) \iff (n > -A + 5) \right).$$

Il suffit donc de choisir pour p le plus grand des entiers $E(-A + 5 + 1)$ et 1.

3. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la suite $(an + b)$ tend vers $+\infty$ si a est un réel strictement positif, et vers $-\infty$ si a est un réel strictement négatif.

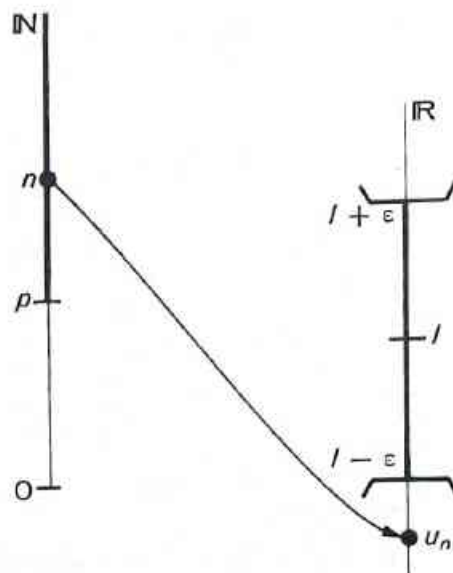
2.5 DÉFINITIONS : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement s'il existe un réel l vers lequel elle converge.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente.

Remarque : Une suite divergente est donc :

- soit une suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$;
- soit une suite qui n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire telle que :
 $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n > p \text{ et } |u_n - l| \geq \varepsilon).$



Exemples.

1. Toute suite stationnaire est convergente.

2. Il résulte de l'exemple 1 du paragraphe 2.4 que la suite (2^n) est divergente.

3. Démontrons que la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Les termes de cette suite sont alternativement égaux à 1 et à -1. Soit l un réel

quelconque. Posons :
$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{2} |l - 1| & \text{si } l \neq 1, \\ \varepsilon = 1 & \text{si } l = 1. \end{cases}$$

Considérons un entier naturel quelconque p et prenons :

$n = 2p$ si $l \neq 1$ et $n = 2p + 1$ si $l = 1$.

On a alors :

pour $l \neq 1, n > p$ et $|u_n - l| = |u_{2p} - l| = |(-1)^{2p} - l| = |1 - l| = 2\varepsilon > \varepsilon$

et pour $l = 1, n > p$ et $|u_n - l| = |u_{2p+1} - 1| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon$.

Complément.

Le théorème suivant donne un critère assez commode de convergence.

2.6 THÉORÈME : Toute suite réelle croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente.

Nous démontrons que toute suite réelle, croissante et majorée est convergente.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite réelle, croissante et majorée.

L'ensemble des valeurs de la suite est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il résulte du théorème 1.17 que cet ensemble admet une borne supérieure l . Démontrons que la suite (u_n) converge vers l .

On a d'abord : $\forall n \in \mathbb{I}, u_n \leq l$.

Soit maintenant ε un réel strictement positif quelconque.

On a : $l - \varepsilon < l$. Puisque l est le plus petit des majorants de l'ensemble des valeurs de la suite, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de cet ensemble et, par suite, il existe un entier p de $\mathbb{I}$ tel que l'on ait : $l - \varepsilon < u_p$ et donc : $l - \varepsilon < u_p \leq l$.

La suite (u_n) est croissante. On a aussi : $\forall n \in \mathbb{I}, ((n > p) \Rightarrow (u_p \leq u_n))$ et par suite : $\forall n \in \mathbb{I}, ((n > p) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq l))$.

On a donc finalement : $\forall n \in \mathbb{I}, ((n > p) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon))$. ■

Remarque : On peut démontrer que ce théorème est équivalent au théorème 1.17.

Exemples.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4n+5}{2n+3}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4n+6-1}{2n+3} = 2 - \frac{1}{2n+3}$

et par suite :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= \left(2 - \frac{1}{2(n+1)+3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2n+3}\right) \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} = \frac{2}{(2n+3)(2n+5)} > 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante.

On a d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$. La suite (u_n) est majorée, elle est donc convergente.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer qu'elle converge vers 2.

2. Soit (u_n) la suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{4 + u_{n-1}} \end{cases}$$

Les termes de cette suite sont tous positifs. On a :

$$u_1 = \sqrt{4 + u_0} = \sqrt{9} = 3, \quad u_2 = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}, \quad u_3 = \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

Étudions la différence de deux termes consécutifs.

$$\text{On a : } u_1 - u_0 = 3 - 5 = -2.$$

Démontrons par récurrence que la différence de deux termes consécutifs quelconques est négative.

Soit p un entier naturel non nul quelconque. Supposons que l'on ait : $u_p - u_{p-1} < 0$.

On a alors :

$$u_{p+1} - u_p = \sqrt{4 + u_p} - \sqrt{4 + u_{p-1}} = \frac{u_p - u_{p-1}}{\sqrt{4 + u_p} + \sqrt{4 + u_{p-1}}} < 0.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} < 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Elle est donc convergente. Le théorème 2.6 ne permet pas de calculer la limite l de la suite (u_n) , mais on démontre que cette limite l est la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$l = \sqrt{4 + l}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } (l = \sqrt{4 + l}) &\iff \left(\begin{cases} l > 0 \\ l^2 = 4 + l \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\begin{cases} l > 0 \\ l = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ ou } l = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \right) \\ &\iff \left(l = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \end{aligned}$$

Suites arithmétiques.

2.7 DÉFINITION : Soit r un réel. La suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (ou progression) arithmétique de raison r si et seulement si la différence de deux termes consécutifs quelconques de la suite est égale à r .

On a, pour tout entier n tel que n et $n + 1$ appartiennent à I : $u_{n+1} - u_n = r$.

Remarque : Si $n, n + 1, n - 1$ appartiennent à I , on a :

$$\left(\begin{cases} u_{n+1} - u_n = r \\ u_n - u_{n-1} = r \end{cases} \right) \iff \left(\begin{cases} u_n = u_{n+1} - r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases} \right) \implies \left(u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \right)$$

Chaque terme de la suite est la moyenne arithmétique des termes qui l'encadrent, ce qui justifie la dénomination : " suite arithmétique ".

Exemples.

1. La suite de tous les entiers naturels, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$ est une suite arithmétique de raison 1.
2. La suite de tous les entiers naturels impairs, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + 1$ est une suite arithmétique de raison 2.

Propriétés.

2.8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .
On a les propriétés suivantes :

P1

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Démonstration :

Démontrons cette propriété par récurrence sur n .

- La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons qu'elle soit vraie pour un entier p quelconque.

On a alors : $u_{p+1} = u_p + r = u_0 + pr + r = u_0 + (p+1)r$.

- La propriété est donc vraie pour tout entier n . ■

Remarques : 1. Il résulte de cette propriété qu'une suite arithmétique est déterminée par la donnée du premier terme u_0 et de la raison r .

2. Cette propriété équivaut en fait à la définition. En effet, si pour tout entier n , on a : $u_n = u_0 + nr$, on a alors : $u_{n+1} - u_n = u_0 + (n+1)r - u_0 - nr = r$.

P2

Toute suite arithmétique de raison strictement positive est croissante.

Toute suite arithmétique de raison strictement négative est décroissante.

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition.

P3

Soit n un entier non nul quelconque.

La somme s_n des n premiers termes de la suite est donnée par :

$$s_n = u_0 + \dots + u_{n-1} = nu_0 + n(n-1)\frac{r}{2}.$$

Démonstration :

On a : $s_n = u_0 + \dots + u_p + \dots + u_{n-1}$

et aussi : $s_n = u_{n-1} + \dots + u_{n-p-1} + \dots + u_0$.

Par addition, on obtient :

$$\begin{aligned} 2s_n &= \sum_{p=0}^{n-1} (u_p + u_{n-p-1}) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (u_0 + pr + u_0 + (n-p-1)r) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (2u_0 + (n-1)r) \\ &= 2nu_0 + n(n-1)r. \end{aligned}$$

On a donc finalement : $s_n = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2}$. ■

Exemples.

1. La somme des n premiers entiers naturels non nuls est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1. On a donc :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= n \cdot 1 + n(n-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2. La somme des n premiers entiers naturels impairs est la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1. On a donc :

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n \cdot 1 + n(n-1) = n^2.$$

Par exemple : $1 + 3 + \dots + 199 = 10\,000$.

Remarque : Nous conseillons au lecteur de ne pas retenir par cœur le résultat de la propriété P_3 , mais seulement la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

puis d'utiliser ce dernier résultat pour calculer la somme $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s_n &= u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_0 + (n-1)r) \\ &= nu_0 + (1 + r + \dots + (n-1)r) = nu_0 + \frac{n(n-1)}{2}r. \end{aligned}$$

Convergence.

2.9 THÉORÈME : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Si r est nul, la suite est constante ; elle est donc convergente.

Si r est non nul, la suite est divergente :

- si l'on a : $r > 0$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- si l'on a : $r < 0$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration :

$$\boxed{r = 0} \quad \text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0.$$

La suite est constante ; elle est donc convergente.

$$\boxed{r > 0} \quad \text{Démontrons que l'on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Il résulte de la propriété P_1 du paragraphe 2.8 que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$.

Soit A un réel quelconque. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (u_0 + nr > A) \iff (nr > A - u_0) \iff \left(n > \frac{A - u_0}{r}\right).$$

Il suffit donc de choisir pour p l'entier $\sup \left(1, E\left(\frac{A - u_0}{r} + 1\right)\right)$.

$r < 0$ Démontrons que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

On a, comme dans le cas précédent : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Soit A un réel quelconque. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (u_0 + nr < A) \iff (nr < A - u_0) \iff \left(n > \frac{A - u_0}{r}\right).$$

Il suffit encore de choisir pour p l'entier $\sup \left(1, E\left(\frac{A - u_0}{r} + 1\right)\right)$. ■

Suites géométriques.

2.10 DÉFINITION : Soit q un réel non nul. La suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite (ou progression) géométrique si et seulement si chaque terme, à partir du second est égal au produit par q de celui qui le précède.

Pour tout entier n tel que n et $n + 1$ appartiennent à I , on a : $u_{n+1} = qu_n$.

Remarque : Si $n - 1, n, n + 1$ appartiennent à I , on a :

$$\left(\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_n = qu_{n-1} \end{cases}\right) \iff \left(\begin{cases} u_n = \frac{u_{n+1}}{q} \\ u_n = q \cdot u_{n-1} \end{cases}\right) \implies (u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}).$$

Chaque terme de la suite est donc la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent, ce qui justifie la dénomination de suite géométrique.

Exemples.

1. La suite $((-1)^n)$ est une suite géométrique de raison -1 .
2. La suite (2^n) est une suite géométrique de raison 2 .

Propriétés.

2.11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .
On a les propriétés suivantes :

P1

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$$

Démonstration :

Démontrons cette propriété par récurrence sur n .

- La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons qu'elle soit vraie pour un entier p quelconque.

On a alors : $u_{p+1} = q \cdot u_p = q \cdot q^p u_0 = q^{p+1} u_0$.

- La propriété est donc vraie pour tout entier n . ■

Remarques : 1. Il résulte de cette propriété qu'une suite géométrique est déterminée par la donnée du premier terme u_0 et de la raison q .

2. Cette propriété équivaut en fait à la définition; en effet, si pour tout entier n , on a : $u_n = q^n u_0$, on a alors : $u_{n+1} = q^{n+1} u_0 = q \cdot q^n u_0 = q \cdot u_n$.

P2 Toute suite géométrique de raison strictement positive est monotone.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison strictement positive q .

Soit n un entier quelconque.

Il résulte de la propriété P_1 que l'on a :

$$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = q^n u_0 (q - 1).$$

Le réel q^n est strictement positif et $u_0(q - 1)$ a un signe constant. La différence $u_{n+1} - u_n$ a donc un signe constant. ■

P3 Soient n un entier naturel non nul quelconque et s_n la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Si $q = 1$, on a : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = nu_0$.

Si $q \neq 1$, on a : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Démonstration :

Distinguons les deux cas suivants : $q = 1$ et $q \neq 1$.

$q = 1$ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0 = u_0$ et, par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = nu_0$.

$q \neq 1$ Soit n un entier quelconque. On a : $s_n = u_0 + u_0 q + \dots + u_0 q^{n-1}$

et aussi : $qs_n = u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^n$.

Par soustraction, on obtient : $s_n(1 - q) = u_0 - u_0 q^n$.

Le réel $1 - q$ n'est pas nul; on a donc : $s_n = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$. ■

Exemple.

La somme $1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. On a donc :

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 1 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

Convergence.

Étudions d'abord la limite éventuelle de q^n quand n tend vers $+\infty$.

2.12 LEMME : Si l'on a : $|q| > 1$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = +\infty$.

Si l'on a : $0 < |q| < 1$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$.

Démonstration :

Distinguons les deux cas suivants : $|q| > 1$ et $0 < |q| < 1$.

$|q| > 1$ Il existe donc un réel h strictement positif tel que l'on ait : $|q| = 1 + h$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |q|^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \dots + h^n > nh.$$

Soit maintenant A un réel quelconque.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (nh > A) \iff \left(n > \frac{A}{h}\right)$

et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ((nh > A) \implies ((1+h)^n > A))$.

Il suffit donc de choisir pour p l'entier $\sup\left(1, E\left(\frac{A}{h} + 1\right)\right)$.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = +\infty$

$\boxed{0 < |q| < 1}$ Posons $q' = \frac{1}{q}$. On a alors $|q'| > 1$.

Soit ε un réel strictement positif quelconque. Il résulte du cas précédent, qu'il existe un entier p tel que l'on ait : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > p) \implies \left(|q'|^n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Des équivalences : $\left(|q'|^n > \frac{1}{\varepsilon}\right) \iff \left(\frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon}\right) \iff (|q|^n < \varepsilon)$ il résulte que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n > p) \implies (|q|^n < \varepsilon)$.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$. ■

Nous énonçons alors le théorème suivant :

2.13 THÉORÈME : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 non nul.

Si $q = 1$, la suite est constante et, par suite, convergente.

Si $q = -1$, la suite est divergente.

Si $|q| > 1$, la suite est divergente.

Si $0 < |q| < 1$, la suite est convergente.

Démonstration :

$\boxed{q = 1}$ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0$. La suite est constante et, par suite, convergente.

$\boxed{q = -1}$ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n u_0$.

Nous avons démontré dans l'exemple 3 du paragraphe 2.5 que la suite $(-1)^n$ est divergente. On démontre, de façon analogue, que la suite $(-1)^n u_0$ est divergente.

$\boxed{|q| > 1}$ Il résulte de l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = +\infty$ que l'on a :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. La suite (u_n) ne peut pas converger vers un réel / car alors, d'après la remarque 4 du paragraphe 2.3, la suite $|u_n|$ convergerait vers $|l|$ ce qui est impossible.

$\boxed{0 < |q| < 1}$ Il résulte de l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$ que l'on a :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$; d'après la remarque 3 du paragraphe 2.3, on a alors :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) a donc pour limite 0 et, par suite, est convergente. ■

Remarque : Si u_0 est nul, la suite géométrique est la suite nulle : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$.

2.14 THÉORÈME : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 non nul. Soit, pour un entier n quelconque, s_n la somme des n premiers termes de cette suite.

Si l'on a : $0 < |q| < 1$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{u_0}{1-q}$.

Démonstration :

Soit ε un réel strictement positif. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| s_n - \frac{u_0}{1-q} \right| = \left| -\frac{u_0 q^n}{1-q} \right| = \left| \frac{u_0}{1-q} \right| \cdot |q|^n.$$

Il résulte de l'égalité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$, qu'il existe un entier p tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > p) \implies \left(|q|^n < \frac{\varepsilon}{\left| \frac{u_0}{1-q} \right|} \right) \text{ et par suite :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > p) \implies \left(\left| \frac{u_0}{1-q} \right| |q|^n < \varepsilon \right)$$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{u_0}{1-q}$. ■

Exemple.

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

EXERCICES

Nombres réels.

1 Soient a, b, c, d des réels et n un entier naturel non nul.

Démontrer, en utilisant uniquement la structure de corps commutatif totalement ordonné de $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes, énoncées dans le paragraphe 1.7.

1° $(a \geq 0 \text{ et } b \leq 0) \implies (ab \leq 0).$

2° $(a \leq 0 \text{ et } b \leq 0) \implies (ab \geq 0).$

3° $(a \leq b \text{ et } c \geq 0) \implies (ac \leq bc).$

4° $(0 < a < b \text{ et } 0 < c < d) \implies (ac < bd).$

5° $(0 < a < b) \implies (a^n < b^n).$

6° $a^2 \geq 0.$

2 Soient a, b, c, d des réels non nuls tels que l'on ait :

$$a < b < c < d \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Comparer les réels $a + d$ et $b + c$.

- * 3 Soient a, b, c, a', b', c' des réels et m, n, p des réels non nuls. On suppose que $a', b', c', ma' + nb' + pc'$ sont non nuls. Démontrer la proposition suivante :
- $$\left(\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'}\right) \implies \left(\frac{a}{a'} < \frac{ma + nb + pc}{ma' + nb' + pc'} < \frac{c}{c'}\right).$$
- 4 Soit $(a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet de nombres réels non tous nuls dont la somme est nulle. On suppose de plus qu'il existe un entier k inférieur à n tel que l'on ait : $a_j \leq 0$ si $1 \leq j \leq k$, et $a_j > 0$ si $k < j \leq n$.
Démontrer alors l'inégalité suivante : $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n > 0$.
(Concours scolaire suédois, 1966-1967.)
- 5 Combien y a-t-il d'entiers positifs dont le carré est inférieur à 10^7 ?
(Concours scolaire suédois, 1963.)
- 6 Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.
Démontrer qu'il existe un réel strictement positif ε tel que : $a + \varepsilon < b - \varepsilon$.
- 7 Démontrer les propositions suivantes, énoncées dans le paragraphe 1.11.
- 1° $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- 2° $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \geq ||x| - |y||$.
(On pourra écrire $y = x + y - x$ et $x = x + y - y$ et appliquer deux fois l'inégalité de la propriété P_2 du paragraphe 1.11.)
- ◆ Dans les exercices suivants (nos 8 à 11), si a est un réel et r un réel non nul, on désigne par $I(a, r)$ l'intervalle ouvert de centre a et de rayon r .
- 8 Soient a et b deux réels avec : $a < b$ et soit r un réel strictement positif.
Démontrer que l'on a : $\left(r > \frac{b-a}{2}\right) \implies (I(a, r) \cap I(b, r) \neq \emptyset)$.
- 2° Démontrer que l'on a : $\left(r < \frac{b-a}{2}\right) \implies (I(a, r) \cap I(b, r) = \emptyset)$.
- 3° Que peut-on dire de $I(a, r) \cap I(b, r)$ si $r = \frac{b-a}{2}$?
- 9 Soient a et a' deux réels et r et r' deux réels strictement positifs. On désigne par $I(a, r) + I(a', r')$ l'ensemble des sommes d'un élément de $I(a, r)$ et d'un élément de $I(a', r')$.
Démontrer l'égalité : $I(a, r) + I(a', r') = I(a + a', r + r')$.
- 10 1° Soient a et a' deux réels et ε un réel strictement positif.
Démontrer qu'il existe un couple (r, r') de réels strictement positifs tels que l'on ait : $I(a, r) + I(a', r') \subset I(a + a', \varepsilon)$ (cf. exercice n° 9). Le couple (r, r') est-il unique?
- 2° Soient a, a', λ, λ' des réels et ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un couple (r, r') de réels strictement positifs tels que l'on ait :
 $\forall (x, x') \in I(a, r) \times I(a', r'), \lambda x + \lambda' x' \in I(\lambda a + \lambda' a', \varepsilon)$.
- 11 1° Soient u, v, w des réels tels que l'on ait : $u < v < w$.
Démontrer que l'on a : $|v| < \sup(w, -u)$.
- 2° Soient a et a' deux réels et ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un couple (r, r') de réels strictement positifs tels que l'on ait :
 $\forall (x, x') \in I(a, r) \times I(a', r'), xx' \in I(aa', \varepsilon)$.
- 12 Donner, suivant le réel x , l'expression du réel $\inf\{x^3 + x + 1, 1, -x^2 + 5\}$.

13* Même question que pour le n° 12 avec le réel $\sup \left(\frac{x-1}{x+1}, \frac{x+1}{x-1} \right)$.

14* Soient x et y deux réels.

1° Exprimer $E(x+y)$ en fonction de $E(x)$ et de $E(y)$.

2° Exprimer $E(x-y)$ en fonction de $E(x)$ et de $E(y)$.

15 Soient x un réel et n un entier naturel non nul.

Que peut-on dire des réels $\frac{E(nx)}{n}$ et x ?

Suites réelles.

◆ Dans les exercices suivants (n°s 16 à 27), I désigne l'ensemble des entiers naturels supérieurs à un entier naturel donné.

16* Démonstration de la remarque 2 du paragraphe 2.3 qui concerne l'unicité de la limite.

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite réelle qui converge vers le réel l .

Démontrer qu'il est impossible que $(u_n)_{n \in I}$ converge aussi vers un réel l' distinct de l . (On raisonnera par l'absurde et on utilisera la question n° 2 de l'exercice n° 8.)

17 Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite convergente, de limite l .

1° Soit ε un réel strictement positif. Montrer que presque tous les termes de la suite sont compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$ (cf. paragraphe 2.3).

2° En déduire que la suite est à la fois majorée et minorée.

18 Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ deux suites convergentes de limites respectives l et l' . On suppose que l'on a : $l < l'$.

Utiliser l'exercice n° 6 pour démontrer la proposition suivante :

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in I, (n > p) \implies (u_n < v_n)$.

19 1° Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ deux suites convergentes de limites respectives l et l' . Démontrer la proposition suivante :

$(\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in I, (n > p) \implies (u_n < v_n)) \implies (l \leq l')$.

(On démontrera qu'il est impossible d'avoir $l' < l$; on pourra utiliser l'exercice n° 18.)

2° Application : $u_n = -\frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$; démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes; calculer leurs limites; comparer u_n et v_n . Que peut-on en conclure?

3° Soient a un réel et $(u_n)_{n \in I}$ une suite convergente de limite l . Démontrer la proposition suivante : $(\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in I, (n > p) \implies (u_n < a)) \implies (l \leq a)$.

20 Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ deux suites convergentes de limites respectives l et l' .

1° Démontrer que la suite $(u_n + v_n)_{n \in I}$ est convergente et a pour limite $l + l'$.

2° Démontrer que, si λ et λ' sont deux réels quelconques, la suite $(\lambda u_n + \lambda' v_n)_{n \in I}$ est convergente et a pour limite $\lambda l + \lambda' l'$.

(On pourra, pour ces deux questions, utiliser l'exercice n° 10.)

3° Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles convergentes définies sur I . Quelles structures ce sous-ensemble de l'ensemble des suites réelles définies sur I possède-t-il? Que peut-on dire de l'application φ de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$, qui à toute suite convergente, associe sa limite?

21 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{I}}$ deux suites convergentes de limites respectives l et l' .

1° Démontrer que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est convergente et a pour limite ll' . (On pourra utiliser l'exercice n° 11.)

2° Que peut-on dire de l'ensemble S et de l'application φ définis dans l'exercice n° 20?

22 1° Soit S_0 l'ensemble des suites réelles qui convergent vers zéro. Démontrer que S_0 est un sous-groupe du groupe $(S, +)$ (cf. exercice n° 20).

2° Démontrer que la suite produit d'une suite quelconque de S_0 et d'une suite bornée est un élément de S_0 . (On pourra utiliser la 1^{re} question de l'exercice n° 11.)

23 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite à termes tous non nuls, convergente, de limite l non nulle. Démontrer que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{I}}$ est convergente et a pour limite $\frac{1}{l}$.

24 1° Soient a, b, c des réels (on suppose $a \neq 0$). Discuter suivant les réels a, b, c la limite de la suite de terme général : $u_n = an^2 + bn + c$.

2° Soient a, b, c, d des réels non nuls. Discuter, suivant les réels a, b, c, d , la limite de chacune des suites de termes généraux respectifs :

$$v_n = \frac{an + b}{cn + d}, \quad w_n = \frac{an^2 + bn + c}{dn}, \quad t_n = \frac{an}{bn^2 + cn + d}$$

25 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite convergente de limite nulle et $(v_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite telle que l'on ait, pour presque tous les entiers n , l'inégalité : $|v_n| < |u_n|$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est convergente et a pour limite zéro.

26 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite tendant vers $+\infty$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite telle que l'on ait, pour presque tous les entiers n , l'inégalité : $u_n < v_n$. Démontrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

27 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite tendant vers $-\infty$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite telle que l'on ait, pour presque tous les entiers n , l'inégalité : $v_n < u_n$. Démontrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

28 Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = n!$

(29) 1° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin n}{n}$. Démontrer que cette suite est convergente et trouver sa limite.

2° En déduire la limite de la suite dont le terme général v_n est défini par :

$$v_n = \frac{2n + \cos n}{4n + \sin n}$$

30 1° Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2° En déduire que la somme $s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

• 31 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1° Étudier la monotonie de cette suite. *croissante*

→ 2° Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n > \frac{1}{2}$.

3° En déduire que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

32 1° Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et trouver sa limite. (On pourra utiliser l'égalité : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).

2° Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ est convergente. (On pourra utiliser l'inégalité : $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ et l'exercice n° 25.) *$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$*

3° Soit α un entier supérieur à 2.

Démontrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. (On pourra utiliser l'exercice n° 25.)

33 1° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Démontrer que cette suite est croissante.

2° On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot (n!)}$.

Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3° Démontrer que l'on a : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_p \leq v_q$.

En déduire que chacune des suites (u_n) et (v_n) est convergente. On appelle l et l' leurs limites respectives. *$u_n \leq v_n \wedge u_p \leq v_n \Rightarrow (v_n) \text{ décroît et } (u_n) \text{ croît}$*

4° Démontrer que la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers zéro. En déduire l'égalité : $l = l'$.

△ Note : La limite commune l des suites (u_n) et (v_n) est le réel e défini dans le chapitre 10.

* 34 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $0 < a < b$ et λ et μ deux réels strictement positifs. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$u_1 = a, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1 + \lambda};$$

$$v_1 = b, \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1 + \mu}.$$

1° Comment doit-on choisir λ et μ pour que l'on ait : $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$?

2° On suppose que λ et μ sont ainsi choisis.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée. En déduire que ces deux suites sont convergentes.

b) Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont la même limite l .

Exprimer l en fonction de λ, μ, a, b .

* 35 Soient λ un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+1} = 3u_n^2 - 8u_n + 12. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

2° On suppose : $\lambda = 2$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

3° On suppose : $\lambda = \frac{2}{3}$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

4° Démontrer que, si λ est différent de 2 et de $\frac{2}{3}$, la suite (u_n) est croissante.

5° Démontrer que, si λ appartient à l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$, la suite (u_n) est majorée par 2. Que peut-on en conclure ?

6° Démontrer que, si λ n'appartient pas à l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$, la suite (u_n) est divergente. (On pourra majorer la différence $u_{n+1} - u_n$).

* 36 Si x est un nombre réel, on pose : $\|x\| = x - E(x)$.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que les suites $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\|y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers zéro.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou sont-elles fausses ?

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n + y_n\| = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y_n\| = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n y_n\| = 0$.

(On rappelle que, pour démontrer qu'une assertion est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.)

(D'après concours scolaire suédois 1966-1967.)

Suites arithmétiques et géométriques.

◆ Dans les exercices suivants (nos 37 à 41), on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique, par r la raison et par s_n la somme des n premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ de la suite.

37 On suppose que l'on a : $u_0 = -3$ et $u_{14} = 25$. Calculer r et s_{15} .

38 On suppose que l'on a : $u_0 = 2$, $u_{n-1} = -15$, $s_n = -117$. Calculer r et n .

39 On suppose que l'on a : $u_{n-1} = 39$, $n = 20$, $s_n = 400$. Calculer u_0 et r .

40 On suppose que l'on a : $u_0 = 6$, $r = 7$, $s_n = 41\,094$. Calculer n et u_{n-1} .

41 On suppose que l'on a : $u_{n-1} = -\frac{9}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$, $s_n = -21$. Calculer n et u_0 .

42 Les deux premiers termes d'une progression arithmétique sont -4 et 1 . Quel est le 25^e terme ? Quelle est la somme des 25 premiers termes ?

43 Le troisième et le sixième terme d'une suite arithmétique sont respectivement -4 et -1 . Quel est le premier terme de cette suite? $u_3 = -4, u_6 = -1$

44 La somme de trois réels a, b, c est 333 et la somme des carrés de ces réels est 37 205; ces trois réels sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Quels sont ces réels? $b = 111, r = 11, r = -11$

45 Cinq réels sont cinq termes consécutifs d'une progression arithmétique; ils ont pour somme 80 et pour produit 576 576. Quels sont ces nombres?

46 Soit a un réel non nul. Montrer que les réels suivants sont trois termes consécutifs d'une progression arithmétique :

$$A = (a^2 - 2a - 1)^2, B = (a^2 + 1)^2, C = (a^2 + 2a - 1)^2.$$

$$B - A = C - B$$

47 Même question que pour le n° 46 avec :

$$A = \frac{2a^2 - a + 1}{2a^2 - a}, B = \frac{2a}{2a - 1}, C = \frac{a + 1}{a}.$$

$$B - A = C - B$$

48 Montrer que si les réels a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il en est de même des réels : $(b^2 + bc + c^2), (c^2 + ca + a^2), (a^2 + ab + b^2)$

49 Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que l'on ait :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + \dots + u_{p-1} = p(ap + b).$$

1° Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

2° Calculer le premier terme et la raison de cette suite.

3° Applications numériques : $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
 $a = 1, b = 0.$

◆ Dans les exercices suivants (n°s 50 à 53), on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique, par q la raison et par s_n la somme des n premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ de la suite.

50 On suppose que l'on a : $u_0 = 1, q = 2$. Calculer u_7 et s_8 .

51. On suppose que l'on a : $u_0 = 4, u_{n-1} = \frac{1}{8}, n = 6$. Calculer q et s_n .

52 On suppose que l'on a : $u_{n-1} = 54, q = 3, n = 5$. Calculer u_0 et s_n .

53 On suppose que l'on a : $q = \frac{1}{2}, s_9 = \frac{511}{32}$. Calculer u_0 et u_8 .

54 Trois réels a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Ils ont pour somme 63 et pour produit 1 728. Quels sont ces réels?

55 Trois réels a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Ils satisfont au système : $\begin{cases} a + b + c = 312 \\ c - a = 192. \end{cases}$ $b = 9a, c = 9^2a$

Quels sont ces réels?

56 Même question que pour le n° 55, si les réels a, b, c satisfont au système :

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ a + 2b + 3c = 68. \end{cases}$$

57 Soient a, b, c trois réels qui satisfont aux conditions suivantes :

- écrits dans l'ordre a, b, c , ce sont trois termes d'une progression arithmétique;
- écrits dans l'ordre a, c, b , ce sont trois termes d'une progression géométrique;
- on a : $a + b + c = 30$.

Déterminer les réels a, b, c .

58 Soient a, b, c trois réels; peut-on trouver un réel x tels que les réels $a + x, b + x, c + x$, soient trois termes d'une suite géométrique?

Application numérique : $a = 1, b = 7, c = 31$.

* **59** Trois réels a, b, c satisfont à l'égalité :

$$(bc + ca + ab)^3 = abc(a + b + c)^3.$$

Démontrer que ces trois réels sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

60 Soient u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 cinq réels en progression géométrique.

1° Montrer que l'on a : $u_1 \cdot u_5 = (u_3)^2$.

2° Calculer ces cinq réels avec les données suivantes :

$$\begin{cases} u_3 > 0 \\ u_1 \cdot u_5 = 81 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 39. \end{cases}$$

61 Une personne a placé une somme S . A la fin de chaque année, l'intérêt de ce placement est égal à $\frac{1}{25}$ ième de la somme due à la prêteuse au début de cette même

année; cette personne peut percevoir effectivement l'intérêt ou bien le laisser placé à son tour; en fait, elle choisit cette seconde solution.

1° Quelle somme lui est-elle due à la fin de la deuxième année? de la troisième année? de la n ième année? (n entier naturel non nul).

2° Pendant combien de temps au moins lui faudra-t-il poursuivre son placement pour qu'il soit dû une somme supérieure à $2S$?

(Baccalauréat 1972.)

62 Soient a, b, c trois réels distincts qui satisfont aux propriétés suivantes :

- $a \neq 0$;
- a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique;
- $3a, 2b, c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calculer la raison de la suite géométrique.

(Baccalauréat 1971.)

63 Déterminer les couples (u_0, q) d'entiers positifs premiers entre eux tels que les termes de la suite géométrique u_0, u_1, u_2, u_3 , de raison q , vérifient l'égalité : $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$.

64 1° Soient n un entier naturel non nul et $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ sa décomposition en facteurs premiers.

Montrer que la somme s des diviseurs de n est : $s = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}$.

2° Calculer la somme des diviseurs des nombres $n = 360$ et $n' = 504$.

3° Déterminer un entier n de décomposition $a^\alpha b^\beta$ qui admet 6 diviseurs dont la somme est 228.

4° Montrer que si un entier naturel non nul n admet k diviseurs, le produit P de ces diviseurs est défini par : $P^2 = n^k$.

65 Soit N un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers est : $a^\alpha b^\beta c^\gamma$.

1° Démontrer que la somme $\sigma(N)$ des diviseurs de N est :

$$\sigma(N) = (1 + a + \dots + a^\alpha)(1 + b + \dots + b^\beta)(1 + c + \dots + c^\gamma).$$

2° N est dit parfait si et seulement si $\sigma(N) = 2N$. Démontrer que, si $2^n - 1$ est premier, alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait. (Baccalauréat 1972.)

66 On considère la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 4u_n = u_{n-1} + 12. \end{cases}$$

1° Calculer u_1, u_2, u_3 .

2° On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 4$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

3° Calculer u_n en fonction de n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

67 Mêmes questions que pour le n° 66 avec :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{15}{2}.$$

68 Mêmes questions que pour le n° 66 avec :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 3u_n = u_{n-1} + 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3.$$

69 Mêmes questions que pour le n° 66 avec :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1.$$

70 1° u_1 et a sont deux réels donnés. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + a.$$

Montrer qu'il existe un nombre réel b tel que si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - b$:

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite géométrique. $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + (a - \frac{1}{2}b) \Rightarrow a = \frac{1}{2}b$

Calculer $s_n = v_1 + \dots + v_n$ et en déduire $S_n = u_1 + \dots + u_n$ en fonction de u_1, a, n . $b = 2a$

2° w_0 et w_1 sont deux réels donnés. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2w_{n+1} - 3w_n + w_{n-1} = 0.$$

Montrer que $w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$ est indépendant de n et donner son expression en fonction de w_0 et de w_1 . En déduire la somme $w_1 + \dots + w_n$ en fonction de w_0, w_1, n .

$$w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n = \frac{2w_{n+1} - w_n}{2} = \frac{2w_n - w_{n-1}}{2} = w_n - \frac{1}{2}w_0.$$

(71) Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

1° On suppose que l'on a : $q = -\frac{1}{2}$.

Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$.

2° On suppose que la suite u n'est pas constante et satisfait à la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}). \quad \text{Démontrer que l'on a alors : } q = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = \frac{u_{n-1}(q+1) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{q^2 u_{n-1}}{2}$$

$$q_n = 1 \text{ ou } q_0 = \frac{-1}{2} \Rightarrow q_{n+1} \neq q_n \Rightarrow q_0 + 1 = 2q_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

72 Soient k un réel et u la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = ku_n.$$

1° Démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1+k)^{n+1} u_0.$$

2° Trouver les deux valeurs k_1 et k_2 de k pour lesquelles on a :

$$u_0 = 54 \text{ et } u_2 = 24.$$

3° Étudier la monotonie et la convergence de chacune des deux suites correspondant respectivement à k_1 et à k_2 .

73 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}. \end{cases}$$

1° Calculer u_1, u_2, u_3 .

2° Démontrer que cette suite est strictement croissante et majorée par 3. Que peut-on en déduire ?

3° Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$3 - u_{n+1} \leq \frac{3 - u_n}{3}.$$

En déduire la limite l de la suite.

*lim $u_n = 3$
 $n \rightarrow +\infty$*

74 On considère la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right). \end{cases}$$

1° Montrer par récurrence que cette suite est à termes strictement positifs.

2° On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{-1 + u_n}{1 + u_n}$.

Trouver une relation entre w_{n+1} et w_n . En déduire la limite de w_n , puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.

75 On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}. \end{cases}$$

1° Montrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 4.$$

2° On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 4 - v_n$.

Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} < \frac{1}{4} w_n$.

En déduire la limite de w_n , puis celle de v_n quand n tend vers $+\infty$.

76 Soient a et b deux réels strictement positifs.

1° Étudier suivant les valeurs de a et de b la convergence de la suite $(a^n + b^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2° Démontrer que la suite $\left(\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite suivant les valeurs du réel $\frac{a}{b}$.

77 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la somme : $s_n = a_0 + \frac{a_1}{2^1} + \dots + \frac{a_n}{2^n}$.

* 78 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $0 < a < b$.

On définit deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ et } v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} \text{ et } v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \end{cases}$$

1° Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

2° Démontrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.

3° Démontrer que l'on a : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_p < v_q$.

En déduire que les suites u et v sont convergentes. On appelle l et l' leurs limites respectives.

4° Démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (v_n - u_n) < \frac{1}{2} (v_{n-1} - u_{n-1}).$$

(On utilisera le fait que u est croissante.)

En déduire que la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro.

Que peut-on dire de l et de l' ?

5° Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = ab$.

En déduire l'égalité : $l = \sqrt{ab}$.

6° Application : $a = 1, b = 3$. Les suites u et v convergent vers $\sqrt{3}$. Combien faut-il calculer de termes de ces suites pour obtenir un encadrement de $\sqrt{3}$ à moins de 10^{-4} près ?

5.

Continuité

Limites

Ce chapitre reprend et complète les notions de continuité et de limite étudiées en classe de Première.

1. Continuité en un point.

Rappels.

$$\frac{f(x)}{f(x_0)} |x - x_0| = d(f, 0) < \epsilon$$

1 Nous rappelons les définitions suivantes :

- Une fonction numérique d'une variable réelle est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite de ce livre, nous dirons simplement fonction.

- Soit A une partie de $\mathbb{R}$; l'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des applications de A dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel réel et d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

- Soient x_0 un réel et r un réel strictement positif; on appelle **intervalle de centre x_0 et de rayon r** l'ensemble, noté $]x_0 - r, x_0 + r[$, des réels x tels que : $|x - x_0| < r$.

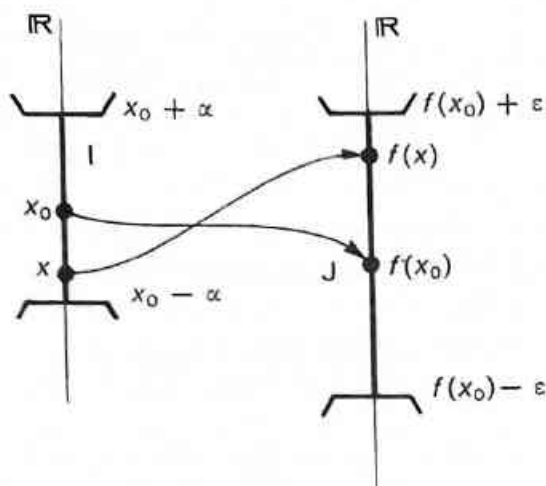
- De même, on appelle **intervalle épointé de centre x_0 et de rayon r** l'ensemble, noté $]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\}$, des réels x tels que : $0 < |x - x_0| < r$.

Fonction continue en un point.

1.2 DÉFINITION : Soient D un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$; soit x_0 un point de D .

f est continue en x_0 si et seulement si, pour tout intervalle J de centre $f(x_0)$, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$



Remarques : 1. Dire que la fonction f est continue en x_0 implique que f est définie en x_0 et sur un intervalle de centre x_0 ; la réciproque est évidemment fausse. Si f n'est pas définie en x_0 , on ne se pose pas le problème de sa continuité en ce point.

2. Si l'on note d la distance sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) = |x - y|$, la définition de la continuité en x_0 s'écrit :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, (d(x, x_0) < \alpha) \implies (d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)).$$

3. Nous attirons l'attention sur le fait suivant : pour montrer que f est continue en x_0 , on cherche à trouver un intervalle convenable de centre x_0 , c'est-à-dire, en fait, le rayon de cet intervalle. Si I_0 est un tel intervalle, de rayon α_0 , alors tout intervalle I de centre x_0 et inclus dans I_0 (c'est-à-dire de rayon inférieur à α_0) répond aussi à la question. Il n'y a donc pas unicité de I , mais il suffit de trouver un intervalle convenable pour démontrer la continuité.

Exemples.

1. Soit a un réel. La fonction constante $f: x \mapsto a$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel; on a : $f(x_0) = a$ et, par suite : $f(\mathbb{R}) = \{f(x_0)\}$.

Soit J un intervalle quelconque de centre $f(x_0)$. On a : $\{f(x_0)\} \subset J$ et par suite $f(\mathbb{R}) \subset J$. Pour tout intervalle I de centre x_0 , on a : $f(I) \subset f(\mathbb{R})$ et par suite : $f(I) \subset J$.

2. La fonction identité de $\mathbb{R}$, notée $\text{Id}_{\mathbb{R}}$, est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Soit x_0 un réel; on a $\text{Id}_{\mathbb{R}}(x_0) = x_0$. Soit J un intervalle quelconque de centre $f(x_0)$, c'est-à-dire de centre x_0 . On a : $\text{Id}_{\mathbb{R}}(J) = J$.

On peut donc choisir comme intervalle de centre x_0 l'intervalle J lui-même.

3. La fonction $f: x \mapsto |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Soit x_0 un réel; démontrons la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| < \alpha) \implies (||x| - |x_0|| < \varepsilon).$$

Il résulte du paragraphe 1.11 du chapitre 4 que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Il suffit donc de choisir pour α le réel ε ; on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| < \varepsilon) \implies (||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon).$$

On peut aussi, par exemple, choisir pour α le réel $\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \left(|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \right) &\implies (||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\implies (||x| - |x_0|| < \varepsilon). \end{aligned}$$

4. La fonction $f: x \mapsto 2x^2 - 3$ est continue en 2.

On a : $f(2) = 5$; démontrons la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - 2| < \alpha) \implies (|2x^2 - 3 - 5| < \varepsilon).$$

Soient ε un réel strictement positif et x un réel quelconque.

$$\text{On a : } |2x^2 - 3 - 5| = |2x^2 - 8| = 2|x^2 - 4| = 2|x - 2| \cdot |x + 2|.$$

Imposons la condition : $\alpha < 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } (|x - 2| < \alpha) &\implies (|x - 2| < 1) \implies (-1 < x - 2 < 1) \\ &\implies (1 < x < 3) \implies (3 < x + 2 < 5) \implies (|x + 2| < 5) \\ &\implies (2|x - 2||x + 2| < 10|x - 2|). \end{aligned}$$

Pour avoir : $2|x - 2||x + 2| < \varepsilon$, il suffit donc d'avoir : $10|x - 2| < \varepsilon$, ce qui équivaut à : $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{10}$.

On peut donc prendre pour α le réel $\inf\left(1, \frac{\varepsilon}{10}\right)$.

5. La fonction $f: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ est continue en 0.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{1\}$ et on a : $f(0) = -1$.

Démontrons donc la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, (|x| < \alpha) \implies \left(\left| \frac{x+1}{x-1} + 1 \right| < \varepsilon \right).$$

Soient ε un réel strictement positif et x un élément quelconque de $\mathbb{R} - \{1\}$. On a :

$$\left| \frac{x+1}{x-1} + 1 \right| = \left| \frac{x+1+x-1}{x-1} \right| = 2 \cdot \frac{|x|}{|x-1|}.$$

Imposons la condition : $\alpha < \frac{1}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} (|x| < \alpha) &\implies \left(|x| < \frac{1}{2} \right) \implies \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right) \implies \left(-\frac{3}{2} < x - 1 < -\frac{1}{2} \right) \\ &\implies \left(\frac{1}{2} < |x - 1| < \frac{3}{2} \right) \implies \left(\frac{2|x|}{|x-1|} < \frac{2|x|}{\frac{1}{2}} = 4|x| \right). \end{aligned}$$

Pour avoir : $\frac{2|x|}{|x-1|} < \varepsilon$, il suffit donc d'avoir : $4|x| < \varepsilon$, ce qui équivaut à :

$$|x| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On peut donc prendre pour α le réel $\inf\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Note : Imposer a priori la condition : $\alpha < 1$ ne permet pas de conclure.
On obtient en effet :

$(|x| < 1) \Rightarrow (-1 < x < 1) \Rightarrow (-2 < x - 1 < 0) \Rightarrow (0 < |x - 1| < 2)$;
il est impossible ainsi de minorer $|x - 1|$ par un réel strictement positif. On peut, par contre, imposer la condition $\alpha < \frac{1}{3}$ ou α inférieur à tout autre réel strictement positif inférieur à 1.

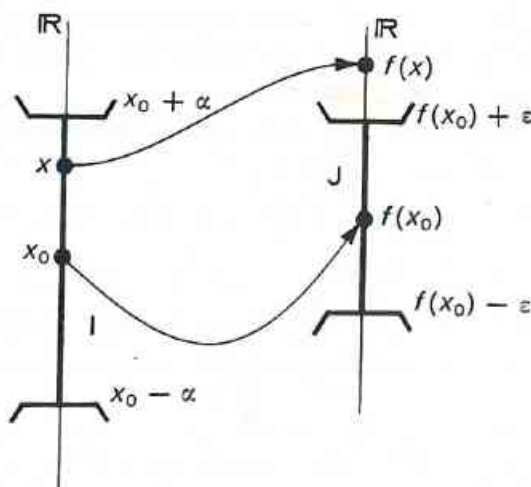
6. Nous rappelons qu'il a été démontré en classe de Première que les fonctions trigonométriques sin et cos sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

Fonction discontinue en un point.

1.3 DÉFINITION : Soient D un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$; soit x_0 un point de D .

On dit que f est discontinue en x_0 si et seulement si elle n'est pas continue en x_0 , c'est-à-dire si et seulement s'il existe un intervalle J de centre $f(x_0)$ tel que, pour tout intervalle I de centre x_0 , l'image $f(I)$ de I par f ne soit pas incluse dans J , c'est-à-dire :

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in D, (|x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$



Exemples.

1. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe sa partie entière $E(x)$ est discontinue en tout point entier.

Démontrons par exemple que cette fonction est discontinue en 1.

On a : $\forall x \in [0, 1[, E(x) = 0$ et $\forall x \in [1, 2[, E(x) = 1$ et par suite :

$f([0, 1[) = \{0\}$ et $f([1, 2[) = \{1\}$.

Choisissons pour J l'intervalle de centre $E(1) = 1$ et de rayon $\frac{1}{2}$. L'intervalle J ne contient donc pas zéro.

Soit maintenant I un intervalle quelconque de centre 1; soit α son rayon; il n'y a que deux cas possibles : $\alpha \leq 1$ ou $\alpha > 1$.

Si α est inférieur ou égal à 1, prenons $x = 1 - \frac{\alpha}{2}$; on a alors : $0 < x < 1$

et par suite $E(x) = 0$.

Si α est supérieur à 1, prenons $x = 0$; on a alors $E(x) = 0$.

Dans les deux cas, le réel x appartient à I et son image n'appartient pas à J .

L'application est donc discontinue en 1. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que cette application est continue en tout point non entier.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Démontrons que f est discontinue en 0.

On a : $f(]0, 1[) =]1, +\infty[$ et $f(]-1, 0[) =]-\infty, -1[$

et, par suite : $f(]-1, 1[) =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[$.

Choisissons pour J l'intervalle de centre $f(0) = 0$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

On a : $J =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Soit maintenant I un intervalle quelconque de centre 0; soit α son rayon; il n'y a que deux cas possibles : $\alpha \leq 1$ ou $\alpha > 1$.

Si α est inférieur ou égal à 1, prenons $x = \frac{\alpha}{2}$; on a : $f(x) = \frac{2}{\alpha} \geq 2$.

Si α est supérieur à 1, prenons $x = 1$; on a $f(x) = 1$.

Dans les deux cas, le réel x appartient à I et son image n'appartient pas à J .

L'application f est donc discontinue en 0.

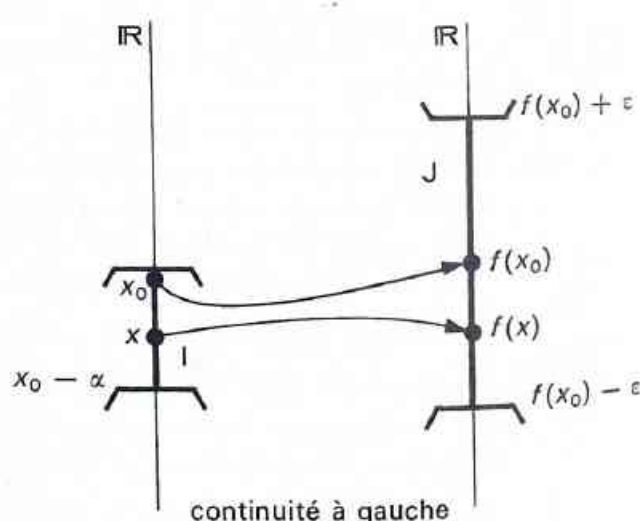
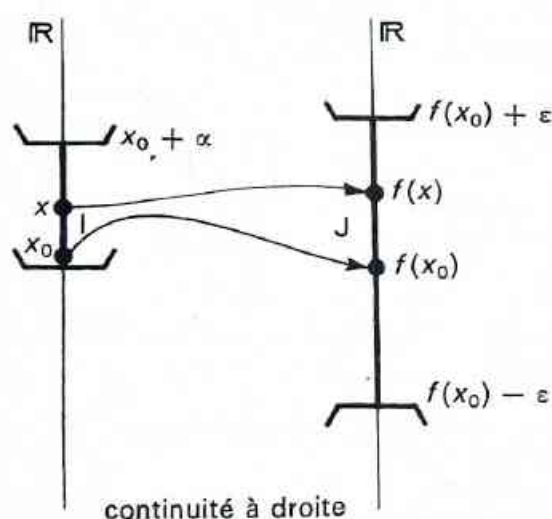
Fonction continue à droite ou à gauche en un point

1.4 DÉFINITION : Soient D un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$; soit x_0 un point de D .

On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, ((0 \leq x - x_0 < \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$
(resp.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, ((-\alpha < x - x_0 \leq 0) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$.



Remarques : 1. Si f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 , alors f est définie en x_0 et sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \alpha[$ (resp. $]x_0 - \alpha, x_0[$).
2. Il est immédiat, d'après les définitions 1.1 et 1.4, que f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0 .

Exemples.

1. Reprenons l'application étudiée dans l'exemple 1 du paragraphe 1.3 et démontrons que cette application est continue à droite en 1.

Soit donc ε un réel strictement positif. On a : $\forall x \in [1, 2[, E(x) = 1$

et par suite : $\forall x \in [1, 2[, |E(x) - E(1)| = 0 < \varepsilon$.

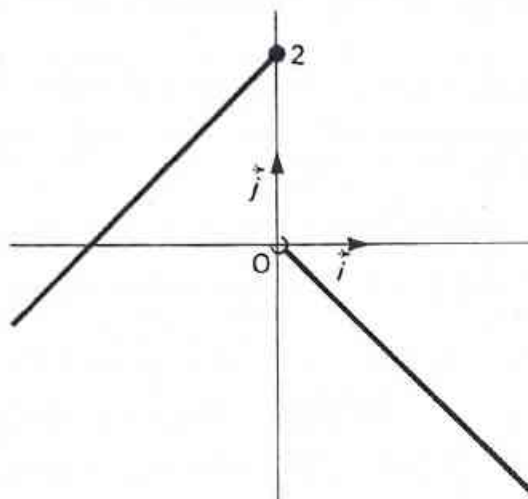
On peut donc prendre pour α le réel 1.

De façon générale, cette application est continue à droite en tout point entier, mais elle n'est continue à gauche en aucun de ces points.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0], f(x) = x + 2$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = -x.$$



Démontrons que f est continue à gauche en 0.

Soit donc ε un réel strictement positif.

On a : $f(0) = 2$ et $\forall x \in]-\infty, 0], |f(x) - f(0)| = |x + 2 - 2| = |x| = -x$.

Si x est négatif ou nul, pour avoir $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $-x < \varepsilon$, ce qui équivaut à : $-\varepsilon < x \leq 0$. On peut donc prendre pour α le réel ε .

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f n'est pas continue à droite en 0.

Opérations sur les fonctions continues en un point.

1.5 THÉORÈME : Soient x_0 et λ deux réels, f et g deux fonctions continues en x_0 .

- Les fonctions $f + g$, fg , λf sont continues en x_0 .
- Si de plus, $g(x_0)$ est non nul, la fonction $\frac{1}{g}$ et par suite la fonction $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0 .

La démonstration de ce théorème n'est pas au programme. Nous démontrons seulement que la fonction $f + g$ est continue en x_0 .

Les autres démonstrations sont proposées en exercice.

Démonstration :

Soit D un intervalle de centre x_0 sur lequel f et g sont toutes deux définies.
Démontrons la proposition suivante :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D,$

$$(|x - x_0| < \alpha) \implies (|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon).$$

Soient ε un réel strictement positif et x un élément quelconque de D .

$$\begin{aligned} \text{On a : } |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|. \end{aligned}$$

Pour avoir $|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir :

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'application f est continue en x_0 ; il existe donc un réel strictement positif α_1 tel que l'on ait :

$$\forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha_1) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

L'application g est continue en x_0 ; il existe donc un réel strictement positif α_2 tel que l'on ait :

$$\forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha_2) \implies (|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

On peut donc prendre pour α le réel $\inf(\alpha_1, \alpha_2)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} (|x - x_0| < \alpha) &\implies (|x - x_0| < \alpha_1 \quad \text{et} \quad |x - x_0| < \alpha_2) \\ &\implies (|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\implies (|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : L'application nulle et l'application identique de $\mathbb{R}$ sont continues en tout point; l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$ qui sont continues en x_0 est un sous-espace vectoriel (resp. un sous-anneau) de l'espace vectoriel (resp. de l'anneau) des applications de D dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

- Il résulte de la continuité en tout point des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto x$ que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue en tout point non nul.
- Il résulte de la continuité en tout point réel des fonctions $\sin$ et $\cos$ que la fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$ est continue en tout point où elle est définie.

1.6 COROLLAIRE : Toute fonction polynôme est continue en tout point. Toute fonction fraction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Démonstration :

- Toute fonction polynôme est la somme d'un nombre fini de fonctions du type $x \mapsto a_p x^p$ où p est un entier naturel et a_p un réel non nul. Il résulte du théorème 1.5 que, pour tout entier naturel p , la fonction $x \mapsto x^p$ est continue en tout point réel et que, par suite, pour tout réel non nul a_p , la fonction $x \mapsto a_p x^p$ est continue en tout point.

• Toute fonction fraction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes qui sont, chacune, continues en tout point. Il résulte du théorème 1.5 que toute fonction fraction rationnelle est continue pour toute valeur de x qui n'annule pas son dénominateur, c'est-à-dire pour tout élément de son ensemble de définition. ■

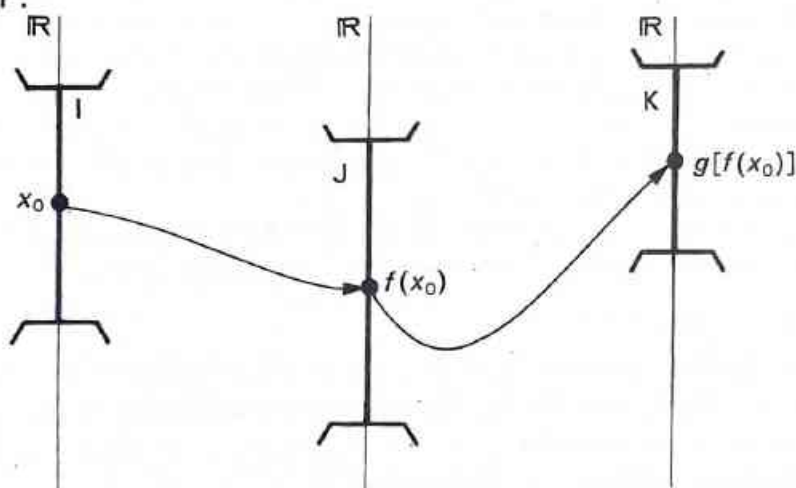
Exemples.

1. La fonction $x \mapsto 4x^3 + 2x + 1$ est continue en tout point.
2. La fonction $x \mapsto \frac{4x^3 + 2x + 1}{x - 1}$ est continue en tout point différent de 1.

Composition des fonctions continues en un point.

1.7 THÉORÈME : Soient x_0 un réel, f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Démonstration :



Démontrons que, pour tout intervalle K de centre $(g \circ f)(x_0)$, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que l'on ait : $(g \circ f)(I) \subset K$.

Soit donc K un intervalle de centre $(g \circ f)(x_0) = g[f(x_0)]$.

Puisque g est continue en $f(x_0)$, il existe un intervalle J de centre $f(x_0)$ tel que l'on ait : $g(J) \subset K$.

Puisque f est continue en x_0 , il existe un intervalle I de centre x_0 tel que : $f(I) \subset J$.

On a donc : $(g \circ f)(I) = g[f(I)] \subset g(J) \subset K$. ■

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto \sin 2x$ est la composée de la fonction $g : x \mapsto 2x$ et de la fonction $h : x \mapsto \sin x$. Il résulte de la continuité en tout point des fonctions g et h que la fonction f est continue en tout point réel.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1 + \sin^2 x}{2 - \sin x}$ est la composée de la fonction $g : x \mapsto \sin x$

et de la fonction $h : x \mapsto \frac{1 + x^2}{2 - x}$; la fonction g est continue en tout point et la fonction h en tout point différent de 2.

On a, d'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \neq 2$; la fonction f est donc continue en tout point.

2. Continuité sur un intervalle.

Définitions.

- 2.1 DÉFINITION :** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient au moins une paire de réels distincts et f une fonction dont l'ensemble de définition contient I . f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I qui n'est pas une borne, et si, de plus, le cas échéant, elle est continue à droite (resp. à gauche) en le plus petit (resp. le plus grand) élément de I .

Exemples.

1. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^4 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Reprenons l'exemple de la fonction $x \mapsto E(x)$ traité dans les exemples des paragraphes 1.3 et 1.4. Cette fonction est continue en tout point non entier et continue à droite en tout point entier. Elle est donc continue sur $[0, 1[$, sur $[1, 2[$ et, de façon générale, si n est un entier rationnel quelconque, sur $[n, n + 1[$.

On a : $f([n, n + 1[) = \{n\} = [n, n]$. L'image par f de l'intervalle $[n, n + 1[$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

D'autre part, f n'est pas continue sur $[n, n + 1]$ et l'image par f de cet intervalle est l'ensemble $\{n, n + 1\}$ qui n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x+1}$.

L'ensemble de définition D_f de f est : $\mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. Il résulte du corollaire 1.6 que f est continue en tout point de D_f ; elle est donc continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$ et, a fortiori, sur tout intervalle inclus dans ceux-ci, par exemple sur $[0, 1]$.

Calculons $f([0, 1])$. Soit x un élément quelconque de $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } (0 \leq x \leq 1) &\iff (1 \leq x + 1 \leq 2) \iff \left(\frac{2}{2} \leq \frac{2}{x+1} \leq 2\right) \\ &\iff \left(1 \leq \frac{2}{x+1} \leq 2\right). \end{aligned}$$

et par suite : $f([0, 1]) = [1, 2]$.

Nous remarquons encore que l'image par f d'un intervalle sur lequel f est continue est un intervalle.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Conformément au programme, nous admettons le théorème suivant :

- 2.2 THÉORÈME :** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient au moins une paire de réels distincts et f une fonction continue sur I . Alors l'image de I par f est un intervalle.

Exemples.

1. Soient $I =]-3, -2[$ et $f: x \mapsto -\frac{x}{2} + 1$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; a fortiori elle est continue sur I .
Déterminons $f(I)$.

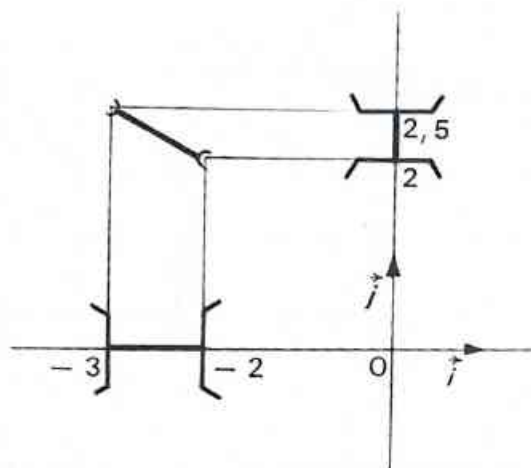
Soit x un élément quelconque de I , on a :

$$(x \in I) \iff (-3 < x < -2)$$

$$\iff \left(2 < -\frac{x}{2} + 1 < \frac{5}{2}\right) \iff \left(f(x) \in \left]2, \frac{5}{2}\right[\right).$$

$$\text{On a donc : } f(I) = \left]2, \frac{5}{2}\right[.$$

Nous remarquons que l'image par f de l'intervalle ouvert $] - 3, - 2[$ est un intervalle ouvert.



2. Soient $I =]2, 4[$ et $f: x \mapsto (x - 3)^2 + 2$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; a fortiori, elle est continue sur I .

Déterminons $f(I)$.

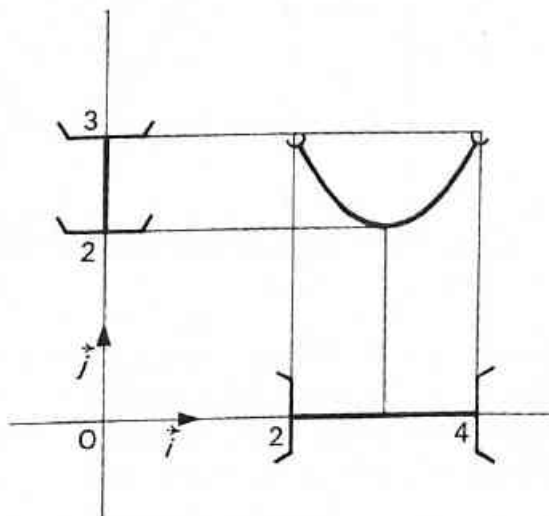
Soit x un élément quelconque de I ; on a :

$$(x \in I) \iff (2 < x < 4) \iff (-1 < x - 3 < 1)$$

$$\iff (0 \leq (x - 3)^2 < 1) \iff (f(x) \in [2, 3[).$$

$$\text{On a donc : } f(I) = [2, 3[.$$

Nous remarquons que l'image par f de l'intervalle ouvert $]2, 4[$ est un intervalle semi-ouvert.



Remarques : 1. Le théorème précédent donne une condition suffisante pour que l'image d'un intervalle par une fonction soit un intervalle. Montrons que cette condition n'est pas nécessaire.

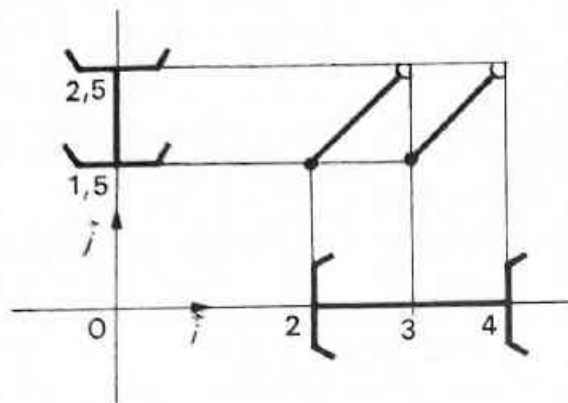
Prenons, par exemple $I = [2, 4[$ et $f: x \mapsto x - E(x) + \frac{3}{2}$.

On a : $\forall x \in [2, 3[, f(x) = x - \frac{1}{2}$ et, par suite : $f([2, 3[) = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$.

$\forall x \in [3, 4[, f(x) = x - \frac{3}{2}$ et par suite : $f([3, 4[) = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$.

On a donc $f([2, 4[) = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$.

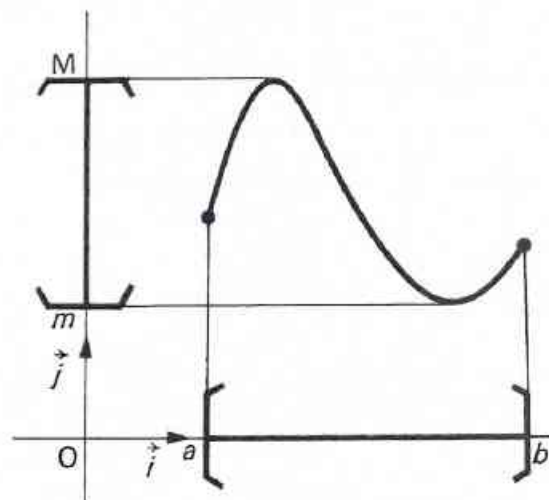
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f n'est pas continue en 3.



2. Les exemples précédents montrent que, si I est un intervalle ouvert, la nature de l'intervalle $f(I)$ n'est pas déterminée a priori.

Lorsque I est un segment, nous admettons le résultat suivant :

2.3 THÉORÈME : Soient I un segment et f une fonction continue sur I . Alors l'image de I par f est un segment.



Remarques : 1. La fonction continue f admet donc sur le segment I un minimum et un maximum absolus; ce sont les deux bornes du segment $f(I)$.

2. Le théorème précédent donne une condition suffisante pour que l'image par une fonction d'un segment soit un segment. Montrons que cette condition n'est pas nécessaire.

Prenons, par exemple : $I = [2, 4]$ et la fonction f définie par :

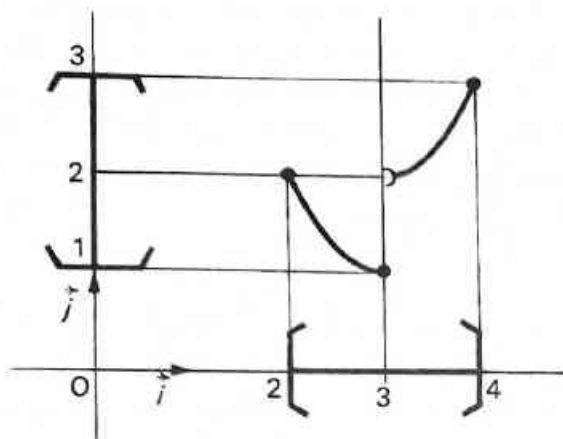
$$\begin{cases} \forall x \in [2, 3], & f(x) = (x - 3)^2 + 1, \\ \forall x \in]3, 4], & f(x) = (x - 3)^2 + 2. \end{cases}$$

On a : $f[2, 3] = [1, 2]$ et $f(]3, 4]) =]2, 3]$.

On a donc : $f([2, 4]) = [1, 2] \cup]2, 3] = [1, 3]$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la fonction f n'est pas continue en 3.

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la réunion de deux arcs de parabole.



Exemples.

Reprenons les exemples du paragraphe 2.2.

1. Soit $f: x \mapsto -\frac{x}{2} + 1$.

On a alors : $f([-3, -2]) = [2, \frac{5}{2}]$.

2. Soit $f: x \mapsto (x - 3)^2 + 2$.

On a alors : $f([2, 4]) = [2, 3]$.

2.4 COROLLAIRE : Soient I un segment et f une fonction continue sur I .

Alors il existe au moins un couple (c, d) de $I \times I$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in I, \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Démonstration :

Il résulte du théorème 2.3 que $f(I)$ est un segment $[m, M]$.

On a donc : $\forall x \in I, \quad m \leq f(x) \leq M$. D'autre part, m et M appartiennent à $f(I)$. Il existe donc au moins un couple (c, d) de $I \times I$ tel que l'on ait : $m = f(c)$ et $M = f(d)$.

On a alors : $\forall x \in I, \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. ■

Exemples.

Reprenons les exemples des paragraphes 2.2 et 2.3.

1. Soit $f: x \mapsto -\frac{x}{2} + 1$.

On a $f([-3, -2]) = [2, \frac{5}{2}]$ et :

$$\forall x \in [-3, -2], \quad f(-2) \leq f(x) \leq f(-3).$$

2. Soit $f: x \mapsto (x - 3)^2 + 2$.

On a : $f([2, 4]) = [2, 3]$ et :

$$\forall x \in [2, 4], \quad f(3) \leq f(x) \leq f(4).$$

Remarque : Si f n'est pas injective sur I , le couple (c, d) n'est pas nécessairement unique. Dans l'exemple 2 traité ci-dessus, la fonction $f: x \mapsto (x-3)^2 + 2$ n'est pas injective. On a aussi : $\forall x \in [2,4], f(3) \leq f(x) \leq f(2)$.

2.5 COROLLAIRE : Soient a et b deux réels distincts et f une fonction continue sur $[a, b]$, telle que l'on ait : $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que l'on ait : $f(c) = 0$.

Démonstration :

Il résulte du théorème 2.3 que $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$. Les réels $f(a)$ et $f(b)$, qui sont de signes contraires, appartiennent à cet intervalle. On a donc nécessairement : $m < 0$ et $M > 0$. Le réel 0 appartient à $[m, M] = f([a, b])$ et par suite, il existe un réel c de $[a, b]$ tel que l'on ait : $f(c) = 0$. Les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls par hypothèse. Le point c est donc distinct de a et de b ; il appartient à $]a, b[$. ■

Exemple.

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$.

L'étude du sens de variation de la fonction $f: x \mapsto x^3 + x + 1$ permet de démontrer que l'équation (1) admet une solution unique. Cherchons une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution x_0 .

On a : $f(-1) = -1 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$ et, par suite : $-1 < x_0 < 0$

$f(-0,7) = -\frac{43}{1000} < 0$ et $f(-0,6) = \frac{184}{1000} > 0$ et, par suite : $-0,7 < x_0 < -0,6$

$f(-0,69) = -\frac{18509}{10^6} < 0$ et $f(-0,68) = \frac{5568}{10^6}$ et, par suite :

$$-0,69 < x_0 < -0,68$$

3. Limites.

Notion de limite.

Cette notion généralise la notion de continuité.

Définition.

3.1 DÉFINITION : Soient x_0 et l deux réels et f une fonction dont l'ensemble de définition D_f contient un intervalle épointé de centre x_0 .

On dit que f admet pour limite en x_0 le réel l (ou encore que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0) si et seulement si, pour tout intervalle J de centre l , il existe un intervalle épointé I de centre x_0 tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

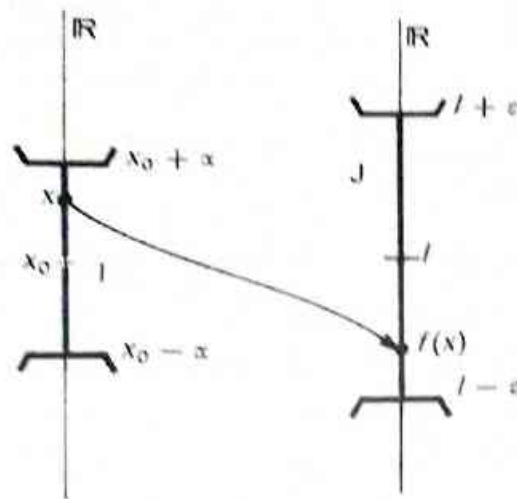
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, ((0 < |x - x_0| < \alpha) \implies (|f(x) - l| < \varepsilon)).$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



Remarque : Cette définition ne précise pas si f est définie ou non en x_0 .
Si f est définie en x_0 , la valeur de la limite ne dépend pas de la valeur de $f(x_0)$.

Exemples.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x^2}{|x|} \right) \text{ et } (f(0) = 1).$$

Démontrons que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, ((0 < |x| < \alpha) \implies (|f(x)| < \varepsilon)).$$

Soient ε un réel strictement positif et x un réel quelconque non nul.

$$\text{On a : } |f(x)| = \left| \frac{x^2}{|x|} \right| = \frac{|x|^2}{|x|} = |x|.$$

Pour avoir : $|f(x)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir : $0 < |x| < \varepsilon$.

On peut donc prendre pour α le réel ε .

Remarquons que la limite de f en 0 n'est pas égale à $f(0)$.

$$2. \text{ Soit la fonction } f: x \mapsto \frac{(2x+1)(x+3)}{(x+3)}.$$

L'ensemble de définition D_f de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Démontrons que l'on a : $\lim_{x \rightarrow -3} f = -5$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, ((0 < |x+3| < \alpha) \implies (|f(x) + 5| < \varepsilon)).$$

Soient ε un réel strictement positif et x un réel quelconque différent de -3 . On a alors : $f(x) = 2x+1$ et par suite : $|f(x) + 5| = |2x+1+5| = 2|x+3|$.

Pour avoir $|f(x) + 5| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $0 < 2|x+3| < \varepsilon$ ce qui équivaut à :

$$0 < |x+3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut donc prendre pour α le réel $\frac{\varepsilon}{2}$.

Remarquons que la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2x+1$ coïncide avec f sur $\mathbb{R} - \{-3\}$, est continue en -3 et satisfait à : $g(-3) = -5$.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$.

L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}^*$.

Démontrons que cette fonction n'a pas de limite en zéro.

Démontrons donc que, pour tout réel l , il existe un intervalle J de centre l tel que, pour tout intervalle épointé I de centre 0, l'image $f(I)$ de I par f ne soit pas incluse dans J .

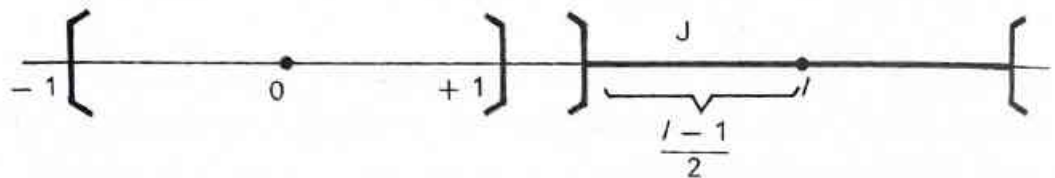
Envisageons les trois cas : $|l| > 1$, $|l| < 1$, $|l| = 1$ et remarquons que l'on a : $f(\mathbb{R}^*) = [-1, 1]$.

• $|l| > 1$.

Il existe alors un intervalle J de centre l tel que l'on ait : $J \cap [-1, 1] = \emptyset$, par exemple, l'intervalle de rayon $\frac{|l| - 1}{2}$.

Pour tout intervalle épointé I de centre 0, on a alors :

$f(I) \subset [-1, 1]$ et par suite $f(I) \not\subset J$.



• $|l| < 1$.

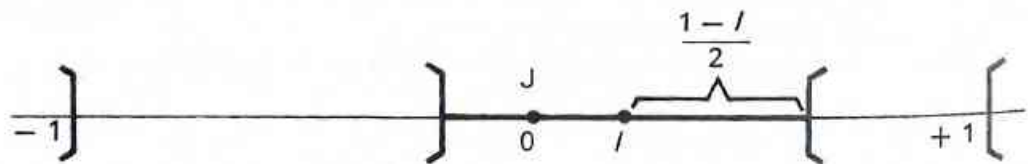
Il existe alors un intervalle J de centre l qui ne contient pas 1, par exemple, l'intervalle de rayon $\frac{1 - |l|}{2}$. Soit alors I un intervalle épointé quelconque de centre 0;

soit α son rayon. Il existe un entier naturel n tel que l'on ait : $\frac{\pi}{2} + 2n\pi > \frac{1}{\alpha}$.

Posons $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Le réel x satisfait à : $0 < x < \alpha$ et appartient donc à I .

On a d'autre part : $f(x) = \sin \frac{1}{x} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1$.

L'image par f de x n'appartient pas à J et on a donc : $f(I) \not\subset J$.



• $|l| = 1$.

Il existe un intervalle J de centre l qui ne contient pas 0, par exemple, l'intervalle de rayon $\frac{1}{2}$. Soit alors I un intervalle épointé quelconque de centre 0; soit α son

rayon. Il existe un entier naturel n tel que l'on ait : $2n\pi > \frac{1}{\alpha}$.

Posons $x = \frac{1}{2n\pi}$.

Le réel x satisfait à : $0 < x < \alpha$ et appartient donc à I .

On a d'autre part : $f(x) = \sin \frac{1}{x} = \sin (2n\pi) = 0$; l'image par f de x n'appartient pas à J et on a donc : $f(I) \not\subset J$.

Propriétés.

3.2 Dans ce paragraphe, nous désignons par x_0 un réel et par f une fonction dont l'ensemble de définition D_f contient un intervalle épointé de centre x_0 .

P1 Si f admet une limite en x_0 , alors cette limite est unique.

Nous proposons la démonstration de cette propriété en exercice.

P2 Si f est continue en x_0 , alors on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$.

Démonstration :

Si f est continue en x_0 , on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x - x_0| < \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

et par suite :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (0 < |x - x_0| < \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

ce qui équivaut à : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$. ■

Remarque : La propriété P_2 permet de calculer les limites en un point de toutes les fonctions continues en ce point.

Par exemple, on a, de façon immédiate :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) = 2^2 + 2 + 1 = 7.$$

P3 Si f est définie en x_0 et admet $f(x_0)$ pour limite en ce point, alors f est continue en x_0 .

Démonstration :

Dire que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$ équivaut à :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (0 < |x - x_0| < \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

On a de plus : $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, et par suite :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x - x_0| < \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

ce qui équivaut à dire que f est continue en x_0 . ■

P4 Si f admet pour limite en x_0 le réel non nul l , alors il existe un intervalle épointé I de centre x_0 tel que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) \cdot l > 0$.

Démonstration :

Soit J l'intervalle de centre l et de rayon le réel strictement positif $\frac{|l|}{2}$. Il existe donc un intervalle épointé I de centre x_0 tel que l'on ait : $f(I) \subset J$.

On a, d'autre part :

$$\begin{aligned} (f(I) \subset J) &\iff (\forall x \in I, f(x) \in J) \iff \left(\forall x \in I, |f(x) - l| < \frac{|l|}{2} \right) \\ &\iff \left(\forall x \in I, l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2} \right). \end{aligned}$$

Il n'y a que deux cas possibles : $l > 0$ ou $l < 0$

• $l > 0$.

On a : $\frac{|l|}{2} = \frac{l}{2}$ et par suite :

$$\left(\forall x \in I, l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2} \right) \iff \left(\forall x \in I, \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2} \right).$$

Pour tout x de I , le réel $f(x)$ est donc positif et on a : $f(x) \cdot l > 0$.

• $l < 0$.

On a : $\frac{|l|}{2} = -\frac{l}{2}$ et par suite :

$$\left(\forall x \in I, l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2} \right) \iff \left(\forall x \in I, \frac{3l}{2} < f(x) < \frac{l}{2} \right).$$

Pour tout x de I , le réel $f(x)$ est donc négatif et on a : $f(x) \cdot l > 0$. ■

Prolongement par continuité.

Nous rappelons la définition suivante : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que l'on ait : $A \subset B$. Soient f une application de A dans $\mathbb{R}$ et g une application de B dans $\mathbb{R}$.

On dit que g est un **prolongement de f sur B** si et seulement si g coïncide avec f sur A , c'est-à-dire si et seulement si on a : $\forall x \in A, g(x) = f(x)$.

3.3 THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient x_0 et l deux réels, D un intervalle épointé de centre x_0 et f une fonction définie sur D et qui admet pour limite en x_0 le réel l .

Alors le prolongement g de f sur $D \cup \{x_0\}$ tel que l'on ait : $g(x_0) = l$ est l'unique prolongement de f sur $D \cup \{x_0\}$ qui soit une fonction continue en x_0 .

On dit que g est le **prolongement par continuité de f en x_0** .

Démonstration :

Pour déterminer un prolongement g de f sur $D \cup \{x_0\}$, il suffit de déterminer la valeur de $g(x_0)$.

• Soit g un prolongement de f sur $D \cup \{x_0\}$ qui soit une fonction continue en x_0 . Il résulte de la propriété P_2 du paragraphe 3.2 que l'on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} g = g(x_0)$.

D'autre part, f et g coïncident sur D ; il résulte de la définition de la limite en x_0 que l'on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g$.

On a donc, nécessairement : $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f = l$.

Il résulte de l'unicité de la limite, que la valeur de $g(x_0)$ est unique. Il y a donc un seul prolongement de f sur $D \cup \{x_0\}$ qui soit une fonction continue en x_0 .

• D'autre part, il est immédiat que la fonction g définie par :

$(\forall x \in D, g(x) = f(x))$ et $(g(x_0) = l)$ est un prolongement de f sur $D \cup \{x_0\}$ tel que l'on ait : $\lim_{x \rightarrow x_0} g = l$, c'est-à-dire, d'après la propriété P_3 du paragraphe 3.2,

qui soit une fonction continue en x_0 . ■

Exemples.

Reprenons les exemples 1 et 2 du paragraphe 3.1.

1. Soit g l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{x^2}{|x|}$.

La fonction f , définie par : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x^2}{|x|} \text{ et } f(0) = 1 \right)$ est un prolongement de g sur $\mathbb{R}$. Ce prolongement n'est pas le prolongement de g par continuité puisque l'on a démontré, dans le paragraphe 3.1, l'égalité : $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$.

On a d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0} g = \lim_{x \rightarrow 0} f = 0$ et, par suite, le prolongement par continuité

de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction h définie par : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = \frac{x^2}{|x|} \text{ et } h(0) = 0 \right)$, c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = |x|)$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{-3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}, f(x) = \frac{(2x+1)(x+3)}{x+3}.$$

L'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$ coïncide avec f sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ et est continue en -3 .

C'est donc le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}$. Remarquons que l'on a bien : $\lim_{x \rightarrow -3} f = g(-3)$.

On a aussi le théorème suivant :

3.4 THÉORÈME : Soient x_0 et l deux réels, D un intervalle épointé de centre x_0 et f une fonction définie sur D .

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. f admet pour limite en x_0 le réel l .

2. f admet un prolongement par continuité g en x_0 et l'on a : $g(x_0) = l$.

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2). Cette implication est démontrée dans le théorème 3.3.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit g le prolongement par continuité de f en x_0 ; la fonction g est définie sur $D \cup \{x_0\}$ et continue en x_0 .

Il résulte de la propriété P_2 du paragraphe 3.2 les égalités : $\lim_{x \rightarrow x_0} g = g(x_0) = l$.

Les fonctions f et g coïncident sur D ; de la définition de la limite en x_0 , il résulte l'égalité : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$. ■

Remarque : Ce théorème permet dans certains cas de trouver, de façon très simple, la limite en un point x_0 de toute fonction fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur s'annulent en x_0 . Par simplification, on obtient un prolongement par continuité de f et la limite de f en x_0 est la valeur numérique de ce prolongement en x_0 .

Par exemple, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$.

Limite à droite. Limite à gauche.

Nous avons introduit la notion de continuité à droite (resp. à gauche); d'une façon analogue, nous introduisons la notion de limite à droite (resp. à gauche).

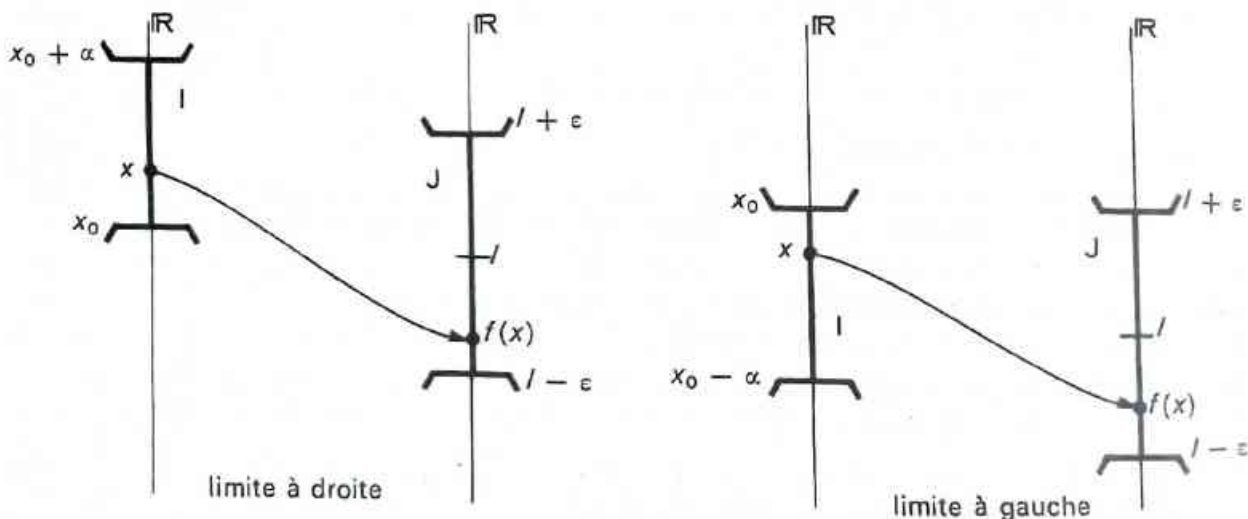
3.5 DÉFINITION : Soient x_0 et l deux réels, r un réel strictement positif et une fonction dont l'ensemble de définition D_f contient l'intervalle $]x_0, x_0 + r[$ (resp. $]x_0 - r, x_0[$).

• On dit que f admet pour limite à droite en x_0 le réel l si et seulement si, pour tout intervalle J de centre l , il existe un intervalle I de la forme $]x_0, x_0 + \alpha[$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, ((0 < x - x_0 < \alpha) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)).$$

• On dit que f admet pour limite à gauche en x_0 le réel l si et seulement si, pour tout intervalle J de centre l , il existe un intervalle I de la forme $]x_0 - \alpha, x_0[$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, ((-\alpha < x - x_0 < 0) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)).$$



On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 à droite (resp. à gauche).

Nous notons : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$)

ou encore : $\lim_{x_0^+} f = l$ (resp. $\lim_{x_0^-} f = l$)

On trouve aussi la notation suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l)$$

et l'expression suivante :

$f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures (resp. inférieures).

Remarques : 1. Il résulte de façon immédiate des définitions que l'on a :

$$\left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \right) \iff \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \right)$$

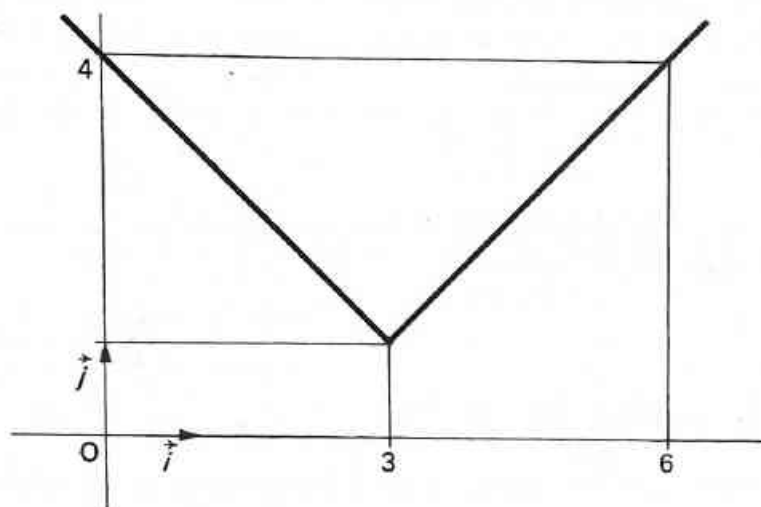
2. De façon analogue aux paragraphes 3.3 et 3.4, on introduit la notion de prolongement par continuité à droite (resp. à gauche) en un point et on démontre qu'une fonction admet pour limite à droite (resp. à gauche) en x_0 le réel l si et seulement si elle admet en x_0 un prolongement par continuité g à droite (resp. à gauche) en x_0 tel que l'on ait : $g(x_0) = l$.

Exemples.

1. Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + |x - 3|$.

L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty, 3[, & f(x) = 1 - x + 3 = 4 - x \\ & f(3) = 1 \\ \forall x \in]3, +\infty[, & f(x) = 1 + x - 3 = x - 2. \end{cases}$$



Cherchons la limite à droite et la limite à gauche de f en 3.

La fonction g définie par :

$$g :]-\infty, 3] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4 - x$$

coïncide avec f sur $]-\infty, 3[$ et est continue à gauche en 3.

$$\text{On a donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = g(3) = 4 - 3 = 1.$$

La fonction h définie par :

$$h : [3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x - 2$$

coïncide avec f sur $]3, +\infty[$ et est continue à droite en 3.

$$\text{On a donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = h(3) = 3 - 2 = 1.$$

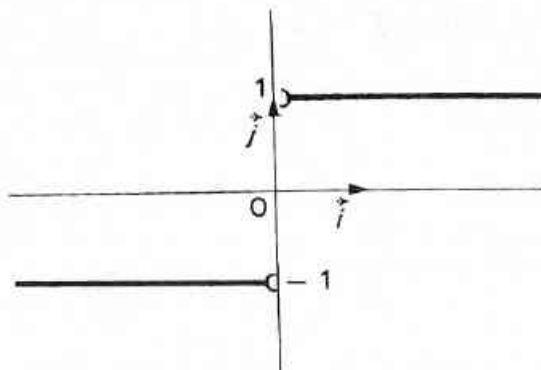
Remarquons que l'on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = 1$ et, par suite $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$.

On aurait pu démontrer ce dernier résultat directement.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{|x|}{x}$.

L'ensemble de définition D_f de f est : $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\text{On a : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = \frac{-x}{x} = -1 \\ \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{x}{x} = 1. \end{cases}$$



Cherchons la limite à gauche et la limite à droite de f en 0.

La fonction constante g égale à -1 , définie sur $]-\infty, 0]$ est le prolongement par continuité à gauche de f en 0; on a donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = g(0) = -1$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer de façon analogue que l'on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1.$$

Remarquons que la limite à droite et la limite à gauche de f en 0 sont différentes; f n'admet donc pas de limite en 0.

Extensions de la notion de limite.

3.6 Soient x_0 et l deux réels et f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle épointé de centre x_0 .

Pour démontrer que l est la limite de f en x_0 , on s'intéresse, pour l'ensemble d'arrivée de f , à la famille des intervalles de centre l , et, pour l'ensemble de départ de f , à la famille des intervalles épointés de centre x_0 . Nous appellerons ces familles respectivement **famille d'arrivée** et **famille de départ**.

Dire que " $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 " signifie :

- que l'on a choisi pour famille d'arrivée la famille des intervalles de centre l ,
- que l'on a choisi pour famille de départ la famille des intervalles épointés de centre x_0 ,
- et que, pour tout élément J de la famille d'arrivée, il existe un élément I de la famille de départ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$.

Il est commode de dire que l est la limite de f suivant la famille des intervalles épointés de centre x_0 .

De même, si l'on a : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = l$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = l$), on dit que l est la limite de f suivant la famille des intervalles de la forme $]x_0, x_0 + \alpha[$ (resp. $]x_0 - \alpha, x_0[$).

Nous allons étendre la notion de limite en considérant d'autres familles de départ et d'arrivée et en gardant la même formulation.

Nous donnons dans les tableaux suivants les différentes familles et les cas auxquelles elles correspondent.

Tableau I

familles d'arrivée	formulations
$]l - \epsilon, l + \epsilon[$	$f(x)$ tend vers l
$]a, +\infty[$	$f(x)$ tend vers $+\infty$
$] - \infty, a[$	$f(x)$ tend vers $-\infty$

Tableau II

familles de départ	formulations
$]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$	x tend vers x_0
$]x_0 - \alpha, x_0[$	x tend vers x_0 à gauche
$]x_0, x_0 + \alpha[$	x tend vers x_0 à droite
$]b, +\infty[$	x tend vers $+\infty$
$] - \infty, b[$	x tend vers $-\infty$

On a alors les quinze possibilités suivantes.

Tableau III

départ \ arrivée	$]l - \epsilon, l + \epsilon[$	$]a, +\infty[$	$] - \infty, a[$
$]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$	$\lim_{x_0} f = l$	$\lim_{x_0} f = +\infty$	$\lim_{x_0} f = -\infty$
$]x_0 - \alpha, x_0[$	$\lim_{x_0^-} f = l$	$\lim_{x_0^-} f = +\infty$	$\lim_{x_0^-} f = -\infty$
$]x_0, x_0 + \alpha[$	$\lim_{x_0^+} f = l$	$\lim_{x_0^+} f = +\infty$	$\lim_{x_0^+} f = -\infty$
$]b, +\infty[$	$\lim_{+\infty} f = l$	$\lim_{+\infty} f = +\infty$	$\lim_{+\infty} f = -\infty$
$] - \infty, b[$	$\lim_{-\infty} f = l$	$\lim_{-\infty} f = +\infty$	$\lim_{-\infty} f = -\infty$

Si f est une fonction dont l'ensemble de définition D_f contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, dire que l'on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ signifie :

- que l'on a choisi pour famille d'arrivée la famille des intervalles de centre l ,
- que l'on a choisi pour famille de départ la famille des intervalles de la forme $]a, +\infty[$,
- et que, pour tout intervalle J de la famille d'arrivée, il existe un intervalle I de la famille de départ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$,
ce qui équivaut à :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, ((x > a) \implies (|f(x) - l| < \varepsilon)).$$

On dit souvent que f **admet une limite finie en $+\infty$** .

De même, si l'on a par exemple : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$, on dit que f **admet une limite infinie en un point fini**.

De même, si l'on a par exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, on dit que f **admet une limite infinie en $-\infty$** .

Enfin, si $\mathcal{F}$ est l'une quelconque des cinq familles de départ, nous notons la limite de f , suivant cette famille, si elle existe :

$$\lim_{\mathcal{F}} f$$

Remarques : 1. Les tableaux I et II ne donnent pas une définition des expressions telles que : " $f(x)$ tend vers l " ou " x tend vers $+\infty$ "; ils permettent seulement de comprendre plus facilement le sens des expressions telles que " $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ ".

2. Le choix d'une famille de départ donnée n'est admissible que si l'ensemble de définition de la fonction f considérée contient un intervalle de cette famille.

Exemples.

1. Démontrons que l'on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. La famille d'arrivée est celle des intervalles de la forme $]-\infty, a[$ et la famille de départ est celle des intervalles de la forme $]-\alpha, 0[$.

Démontrons donc que, pour tout intervalle J de la forme $]-\infty, a[$, il existe un intervalle I de la forme $]-\alpha, 0[$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^*, ((-\alpha < x < 0) \implies (\frac{1}{x} < a)).$$

Soit donc a un réel.

- Si a est positif ou nul, on a, pour tout réel x strictement négatif : $\frac{1}{x} < 0 \leq a$;

on peut donc prendre pour α n'importe quel réel strictement positif.

- Si a est strictement négatif, on a, pour tout réel x strictement négatif :

$$(\frac{1}{x} < a) \iff (ax < 1) \iff (x > \frac{1}{a}); \text{ on peut donc prendre pour } \alpha \text{ le réel } -\frac{1}{a}.$$

2. Démontrons que l'on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$. Démontrons que, pour tout intervalle J de la forme $]a, +\infty[$, il existe un intervalle I de la forme $]-\infty, b[$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, ((x < b) \implies (x^2 > a))$. Soit donc a un réel.

• Si a est négatif ou nul, on a, pour tout réel x non nul : $x^2 > 0 \geq a$. On peut donc prendre pour b n'importe quel réel.

• Si a est positif, on a pour tout x réel : $(x^2 > a) \iff (|x| > \sqrt{a})$ et pour tout x réel strictement négatif : $(|x| > \sqrt{a}) \iff (-x > \sqrt{a}) \iff (x < -\sqrt{a})$. On peut donc prendre pour b le réel $-\sqrt{a}$.

3. Démontrons que l'on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Démontrons que, pour tout intervalle J de centre 1, il existe un intervalle I de la forme $]b, +\infty[$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \left((x > b) \implies \left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| < \varepsilon \right).$$

Soient donc ε un réel strictement positif et x un réel quelconque, différent de 1.

$$\text{On a : } \left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x-1} \right| = \frac{1}{|x-1|}$$

$$\text{et aussi : } \left(\frac{1}{|x-1|} < \varepsilon \right) \iff \left(|x-1| > \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Supposons que l'on ait : $x > 1$. On a alors : $|x-1| = x-1$ et, par suite :

$$\left(|x-1| > \frac{1}{\varepsilon} \right) \iff \left(x > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

On peut donc prendre pour b le réel $\sup \left(1, 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)$ c'est-à-dire : $1 + \frac{1}{\varepsilon}$.

4. Démontrons que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

Démontrons que, pour tout intervalle J de la forme $]a, +\infty[$, il existe un intervalle épointé I de centre 2 tel que l'on ait : $f(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \left((0 < |x-2| < \alpha) \implies \left(\frac{1}{(x-2)^2} > a \right) \right).$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \frac{1}{(x-2)^2} > 0.$$

• Si a est négatif ou nul, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \geq a.$$

On peut donc prendre pour α n'importe quel réel strictement positif.

• Si a est strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, \left(\left(\frac{1}{(x-2)^2} > a \right) \iff \left((x-2)^2 < \frac{1}{a} \right) \right. \\ \left. \iff \left(|x-2| < \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \right). \end{aligned}$$

On peut donc prendre pour α le réel $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Propriétés.

3.7 On a les propriétés suivantes :

P1 Soit λ un réel; la fonction constante $x \mapsto \lambda$ a pour limite λ suivant n'importe laquelle des familles de départ possibles.

Démonstration :

Soit la fonction $f_\lambda : x \mapsto \lambda$. Soit J un intervalle de centre λ .

Pour tout intervalle I de n'importe quelle famille de départ, on a : $f(I) = \{\lambda\} \subset J$. ■

P2 L'intersection de deux intervalles quelconques d'une même famille de départ est un intervalle de cette famille.

Démonstration :

Considérons successivement les cinq familles de départ possibles. On a :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, (]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[) \cap (]x_0 - \beta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \beta[) =]x_0 - \inf(\alpha, \beta), x_0[\cup]x_0, x_0 + \inf(\alpha, \beta)[$
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2,]x_0 - \alpha, x_0[\cap]x_0 - \beta, x_0[=]x_0 - \inf(\alpha, \beta), x_0[$
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2,]x_0, x_0 + \alpha[\cap]x_0, x_0 + \beta[=]x_0, x_0 + \inf(\alpha, \beta)[$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,]a, +\infty[\cap]b, +\infty[=]\sup(a, b), +\infty[$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,]-\infty, a[\cap]-\infty, b[=]-\infty, \inf(a, b)[$. ■

Remarque : L'intersection de deux intervalles quelconques d'une même famille d'arrivée est aussi un intervalle de cette famille.

P3 Soit f une fonction qui admet une limite non nulle suivant une famille de départ donnée. Il existe un intervalle I de cette famille telle que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

Démonstration :

Il n'y a que trois cas possibles :

f a pour limite le réel non nul l ; f a pour limite $+\infty$; f a pour limite $-\infty$.

- f a pour limite le réel non nul l .

On démontre, de façon analogue à la propriété P_4 du paragraphe 3.2, qu'il existe un intervalle I de la famille de départ considérée tel que : $\forall x \in I, f(x) \cdot l > 0$.

On a alors : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

- f a pour limite $+\infty$.

Considérons l'intervalle $J =]0, +\infty[$. Il existe alors un intervalle I de la famille de départ considérée tel que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) \in J$.

On a alors : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.

- f a pour limite $-\infty$.

Considérons l'intervalle $J =]-\infty, 0[$. Il existe alors un intervalle I de la famille de départ considérée tel que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) \in J$.

On a alors : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$. ■

Remarque : La démonstration précédente montre en outre qu'il existe un intervalle de la famille de départ sur lequel la fonction f garde un signe constant.

Opérations sur les limites.

3.8 Nous rappelons ici des résultats donnés en classe de Première; nous les admettons tous; nous proposons néanmoins la démonstration de certains d'entre eux en exercice. Dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants (nos 3.8 à 3.12), nous désignons par f et par g deux fonctions qui admettent des limites suivant la même famille de départ, supposée fixée. Nous notons simplement $\lim f$ (resp. $\lim g$) la limite de f (resp. g) suivant cette famille.

Il résulte de la remarque 2 du paragraphe 3.6 que l'existence de $\lim f$ (resp. $\lim g$) entraîne l'existence d'un intervalle I_1 (resp. I_2) de la famille de départ, sur lequel f (resp. g) est définie. Les fonctions f et g sont donc toutes deux définies sur l'intervalle $I = I_1 \cap I_2$. D'après la propriété P_2 du paragraphe 3.7, l'intervalle I appartient aussi à la famille de départ. Les fonctions $f + g$ et fg sont donc aussi définies sur I .

D'autre part, s'il existe un intervalle J de la famille de départ tel que l'on ait :

$\forall x \in J, g(x) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi définie sur $I \cap J$ qui est encore un intervalle de la famille de départ.

Premiers résultats.

3.9 Les trois tableaux suivants correspondent à tous les cas où l'existence de $\lim f$ et de $\lim g$ entraîne l'existence soit de $\lim(f + g)$, soit de $\lim fg$, soit de $\lim \frac{f}{g}$.

Somme

$\lim f$	$\lim g$	$\lim (f + g)$
	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Produit

$\lim f$	$\lim g$	$\lim fg$
l	l'	ll'
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Quotient

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \frac{f}{g}$
	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
	$-\infty$	0
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
	$l' < 0$	$+\infty$

Remarques : 1. Si λ est un réel quelconque, on obtient des résultats sur $\lim \lambda g$ en remarquant que la fonction λg est le produit de la fonction $x \mapsto \lambda$ et de la fonction g et en utilisant le tableau II.

2. Dans le tableau III, la limite de g suivant la famille de départ considérée n'est jamais nulle. Il résulte de la propriété P_3 du paragraphe 3.7 qu'il existe un intervalle J de la famille de départ tel que l'on ait : $\forall x \in J, g(x) \neq 0$. La fonction $\frac{f}{g}$ est donc définie sur un intervalle de la famille de départ considérée.

Exemples.

1. Il résulte du tableau II que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

2. Il résulte du tableau III que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

3. Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3x^2 - 4 + \frac{2}{x^3} \right)$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{et par suite; } \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + \frac{2}{x^3} = -4.$$

$$\text{On a donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 - 4 + \frac{2}{x^3} = -\infty.$$

4. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{|x|}$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{x^2 + |x|}{|x|} = \frac{x^2}{|x|} + 1.$$

D'autre part, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ et, d'après l'exemple 1 du paragraphe 3.1,

$$\text{on a aussi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0. \quad \text{On a donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{|x|} = 0 + 1 = 1.$$

Applications.

3.10 Les propriétés suivantes sont des conséquences du paragraphe 3.9.

P1

Soit I un intervalle d'une famille de départ donnée.

L'ensemble $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ qui admettent une limite finie suivant la famille de départ considérée est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau commutatif unitaire de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

L'application qui, à toute fonction de $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$, associe sa limite est un homomorphisme d'espace vectoriel et un homomorphisme d'anneau.

Cette propriété résulte de la première ligne des tableaux I et II et de la remarque 1 du paragraphe 3.9.

P2 Soit I un intervalle d'une famille de départ donnée; l'ensemble $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ des applications de I dans $\mathbb{R}$ qui admettent une limite nulle suivant la famille de départ considérée est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau commutatif de $\mathcal{L}(I, \mathbb{R})$; on a, de plus :

$$\forall f \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R}), \quad f\varphi \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R}).$$

Cette propriété résulte aussi de la première ligne des tableaux I et II et de la remarque 1 du paragraphe 3.9.

Remarque : L'anneau $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ n'est pas unitaire car la fonction constante égale à 1 a pour limite 1 suivant n'importe quelle famille de départ.

P3 Soit $x \mapsto P(x)$ une fonction polynôme de degré n ; soit $a_n x^n$ le terme de plus haut degré de $P(x)$.

$$\text{Alors, on a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n. \end{cases}$$

Démonstration :

D'après la définition du terme de plus haut degré, le réel a_n est non nul et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_i x^i + \dots + a_0.$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_i}{a_n} \frac{1}{x^{n-i}} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right)$

et aussi : $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_i}{a_n} \frac{1}{x^{n-i}} = 0$

ce qui implique : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right) = 1.$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n.$

On démontre de façon analogue la deuxième égalité. ■

P4 Soit $f: x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction fraction rationnelle quotient d'un polynôme de degré n par un polynôme de degré p . Soient $a_n x^n$ et $b_p x^p$ les termes de plus haut degré respectifs de $P(x)$ et de $Q(x)$.

$$\text{Alors on a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}. \end{cases}$$

Démonstration :

Soit D_f l'ensemble de définition de f . Les réels a_n et b_p sont non nuls et on a :

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_i x^i + \dots + a_0}{b_p x^p + \dots + b_j x^j + \dots + b_0}.$$

On a alors : $\forall x \in D_f - \{0\}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \frac{1 + \dots + \frac{a_i}{a_n} \frac{1}{x^{n-i}} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}}{1 + \dots + \frac{b_j}{b_p} \frac{1}{x^{p-j}} + \dots + \frac{b_0}{b_p} \frac{1}{x^p}}.$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \dots + \frac{a_i}{a_n} \frac{1}{x^{n-i}} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right) = 1$$

$$\text{et : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \dots + \frac{b_i}{b_p} \frac{1}{x^{p-i}} + \dots + \frac{b_0}{b_p} \frac{1}{x^p} \right) = 1$$

$$\text{et donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

On démontre de façon analogue la deuxième égalité. ■

Exemples.

$$1. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty.$$

$$2. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$3. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^7 + 4x + 1}{3x^7 + x^5 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^7}{3x^7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$4. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x + 2}{x^5 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Lim $\frac{f}{g}$ dans le cas où $\lim g = 0$.

3.11 On suppose dans ce paragraphe que $\lim f$ est non nulle et que $\lim g$ est nulle. Il est alors nécessaire d'avoir des hypothèses supplémentaires pour conclure à l'existence de $\lim \frac{f}{g}$, comme le montrent les deux exemples suivants :

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est définie sur un intervalle épointé de centre 0. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur un intervalle épointé de centre 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \text{ mais cette fonction n'a pas de limite en } 0.$$

$$\text{On a toutefois } \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Dans le cas général, on a les résultats suivants :

$\lim g$		$\lim f$	$\lim \left \frac{f}{g} \right $
0	il existe un intervalle I de la famille de départ considérée tel que : $\forall x \in I, g(x) \neq 0$	$l \neq 0$	$+\infty$
		$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

Tableau I

$\lim g$		$\lim f$	$\lim \frac{f}{g}$
0	il existe un intervalle I de la famille de départ considérée tel que : $\forall x \in I, g(x) > 0$	$I > 0$	$+\infty$
		$I < 0$	$-\infty$
		$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
	il existe un intervalle I de la famille de départ considérée tel que : $\forall x \in I, g(x) < 0$	$I > 0$	$-\infty$
		$I < 0$	$+\infty$
		$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

Tableau II

Remarques : 1. Si l'hypothèse du tableau I n'est pas vérifiée, $\frac{f}{g}$ n'est définie sur aucun intervalle de la famille de départ considérée et n'a donc pas de limite suivant cette famille.

2. L'hypothèse supplémentaire du tableau II entraîne celle du tableau I, mais il arrive souvent que l'hypothèse du tableau I soit vérifiée sans que celle du tableau II le soit.

Alors la fonction $\left| \frac{f}{g} \right|$ a pour limite $+\infty$ et la fonction $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite suivant la famille de départ considérée.

Cela arrive assez souvent lorsque la famille de départ est celle des intervalles épointés de centre x_0 .

3. L'hypothèse supplémentaire du tableau II est assez souvent vérifiée lorsque la famille de départ est celle des intervalles de la forme $]x_0 - \alpha, x_0[$ ou $]x_0, x_0 + \alpha[$.

Exemples.

1. Il résulte des propositions : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2x^3 > 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*, 2x^3 < 0)$ que la fonction $x \mapsto \frac{5}{2x^3}$ n'a pas de limite en 0, mais que l'on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{5}{2x^3} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{5}{2x^3} = -\infty.$$

2. Cherchons la limite éventuelle de $x \mapsto \frac{2x^2 - 9}{(x-2)^2}$ en 2.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 9) = 8 - 9 = -1 < 0$$

$$\text{et : } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0.$$

D'autre part, sur tout intervalle épointé de centre 2, le réel $(x-2)^2$ est strictement positif. On a donc, d'après la seconde ligne du tableau II : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9}{(x-2)^2} = -\infty$.

3. Cherchons la limite éventuelle de $x \mapsto \frac{x^2 - 5}{(x-1)(x-2)}$ en 1.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5) = 1 - 5 = -4 < 0$$

$$\text{et : } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x-2) = 0.$$

Le réel $x-2$ est négatif sur tout intervalle épointé de centre 1 et de rayon strictement inférieur à 1 mais le binôme $x-1$ s'annule en 1 en changeant de signe; il n'existe donc pas d'intervalle épointé de centre 1 sur lequel $(x-1)(x-2)$ ait un signe constant et par suite la fonction considérée n'a pas de limite en 1.

$$\text{Toutefois, posons } I_1 =]1 - \frac{1}{2}, 1[.$$

$$\text{On a alors : } \forall x \in I_1, (x-1)(x-2) > 0$$

$$\text{et par suite : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 5}{(x-1)(x-2)} = -\infty.$$

$$\text{De même, posons } I_2 =]1, 1 + \frac{1}{2}[.$$

$$\text{On a alors : } \forall x \in I_2, (x-1)(x-2) < 0$$

$$\text{et par suite : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 5}{(x-1)(x-2)} = +\infty.$$

4. Cherchons la limite éventuelle de $f: x \mapsto \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$ en 0.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

D'autre part, il résulte de la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R}^*, |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|)$ que, pour tout intervalle J de centre 0, il existe un intervalle épointé I de centre 0 tel que l'on ait : $f(I) \subset J$; on a donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Nous allons démontrer qu'il n'existe pas d'intervalle épointé I' de centre 0 tel que l'on ait : $\forall x \in I', x \sin \frac{1}{x} \neq 0$.

Soit donc I' un intervalle épointé quelconque de centre 0; soit α son rayon.

On a donc : $\forall x \in I', 0 < |x| < \alpha$ ce qui équivaut à :

$$\forall x \in I', \left| \frac{1}{x} \right| > \frac{1}{\alpha}.$$

Soit k un entier naturel tel que l'on ait : $2k\pi > \frac{1}{\alpha}$.

Le réel $\frac{1}{2k\pi}$ appartient à I' et on a : $f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi = 0$.

Sur tout intervalle épointé de centre 0, il existe au moins un réel dont l'image par f est nulle. La fonction f n'admet donc pas de limite en 0.

Formes indéterminées.

3.12 Dans ce paragraphe, nous donnons la liste de tous les cas qui n'ont pas encore été étudiés dans les paragraphes 3.8 à 3.10. Ces cas correspondent à ce que l'on appelle traditionnellement des **formes indéterminées**. Les hypothèses supplémentaires nécessaires pour conclure à l'existence soit de $\lim (f + g)$, soit de $\lim fg$, soit de $\lim \frac{f}{g}$ dépendent de la forme explicite des fonctions f et g .

Pour certaines de ces fonctions, on arrive à démontrer l'existence des limites cherchées, à l'aide de techniques plus ou moins classiques. On dit alors qu'on a "levé l'indétermination". Les exercices proposés en Terminale sont presque toujours de cette sorte.

$\lim f$	$\lim g$	on ne peut conclure directement à l'existence de
$+\infty$	$-\infty$	$\lim (f + g)$
0	$+\infty$	$\lim fg$
0	$-\infty$	
0	0	$\lim \frac{f}{g}$
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$+\infty$	

Nous attirons l'attention du lecteur sur les quatre types essentiels de formes indéterminées :

- différence de deux fonctions qui admettent chacune pour limite $+\infty$;
- produit d'une fonction qui admet une limite infinie et d'une fonction qui admet une limite nulle;
- quotient de deux fonctions qui admettent chacune une limite nulle;
- quotient de deux fonctions qui admettent chacune une limite infinie.

Remarque : Les propriétés P_3 et P_4 du paragraphe 3.9 sont en partie des résultats sur des formes indéterminées :

Par exemple, on ne peut calculer directement, d'après la première ligne du tableau, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2$ ni, d'après la dernière ligne du tableau, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$.

Exemples.

1. Cherchons la limite éventuelle en 2 de $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0$.

On a donc une forme indéterminée.

On a d'autre part :

$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2))$ et $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

et par suite : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4}$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2 + 2}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{3}$.

2. Cherchons la limite éventuelle en 1 de $f: x \mapsto (x - 1) \left(3 - \frac{1}{(x - 1)^2} \right)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \left(3 - \frac{1}{(x - 1)^2} \right) = -\infty$.

On a donc une forme indéterminée.

On a d'autre part :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(x) = \frac{(x - 1)(3(x - 1)^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 1)}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 6x + 2) = -1$ et, d'après le tableau II du paragraphe 3.11 :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

Il en résulte que la fonction f n'a pas de limite en 1.

Nous verrons d'autres exemples de formes indéterminées dans les chapitres suivants.

Limite d'une fonction composée.

3.13 Dans ce paragraphe, nous donnons quelques résultats utiles qui généralisent le théorème 1.7. Nous désignons par f et par g deux fonctions.

P1

Soient l un réel et $\mathcal{F}$ une famille de départ. Si f admet pour limite l suivant $\mathcal{F}$ et si g est continue en l , alors $g \circ f$ admet pour limite $g(l)$ suivant $\mathcal{F}$.

Démonstration :

Démontrons que, pour tout intervalle K de centre $g(l)$, il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $(g \circ f)(I) \subset K$.

Soit K un intervalle quelconque de centre $g(l)$. Puisque g est continue en l , il existe un intervalle J , de centre l , tel que l'on ait : $g(J) \subset K$.

Puisque f admet pour limite l suivant $\mathcal{F}$, il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$.

On a alors : $(g \circ f)(I) = g[f(I)] \subset g(J) \subset K$. ■

P2 Soient l un réel et $\mathcal{F}$ une famille de départ.
 Si f admet pour limite l suivant $\mathcal{F}$ et satisfait, de plus, à la propriété suivante:
 $\exists l_0 \in \mathcal{F}, (\forall x \in l_0, f(x) \neq l \text{ (resp. } f(x) > l, f(x) < l))$,
 si, enfin, g admet une limite en l (resp. limite à droite en l , limite à gauche en l),
 alors $g \circ f$ admet cette limite suivant $\mathcal{F}$.

Démonstration :

Désignons par $\mathcal{F}''$ la famille d'arrivée qui correspond à la limite de g et démontrons que, pour tout intervalle K de $\mathcal{F}''$, il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $(g \circ f)(I) \subset K$.

Soit donc K un intervalle quelconque de $\mathcal{F}''$.

Il existe un intervalle $J =]l - \alpha, l[\cup]l, l + \alpha[$ (resp. $]l, l + \alpha[$, $]l - \alpha, l[$)

tel que l'on ait : $g(J) \subset K$.

Posons : $J' =]l - \alpha, l + \alpha[$. Il existe alors un intervalle I_1 de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $f(I_1) \subset J'$.

Posons $I = I_0 \cap I_1$; de la propriété P_2 du paragraphe 3.7, il résulte que I est encore un intervalle de $\mathcal{F}$. On a :

$$(I \subset I_1) \implies (f(I) \subset f(I_1)) \implies (f(I) \subset J')$$

$$(I \subset I_0) \implies (\forall x \in I, f(x) \neq l \text{ (resp. } f(x) > l, f(x) < l))$$

et par suite : $f(I) \subset J$.

On a alors : $(g \circ f)(I) = g[f(I)] \subset g(J) \subset K$. ■

P3 Soit $\mathcal{F}$ une famille de départ. Si f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) suivant $\mathcal{F}$ et si g admet une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $g \circ f$ admet cette limite suivant $\mathcal{F}$.

Démonstration :

Désignons par $\mathcal{F}''$ la famille d'arrivée qui correspond à la limite de g et par $\mathcal{F}'$ la famille des intervalles de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $] -\infty, a[$).

Démontrons que, pour tout intervalle K de $\mathcal{F}''$, il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $(g \circ f)(I) \subset K$.

Soit donc K un intervalle quelconque de $\mathcal{F}''$.

Il existe un intervalle J de $\mathcal{F}'$ tel que l'on ait : $g(J) \subset K$ et un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $f(I) \subset J$.

On a alors : $(g \circ f)(I) = g[f(I)] \subset g(J) \subset K$.

Remarque : Les démonstrations du théorème 1.7 et des propriétés ci-dessus sont essentiellement les mêmes.

L'hypothèse supplémentaire qui figure dans la propriété P_2 est toutefois nécessaire pour assurer que $g \circ f$ est définie.

Nous verrons des exemples d'utilisation de ces propriétés dans le paragraphe 3.14 et dans les chapitres suivants.

Limites faisant intervenir des fonctions trigonométriques.

3.14 Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats obtenus en classe de Première.

- Les fonctions $\sin$, $\cos$, tg n'ont de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.
- Soit (a, b) un couple de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$; il résulte de la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ et du théorème 1.7 que les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$, $x \mapsto \cos(ax + b)$, $x \mapsto \operatorname{tg}(ax + b)$ sont continues en tout point où elles sont définies.
- Il résulte de la définition de la fonction $\sin$ que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- On a, de façon plus générale, pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{\sin(ax + b)}{ax + b} = 1$$

Démonstration :

Désignons respectivement par f et par g les fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto ax + b \quad g: x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} f = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g = 1.$$

D'autre part, pour tout intervalle épointé I de centre $-\frac{b}{a}$, on a :

$$\forall x \in I, f(x) \neq 0.$$

Il résulte donc de la propriété P_2 du paragraphe 3.13 que l'on a : $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} g \circ f = 1$,

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{\sin(ax + b)}{ax + b} = 1. \quad \blacksquare$$

Exemples.

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$2. \text{ Cherchons la limite éventuelle en } 0 \text{ de la fonction } x \mapsto \frac{\sin 2x}{\sin 5x}.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = \sin(2 \times 0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x = \sin(5 \times 0) = 0.$$

On a donc une forme indéterminée.

D'autre part, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{5x} \times \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$\text{Des égalités : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \text{ il résulte que l'on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}$$

3. Cherchons la limite éventuelle en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

On a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) = \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

On a donc une forme indéterminée.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x - \cos x &= \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{et par suite: } \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}, \quad \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{On a donc: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}.$$

EXERCICES

Continuité en un point.

1 Démontrer, en revenant à la définition, que la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{x+3}{x-2} \text{ est continue en } x_0 = 1.$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -4 = f(1)$$

2 Même question que pour le n° 1 avec :

$$f: x \mapsto x^3 + 2x - 3 \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$

$$D_f = \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 9$$

3 Même question que pour le n° 1 avec :

$$f: x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad x_0 = 0.$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$$

4 Même question que pour le n° 1 avec :

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 7$$

5 Même question que pour le n° 1 avec :

$f: x \mapsto (x-1)(x+5)$ et $x_0 = 1$.

$D_f = \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$

6 Même question que pour le n° 1 avec :

$f: x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x_0 = 2$.

$D_f = [-1, +\infty[; \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{3}$

7 Même question que pour le n° 1 avec :

$f: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $x_0 = 0$.

$D_f = \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

8 Démontrer, en revenant à la définition, que la fonction f définie par :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = |x-2| \\ f(2) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) = x-2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = 2-x \\ f(2) = 1 \end{cases}$

est discontinue en $x_0 = 2$; la fonction f est-elle continue à droite en x_0 ? Est-elle continue à gauche en x_0 ?

9 Mêmes questions que pour le n° 8 avec f définie par :

$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

et : $x_0 = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$
 $f(0) = 0$

10 Mêmes questions que pour le n° 8 avec f définie par :

$\begin{cases} f(x) = 2x+2 & \text{si } x > 1 \\ f(x) = 2x-2 & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

et $x_0 = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$

11 Mêmes questions que pour le n° 8 avec f définie par :

$\begin{cases} f(x) = x+3 & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = x & \text{si } x < -1 \end{cases}$

et $x_0 = -1$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 2; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$
 $f(-1) = 2$

12 1° Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 3x + \frac{|2x|}{x} \\ f(0) = 2 \end{cases}$

$f(x) = 3x+2 \text{ si } x > 0; f(x) = 3x-2 \text{ si } x < 0$

Étudier la continuité de f en 0; donner une représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

2° Mêmes questions que pour le 1° avec l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = 3x + \frac{|2x|}{|x|} \\ g(0) = 2 \end{cases}$

$g(x) = 3x+2$
 $g(0) = 2$

13 1° Soit la fonction $f: x \mapsto -x + \frac{1}{1-x}$.

a) Démontrer qu'il existe un réel strictement positif k tel que l'on ait :

$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[; \left| -x + \frac{1}{1-x} - 1 \right| < k|x|.$

b) En déduire, en revenant à la définition, que f est continue en 0.

2° Soit la fonction $g: x \mapsto |-x| + \left| \frac{1}{1-x} \right|.$

Déterminer l'ensemble des réels x_0 pour lesquels g est continue.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

14 1° Soit f_1 la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f_1(x) = x^2 - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\ f_1(1) = 2. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1 - 1 = 0$$

Étudier la continuité de f_1 en 1 et tracer la courbe représentative de f_1 dans un repère orthonormé.

2° Mêmes questions que pour le 1° avec la fonction f_2 définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f_2(x) = x^2 - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{|x-1|} \\ f_2(1) = 0. \end{cases}$$

15 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}}{(x-2)(x^2+1)} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 2 et en -2 .

16 Soit la fonction $f: x \mapsto (-1)^{E(x)}(x - E(x))$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

1° Étudier la continuité de f en chaque point de son ensemble de définition.

2° Tracer, dans un repère orthonormé, la restriction à l'intervalle $[-3, 3]$ de la courbe représentative de f .

$$f(x) = -(x+3) \text{ sur } [-3, -2], f(x) = x+2 \text{ sur } (-2, -1], f(x) = -(x+1) \text{ sur } (-1, 0], f(x) = x \text{ sur } (0, 1], f(x) = x-1 \text{ sur } (1, 2], f(x) = x-2 \text{ sur } (2, 3]$$

17 Mêmes questions que pour le n° 16 avec : $f: x \mapsto \frac{x}{1 + E(x)}$.

18 Mêmes questions que pour le n° 16 avec : $f: x \mapsto E(x) + E(-x)$.

19 Mêmes questions que pour le n° 16 avec : $f: x \mapsto E(x) + E(2x)$.

20 Mêmes questions que pour le n° 16 avec : $f: x \mapsto E(x) + E\left(\frac{x}{2}\right)$.

21 Mêmes questions que pour le n° 16 avec : $f: x \mapsto E(x^2)$.

22 Soit la fonction $f: x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$.

Étudier la continuité de f en chaque point de son ensemble de définition.

* 23 Démontrer que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ f(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'est pas rationnel} \end{cases}$$

est discontinue en chaque point de son ensemble de définition.

* 24 Soit f l'application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{1}{2^n} & \text{si } \frac{1}{2^n} < x < \frac{1}{2^{n-1}} \\ \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0 \\ \forall x \in [-1, 1], f(-x) = f(x). \end{cases}$$

1° Esquisser la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2° La fonction f est-elle continue en 0 ?

* 25 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1° Soit p un entier rationnel non nul ; étudier la continuité à droite et la continuité à gauche de f en $\frac{1}{p}$.

2° Démontrer que f est continue en 0.

26 Soient x_0 un réel et f et g deux fonctions continues en x_0 .

1° Démontrer que la fonction fg est continue en x_0 . (On pourra utiliser l'exercice n° 11 du chapitre 4.)

2° Démontrer que, si λ est un réel quelconque, la fonction λf est continue en x_0 .

27 Soient x_0 un réel et f et g deux fonctions continues en x_0 ; on suppose, en outre, que l'on a : $g(x_0) \neq 0$.

1° Démontrer que la fonction $\frac{1}{g}$ est continue en x_0 .

2° Utiliser l'exercice n° 26 pour démontrer que la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .

Continuité sur un intervalle.

28 Soit f l'application de $[-3, 3]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [-3, 3], f(x) = x^3.$$

1° Démontrer la proposition suivante :

$$\forall (x, x') \in [-3, 3] \times [-3, 3], |f(x) - f(x')| \leq 27 |x - x'|.$$

2° En déduire, en revenant à la définition, que f est continue sur $[-3, 3]$.

29 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|(x-1)(2x+1)|}{(x-1)(x^2+x+1)} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

1° Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$ et en $x'_0 = -\frac{1}{2}$.

2° Trouver les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est continue.

30 Mêmes questions que pour le n° 29 avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1||x|}{x(2x^2+x-3)} \\ f(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

et avec $x_0 = 0$ et $x'_0 = 1$.

31 Mêmes questions que pour le n° 29 avec :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{|x|-2} & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$$

et avec : $x_0 = 0$ et $x'_0 = 2$.

32 Mêmes questions que pour le n° 29, dans le cas où f est l'application de $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi (\cos^2 x - \cos x)}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \pi \end{cases}$$

et avec : $x_0 = 0$.

33 Mêmes questions que pour le n° 29 avec :

$$f: x \mapsto \sqrt{(x-1)^2} + \frac{2}{x+1} \quad \text{et } x_0 = 1.$$

34 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

1° On suppose que l'on a : $\forall x \in [a, b], f(x) > 0$.

Démontrer qu'il existe un réel strictement positif m tel que l'on ait :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq m > 0.$$

2° On suppose que l'on a : $\forall x \in [a, b], f(x) < 0$.

Démontrer qu'il existe un réel strictement positif m tel que l'on ait :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq -m < 0.$$

* **35** Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une fonction définie et strictement croissante sur $[a, b]$. On suppose que l'on a : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Démontrer que f est alors continue sur $[a, b]$.

36 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

On dit que f est **uniformément continue** sur I si et seulement si la proposition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, x') \in I^2, (|x - x'| < \alpha) \implies (|f(x) - f(x')| < \varepsilon).$$

1° Démontrer que toute fonction uniformément continue sur un intervalle I est continue sur I .

2° Démontrer que la fonction $f: x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

* 3° Démontrer que la fonction $f: x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

* **37** Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$; à tout entier naturel n , on associe une application f_n , de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, croissante sur $[a, b]$. On suppose que, pour tout élément x de $[a, b]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.

1° Écrire la définition de cette limite.

2° Soit ε un réel strictement positif.

a) Démontrer qu'il existe un entier naturel p tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p) \implies (|f_n(a) - 1| < \varepsilon \text{ et } |f_n(b) - 1| < \varepsilon).$$

b) En déduire que l'on a aussi :

$$\forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p) \implies (|f_n(x) - 1| < \varepsilon).$$

Quelle amélioration cette proposition présente-t-elle par rapport à la définition ?

3° Application : $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, ($\forall x \in [a, b], f_n(x) = 1 + x^n$).

a) Vérifier que les fonctions f_n satisfont aux hypothèses du problème.

b) On donne $\varepsilon = 10^{-4}$. Déterminer un entier naturel p tel que la proposition de la question 2° b) soit vérifiée.

◆ Dans les exercices suivants (n°s 38 à 40), on utilisera le corollaire 2.5 du cours.

38 Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'unique solution réelle de l'équation : $-2x^3 - 7x + 4 = 0$.

39 Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'unique solution réelle de l'équation : $2x^3 + 3x^2 + 6x + 6 = 0$.

40 Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de l'unique solution réelle de l'équation : $x^3 + 2x + 4 = 0$.

41 Soit f une application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, continue sur $[0, 1]$. A tout entier naturel non nul n , on associe la fonction $g_n : x \mapsto f(x) - x^n$.

1° Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction g_n est définie et continue sur $[0, 1]$.

2° Calculer $g_n(0)$ et $g_n(1)$ et en déduire qu'il existe un réel a_n de $[0, 1]$ tel que l'on ait : $g_n(a_n) = 0$.

3° On suppose, dans cette question, que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

a) Démontrer qu'il en est de même, quel que soit n , pour la fonction g_n .

b) Démontrer la proposition suivante :

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], ((n > p) \implies (g_n(x) > g_p(x)))$.

c) Déduire de a) et de b) que la suite (a_n) est strictement croissante.

* d) Démontrer que la suite (a_n) converge vers 1.

4° Application au cas où l'application f est définie par :

$\forall x \in [0, 1], f(x) = -x^2 + 1$.

Calculer a_1, a_2, a_4 . Donner un encadrement de a_3 .

Limites.

◆ Dans les exercices suivants (n°s 42 à 45), démontrer, en revenant à la définition, la proposition suivante :

42 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

43 $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1 + |x - 2|) = 1$.

44 $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)(x - 3) = 6$.

45 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x| - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$.

46 Démonstration de la propriété du paragraphe 3.2 qui concerne l'unicité de la limite.

Soient x_0 et l deux réels et f une fonction qui admet pour limite en x_0 le réel l . Démontrer qu'il est impossible que f admette aussi pour limite en x_0 un autre réel l' . On raisonnera par l'absurde et on utilisera la question n° 2 de l'exercice n° 8 du chapitre 4.

47 Déterminer un prolongement par continuité en $x_0 = 1$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ et en déduire la limite de f en x_0 .

48 Mêmes questions que pour le n° 47 avec :

$$x_0 = -3 \text{ et } f: x \mapsto \frac{|x| - 3}{x^2 + 3x}.$$

49 Mêmes questions que pour le n° 47 avec :

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ et } f: x \mapsto \frac{8x^3 - 1}{x - |x - 1|}.$$

◆ Dans les exercices suivants (nos 50 à 53), démontrer, en revenant à la définition, que l'on a :

$$50 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x - 1} = 0.$$

$$51 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 - 1}{x - |x + 1| + 1} = -1.$$

$$52 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x^3 + 8}{|x + 2|} = 12.$$

$$53 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x^3 + 8}{|x + 2|} = -12.$$

54 La fonction $f: x \mapsto \frac{x}{x + |x|}$ admet-elle un prolongement par continuité à droite (resp. à gauche) en 0 ? Que peut-on en déduire pour l'éventuelle limite à droite (resp. à gauche) de f en 0 ?

◆ Dans les exercices suivants (nos 55 à 62), démontrer, en revenant à la définition que l'on a :

$$55 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{x - 1} = +\infty.$$

$$56 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x - 1)^2} = -\infty.$$

$$57 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2} = 0.$$

$$58 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

$$59 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - 2} = +\infty.$$

$$60 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4 + x^2} = +\infty.$$

$$61 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-x}{x - 1} = +\infty.$$

$$62 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-4x + 1}{x^3} = +\infty.$$

- * **63** Démontrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- * **64** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe deux réels l et l' satisfaisant à : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = l'$.
Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

65 Soient $\mathcal{F}$ l'une des cinq familles de départ définies dans le paragraphe 3.6 et f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de $\mathcal{F}$.

1° Soit l un réel. Démontrer que l'on a : $(\lim_{\mathcal{F}} f = l) \implies (\lim_{\mathcal{F}} |f| = |l|)$.

2° Peut-on déterminer l pour que les propositions précédentes soient équivalentes ?

66 Soient $\mathcal{F}$ l'une des cinq familles de départ définies dans le paragraphe 3.6 et f, g, h trois fonctions telles qu'il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

- $\{ I \text{ est inclus dans les ensembles de définition respectifs de } f, g, h ;$
- $\{ \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x).$

Démontrer que, s'il existe un réel l qui satisfait à : $\lim_{\mathcal{F}} f = l$ et $\lim_{\mathcal{F}} h = l$, alors on

a aussi : $\lim_{\mathcal{F}} g = l$. (On pourra utiliser l'exercice n° 11 du chapitre 4.)

◆ Dans les exercices suivants (n°s 67 à 70), on désigne par $\mathcal{F}$ l'une des cinq familles de départ définies dans le paragraphe 3.6 et par f et g deux fonctions dont les ensembles de définition contiennent un intervalle de $\mathcal{F}$.

67 Soient l et l' deux réels.

Démontrer, de façon analogue à la démonstration donnée dans le paragraphe 1.5 que l'on a : $(\lim_{\mathcal{F}} f = l \text{ et } \lim_{\mathcal{F}} g = l') \implies (\lim_{\mathcal{F}} (f + g) = l + l')$.

68 Démontrer la proposition suivante :

$$(\lim_{\mathcal{F}} f = -\infty \text{ et } \lim_{\mathcal{F}} g = -\infty) \implies (\lim_{\mathcal{F}} (f + g) = -\infty).$$

69 Soit l un réel strictement positif.

Démontrer la proposition suivante :

$$(\lim_{\mathcal{F}} f = l \text{ et } \lim_{\mathcal{F}} g = +\infty) \implies (\lim_{\mathcal{F}} fg = +\infty).$$

On pourra commencer par montrer qu'il existe un intervalle de $\mathcal{F}$ sur lequel f et g sont positives.

70 Démontrer la proposition suivante :

$$(\lim_{\mathcal{F}} f = +\infty \text{ et } \lim_{\mathcal{F}} g = -\infty) \implies (\lim_{\mathcal{F}} fg = -\infty).$$

On pourra commencer par montrer qu'il existe un intervalle de $\mathcal{F}$ sur lequel f est positive et g est négative.

71 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\sin^2 x}$.

72 Déterminer les limites éventuelles respectives en 0, en 4, en $+\infty$, en $-\infty$ de la fonction : $x \mapsto \frac{x - 4}{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}$.

73 Déterminer les limites éventuelles respectives en 2, en -6 , en $+\infty$, en $-\infty$ de la fonction : $x \mapsto \frac{x^3 - x + 3}{\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2}$.

74 Déterminer les limites éventuelles respectives en 1, en -1 , en $+\infty$, en $-\infty$ de la fonction : $x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$.

75 Soit a un réel. Déterminer, suivant les valeurs de a , les limites éventuelles respectives en -1 , en $+\infty$, en $-\infty$, en 5 de la fonction : $x \mapsto \frac{ax^2 + (a^2 + 1)x + a}{x - 5}$.
Cette fonction admet-elle un prolongement par continuité en 5 ?

76 Soit a un réel. Déterminer, suivant les valeurs de a , les limites éventuelles respectives en 0, en 1, en 2, en $+\infty$, en $-\infty$ de la fonction :
 $x \mapsto \frac{ax^3 + (a - 1)x^2 + (a - 2)x + (a - 3)}{x(x - 1)(x - 2)}$.

77 Soient a et b deux réels. Déterminer les limites éventuelles respectives en 0, en -1 , en $+\infty$, en $-\infty$ de la fonction :
 $x \mapsto \frac{(x - a)(x - b)}{x(x + 1)}$.

Cette fonction admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? en -1 ?

78 Soient a et b deux réels. Déterminer, suivant les réels a et b , les limites éventuelles respectives en 0, en 1, en $+\infty$, en $-\infty$, de la fonction :
 $x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1} - (ax + b)$.

Cette fonction admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?

79 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction :
 $x \mapsto \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x}$.

80 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin^2 5x}$.

81 Déterminer la limite éventuelle en $-\frac{\pi}{3}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{-\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x}$$

82 Déterminer la limite éventuelle en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}$$

83 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$$

84 Déterminer la limite éventuelle en $\frac{\pi}{6}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin 6x}{2 \cos x - \sqrt{3}}$$

85 Déterminer la limite éventuelle en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x - 1}$$

86 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}$$

87 Déterminer la limite éventuelle en $\frac{\pi}{3}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin x}{5 \cos^2 x + \sin^2 x - 4 \cos x}$$

88 Déterminer la limite éventuelle en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin 2x - 2 + 2 \sin x - 2 \cos x}$$

89 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{(\cos x + 1)^2}{(\cos x - 1)^2}$$

90 Déterminer la limite éventuelle en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin (2x - \pi)}{\operatorname{tg}^2 (2x - \pi)}$$

Problème.

91 Dans ce problème, nous introduisons la notion de filtre, due à Henri Cartan; cette notion fournit un cadre très général pour l'étude des limites.

1. Soit E un ensemble. On appelle **filtre sur E** , tout sous-ensemble $\mathcal{F}$ non vide de $\mathcal{T}(E)$ qui possède les trois propriétés suivantes :

- $\emptyset$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$.
- L'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.
- Tout sous-ensemble de E qui contient un élément de $\mathcal{F}$ est lui-même un élément de $\mathcal{F}$.

1° Écrire ces trois propriétés en langage symbolique.

2° Soit x_0 un nombre réel. On appelle **voisinage** (resp. **voisinage épointé**) de x_0 , tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle (resp. un intervalle épointé) de centre x_0 . Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils des voisinages de 5 ?
 $] -1, 4[\cup] 5, +\infty[$, $] 1, 6[\cup] 8, 10[$, $] 4, 6[$.

On note $\mathcal{V}(x_0)$ (resp. $\mathcal{V}^\circ(x_0)$) l'ensemble des voisinages (resp. voisinages épointés) de x_0 . Démontrer que $\mathcal{V}(x_0)$ et $\mathcal{V}^\circ(x_0)$ sont deux filtres sur $\mathbb{R}$.

3° On appelle voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$) où a est un nombre réel. On note $\mathcal{V}(+\infty)$ (resp. $\mathcal{V}(-\infty)$) l'ensemble des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Démontrer que $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathcal{V}(-\infty)$ sont deux filtres sur $\mathbb{R}$.

4° On appelle voisinage dans $\mathbb{N}$ de $+\infty$ tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui contient l'ensemble des entiers supérieurs à un entier a . On note Φ l'ensemble de ces voisinages. Démontrer que Φ est un filtre sur $\mathbb{N}$.

II. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et $\mathcal{F}$ un filtre sur E . On appelle **filtre image de $\mathcal{F}$ par f** et on note $f(\mathcal{F})$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}(F)$ qui contiennent l'image par f d'un élément V de $\mathcal{F}$.

$$f(\mathcal{F}) = \{W \in \mathcal{F}(F) \mid \exists V \in \mathcal{F}, f(V) \subset W\}.$$

1° Démontrer que $f(\mathcal{F})$ est un filtre sur F .

2° Exemple : $E = F = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{V}(0)$, $\mathcal{F}' = \dot{\mathcal{V}}(0)$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = -1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Expliciter $f(\mathcal{F})$ et $f(\mathcal{F}')$.

III. Soient E un ensemble, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux filtres sur E . On dit que $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{F}'$ si et seulement on a : $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

1° Démontrer que cette définition est équivalente à la définition suivante :

$$\forall V' \in \mathcal{F}', \exists V \in \mathcal{F}, V \subset V'.$$

2° Démontrer que $\dot{\mathcal{V}}(x_0)$ est plus fin que $\mathcal{V}(x_0)$.

3° Soient f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. Démontrer les propositions suivantes :

a) f est continue en x_0 si et seulement si le filtre image par f de $\mathcal{V}(x_0)$ est plus fin que $\mathcal{V}(f(x_0))$.

b) f admet pour limite en x_0 le réel l si et seulement si le filtre image par f de $\dot{\mathcal{V}}(x_0)$ est plus fin que $\mathcal{V}(l)$.

c) f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si le filtre image par f de $\mathcal{V}(+\infty)$ est plus fin que $\mathcal{V}(-\infty)$.

4° Soit u une suite réelle. Démontrer que la suite u est convergente et a pour limite le réel l si et seulement si le filtre image par u de Φ est plus fin que $\mathcal{V}(l)$.

6.

Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

1. Fonction $x \mapsto x^n$.

Soit n un entier rationnel. Nous allons étudier la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

Il n'y a que trois cas possibles : $n = 0$, $n > 0$ ou $n < 0$.

Si n est nul, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_0(x) = 1$.

La fonction f_0 est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$.

Cas où n est positif.

- 1.1 • La fonction f_n est alors appelée **fonction puissance $n^{\text{ième}}$** .

La fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair). L'ensemble d'étude est donc $[0, +\infty[$.

- Étudions le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux réels positifs distincts; supposons que l'on ait : $x_1 < x_2$ et étudions la différence $x_1^n - x_2^n$.

On a : $x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \dots + x_2^{n-1})$.

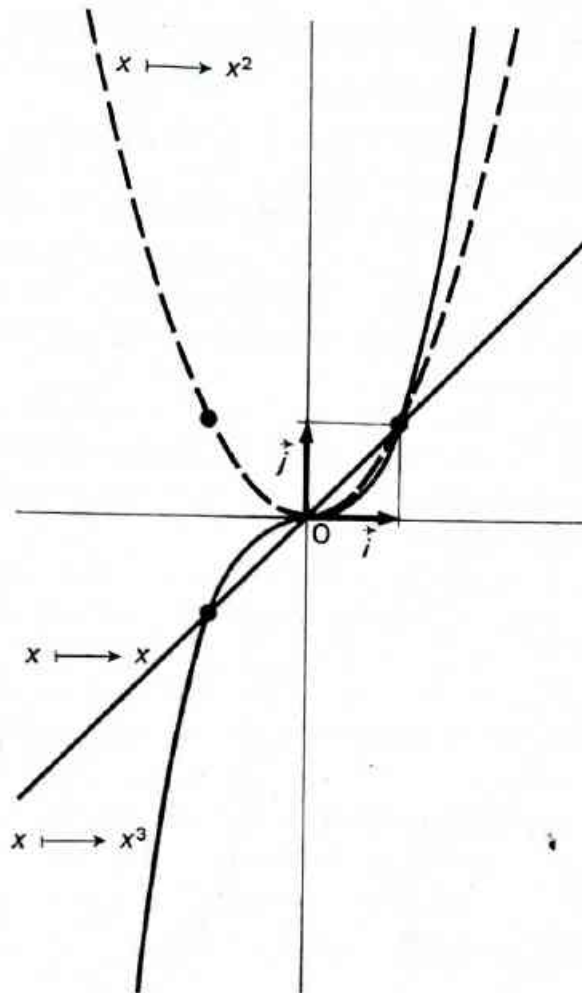
Les réels x_1 et x_2 sont positifs; le réel $x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \dots + x_2^{n-1}$ est donc strictement positif.

Il résulte de l'inégalité : $x_1 < x_2$ que l'on a : $x_1^n < x_2^n$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

- On a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	0	$+\infty$

• Traçons, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 . Nous rappelons que f_1 et f_3 sont des fonctions impaires et que f_2 est une fonction paire.



Remarques : 1. Toutes les courbes passent par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soient n et p deux entiers positifs. On a :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad ((x^n < x^p) \iff (n > p)),$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad ((x^n < x^p) \iff (n < p)).$$

Cas où n est négatif.

1.2 • Posons $n = -n'$ avec $n' > 0$. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^n = \frac{1}{x^{n'}}$.

La fonction f_n est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^*$; elle est paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair). L'ensemble d'étude est donc $]0, +\infty[$.

• Étudions le sens de variation de f_n sur $]0, +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux réels distincts strictement positifs; supposons que l'on ait :

$x_1 < x_2$ et étudions la différence $x_1^n - x_2^n$.

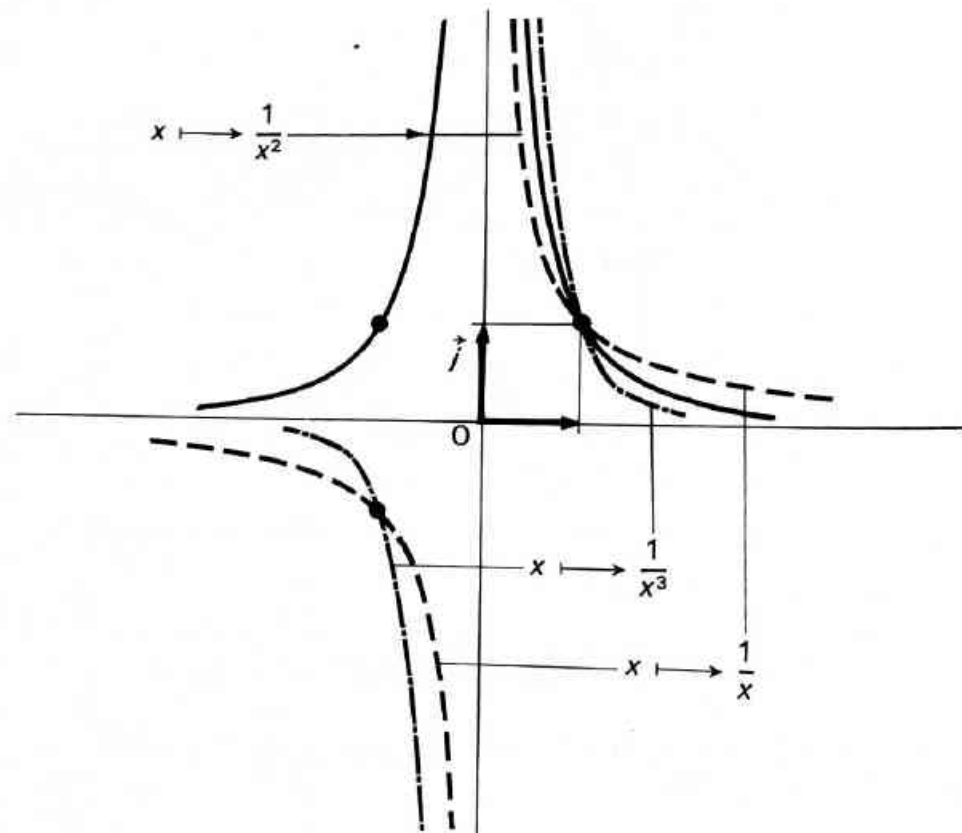
On a : $x_1^n - x_2^n = \frac{1}{x_1^{n'}} - \frac{1}{x_2^{n'}} = \frac{x_2^{n'} - x_1^{n'}}{x_1^{n'} \cdot x_2^{n'}}$.

Il résulte de l'étude faite pour les exposants positifs que l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne l'inégalité $x_1^{n'} < x_2^{n'}$; les réels $x_1^{n'}$ et $x_2^{n'}$ sont strictement positifs et par suite on a : $x_1^n - x_2^n > 0$; la fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

- On a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	0

- Traçons, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions f_{-1}, f_{-2}, f_{-3} . Nous rappelons que f_{-1} et f_{-3} sont des fonctions impaires et que f_{-2} est une fonction paire.



Remarques : 1. Toutes les courbes passent par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soient n et p deux entiers négatifs. On a :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad (x^n < x^p) \iff (n > p)$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad (x^n < x^p) \iff (n < p).$$

2. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

2.1 THÉORÈME : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins une paire de deux réels distincts, et f une fonction définie, continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- L'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une bijection de I sur $f(I)$.
- L'application réciproque f^{-1} est une bijection continue et strictement croissante (resp. décroissante) de $f(I)$ sur I .

Démonstration :

- L'application f est continue sur l'intervalle I ; il résulte du théorème 2.2 du chapitre 5 que l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle.

L'application f est une surjection de I sur $f(I)$.

Démontrons que f est aussi injective sur I . Soient donc x_1 et x_2 deux éléments distincts de I . Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que l'on a :

$$x_1 < x_2.$$

Puisque f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I , on a : $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$), et, par suite : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

L'application surjective f est aussi injective; c'est donc une bijection de I sur $f(I)$.

- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f sur I ; par définition, cette application est une bijection de $f(I)$ sur I .

Conformément au programme, nous admettons que f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Étudions maintenant le sens de variation de f^{-1} sur $f(I)$.

Soient y_1 et y_2 deux éléments quelconques de $f(I)$ distincts; supposons que l'on ait :

$y_1 < y_2$ et appelons x_1 (resp. x_2) l'antécédent de y_1 (resp. y_2).

On a : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ et par suite : $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Si f est strictement croissante, il est impossible d'avoir : $x_1 \geq x_2$ car on aurait

alors : $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est-à-dire : $y_1 \geq y_2$. On a donc : $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

et f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Si f est strictement décroissante, il est impossible d'avoir : $x_1 \leq x_2$ car on aurait

alors : $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est-à-dire : $y_1 \geq y_2$. On a donc : $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$

et f^{-1} est strictement décroissante sur $f(I)$. ■

Remarques : 1. Il est possible de préciser la nature de l'intervalle $f(I)$ suivant celle de I .

- Si I est un segment $[a, b]$, alors $f(I)$ est un segment $[m, M]$, d'après le théorème 2.3 du chapitre 5. De plus, il est clair que l'on a : $[m, M] = [f(a), f(b)]$ (resp.

$[f(b), f(a)]$) si f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.

- On démontre et nous admettons que, si I est un intervalle ouvert non vide, alors $f(I)$ est un intervalle ouvert non vide.

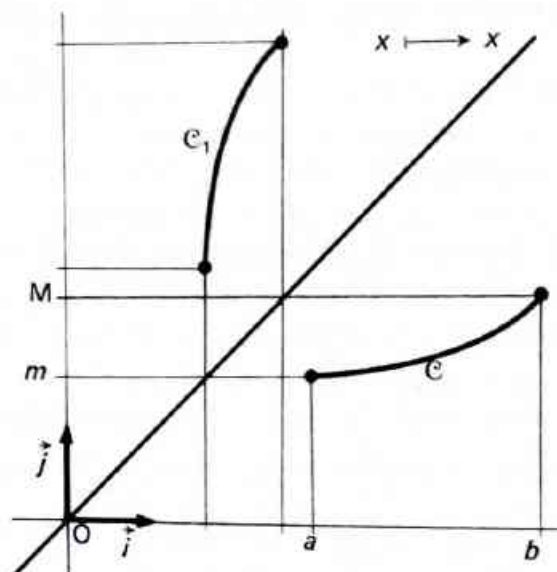
2. Notons que I peut être borné sans que $f(I)$ le soit. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection strictement décroissante de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$.

3. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit C_1 celle de f^{-1} dans le même repère. Si M est un point quelconque du plan, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, notons M_1 le point de coordonnées $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a alors :

$$(M \in C) \iff (x \in [a, b] \text{ et } y = f(x)) \iff (y \in [m, M] \text{ et } x = f^{-1}(y)) \iff (M_1 \in C_1).$$

Les points M et M_1 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il résulte des équivalences précédentes que C et C_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite que l'on appelle parfois, de façon incorrecte, la « première » bissectrice des axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Exemples.

1. Soit f l'application définie par :

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

La restriction f_1 de f à $[0, 1]$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$.

Elle admet donc une application réciproque f_1^{-1} qui est une bijection de l'intervalle $f_1([0, 1]) = [0, 1]$ sur $[0, 1]$.

L'application f_1^{-1} est, de plus, continue et strictement croissante sur $[0, 1]$. Nous verrons, dans le paragraphe 2.3, que f_1^{-1} est la restriction à $[0, 1]$ de l'application g définie par :

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

2. Soit f l'application définie par :

$$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

La restriction f_1 de f à $[1, 2]$ est continue et strictement décroissante sur $[1, 2]$.

Ce résultat nous conduit à énoncer la définition suivante :

2.3 DÉFINITION : Soit n un entier naturel non nul. On appelle **fonction racine $n^{\text{ième}}$** et on note $\sqrt[n]{}$ la bijection réciproque de la bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ définie par : $x \mapsto x^n$.

Le symbole $\sqrt[n]{}$ est le **radical** et l'entier n l'**indice**.

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, ((y = \sqrt[n]{x}) \iff (x = y^n))$$

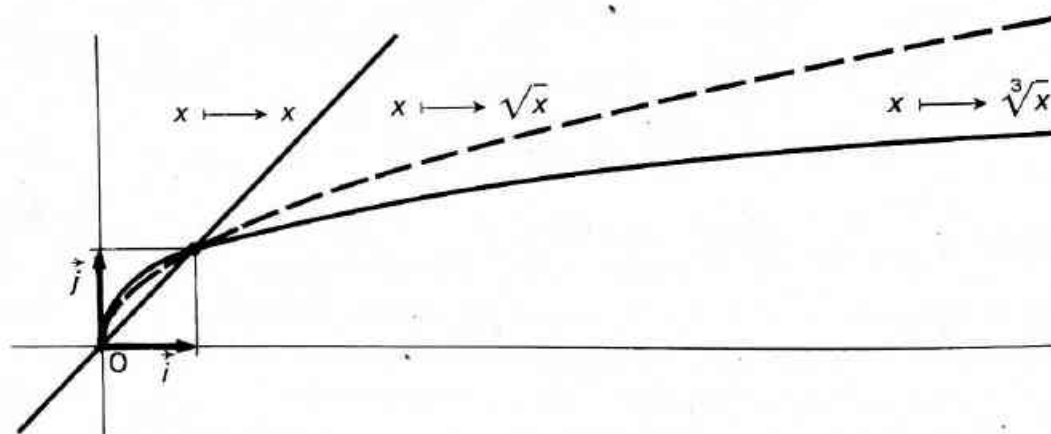
Des égalités : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_{[0, +\infty[}$, il résulte que l'on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[, (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Si n est égal à 2, on note simplement $\sqrt{x}$ et on appelle **racine carrée** de x le réel positif dont le carré est égal à x .

Si n est égal à 1, la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est l'identité de $\mathbb{R}_+$. On n'emploie pas le symbole $\sqrt[1]{}$.

Voici les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions racines $n^{\text{ièmes}}$ pour n égal à 1, 2, 3.



Remarque : On peut démontrer, de manière analogue au paragraphe 2.2, le résultat suivant :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que l'on ait : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

Alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et l'application réciproque f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ satisfait les hypothèses de ce théorème; on peut donc définir, dans ce cas, sa fonction réciproque sur $\mathbb{R}$ et non uniquement sur $\mathbb{R}_+$. Pour éviter les confusions, on réserve le symbole $\sqrt[n]{x}$ au cas où x est positif.

Radicaux.

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^n = a$.

- 2.4 Soient n un entier naturel non nul et a un réel non nul. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^n = a$; appelons S l'ensemble des solutions et distinguons les deux cas suivants : n pair ou n impair.

n est pair

Pour tout réel x , le réel x^n est positif ou nul.

- Si a est strictement négatif, on a donc : $S = \emptyset$.
- Si a est strictement positif, il résulte de la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, ((x^n = a) \iff (x = \sqrt[n]{a}))$$

que le réel $\sqrt[n]{a}$ est la seule solution positive de l'équation; son opposé est donc la seule solution négative et on a : $S = \{\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}\}$.

n est impair

Pour tout réel x , le réel x^n est du signe de x et, par suite, tout réel solution de l'équation est du signe de a .

- Si le réel a est strictement positif, l'ensemble S est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et il résulte de la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}_+, ((x^n = a) \iff (x = \sqrt[n]{a}))$

que le réel $\sqrt[n]{a}$ est la seule solution de l'équation; on a : $S = \{\sqrt[n]{a}\}$.

- Si a est strictement négatif, l'ensemble S des solutions est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$.

D'autre part, si x est un réel strictement négatif, on a :

$$(x^n = a) \iff ((-1)^n x^n = (-1)^n a) \iff ((-x)^n = -a).$$

Dire que le réel strictement négatif x est solution de l'équation : $x^n = a$ équivaut à dire que le réel strictement positif $-x$ est solution de l'équation : $(-x)^n = -a$.

Il résulte du cas où a est strictement positif, que l'on a :

$$((-x)^n = -a) \iff (-x = \sqrt[n]{-a}). \text{ On a donc : } S = \{-\sqrt[n]{-a}\}.$$

Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \{\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Remarque : Si a est nul, pour tout entier naturel n non nul, on a : $S = \{0\}$.

Exemples.

1. L'ensemble S des solutions de l'équation : $x^4 = 16$ est : $S = \{-2, 2\}$.
2. L'ensemble S des solutions de l'équation : $x^4 = -16$ est : $S = \emptyset$.
3. L'ensemble S des solutions de l'équation : $x^3 = 8$ est : $S = \{2\}$.
4. L'ensemble S des solutions de l'équation : $x^3 = -8$ est : $S = \{-2\}$.

Formules.

2.5 Soient a et b deux réels positifs et n et p deux entiers naturels non nuls. On a :

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n^p]{a^p} \quad (1)$ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n^p]{a} \quad (2)$ $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (3)$	$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \quad (4)$ si b est non nul, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (5)$
--	--

Démonstration :

Pour démontrer ces formules, nous utilisons la proposition suivante qui exprime l'injectivité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction puissance $n^{\text{ième}}$:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, ((x^n = y^n) \iff (x = y)).$

1. On a : $(\sqrt[n]{a})^{np} = ((\sqrt[n]{a})^n)^p = a^p = (\sqrt[n^p]{a^p})^{np}$.

On a donc : $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n^p]{a^p}$.

2. On a : $(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^{np} = ((\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^n)^p = (\sqrt[p]{a})^p = a = (\sqrt[n^p]{a})^{np}$.

On a donc : $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n^p]{a}$.

3. On a : $(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n = ab = (\sqrt[n]{ab})^n$.

On a donc : $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

4. Appliquons $p - 1$ fois la formule (3). On obtient :

$$(\sqrt[n]{a})^p = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{p \text{ fois}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \times \dots \times a}_{p \text{ fois}}} = \sqrt[n]{a^p}$$

5. Si b est non nul, il en est de même de $\sqrt[n]{b}$.

$$\text{On a : } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)^n ; \text{ on a donc : } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \blacksquare$$

Exemples.

1. Simplifions : $A = \frac{\sqrt[3]{1\,024} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{7\,776}}{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{256}}$

On a :

$$1\,024 = 2^{10} \quad \text{et par suite : } \sqrt[3]{1\,024} = \sqrt[3]{2^9 \times 2} = 2^3 \times \sqrt[3]{2}.$$

$$64 = 8^2 \quad \text{et par suite : } \sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$7\,776 = 6^5 \quad \text{et par suite : } \sqrt[5]{7\,776} = \sqrt[5]{6^5} = 6.$$

$$18 = 2 \times 3^2 \quad \text{et par suite : } \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$256 = 2^8 \quad \text{et par suite : } \sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{2^8} = \sqrt[3]{2^6 \times 2^2} = 2 \times \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{On a donc : } A = \frac{2^3 \times \sqrt[3]{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 \times 3}{3 \times \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt[3]{2}} = 2^4 = 16.$$

2. Simplifions $\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } 22 + 12\sqrt{2} &= 4 + 18 + 12\sqrt{2} = 2^2 + (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times 2 \\ &= (2 + 3\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\text{et de même : } 22 - 12\sqrt{2} = (2 - 3\sqrt{2})^2.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}} &= |2 + 3\sqrt{2}| - |2 - 3\sqrt{2}| \\ &= (2 + 3\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - 2) = 4.\end{aligned}$$

Remarque : La formule (4) est encore vraie si p est un entier négatif ou nul et si a n'est pas nul.

Si p est nul, on a : $(\sqrt[n]{a})^0 = 1$ et $\sqrt[n]{a^0} = \sqrt[n]{1} = 1$.

Si p est strictement négatif, posons $p' = -p$. L'entier p' est alors strictement positif

$$\text{et on a : } (\sqrt[n]{a})^p = (\sqrt[n]{a})^{-p'} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{p'}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{p'}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{p'}}} = \sqrt[n]{a^{-p'}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

On a donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{Z}, (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Continuité et limite de fonctions contenant des radicaux.

2.6 Soient f une fonction et D_f son ensemble de définition; soit n un entier naturel non nul. On note $\sqrt[n]{f}$ la fonction définie par : $\sqrt[n]{f} : x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$. L'ensemble de définition de cette fonction est l'ensemble $\{x \in D_f \mid f(x) \geq 0\}$. Comme dans le paragraphe 3.8 du chapitre 5, nous supposons que f admet une limite suivant une famille de départ donnée; nous notons $\lim f$ cette limite et nous cherchons la limite éventuelle de $\sqrt[n]{f}$ suivant la même famille de départ. Nous avons les résultats donnés dans le tableau suivant :

$\lim f$	$\lim \sqrt[n]{f}$
$l > 0$	$\sqrt[n]{l}$
$+\infty$	$+\infty$

Démonstration :

Désignons par g la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$; on a : $\sqrt[n]{f} = g \circ f$.

• La première ligne du tableau résulte de la continuité de g en tout réel strictement positif et de la propriété P_1 du paragraphe 3.13 du chapitre 5.

• La deuxième ligne résulte de la propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et de la propriété P_3

du paragraphe 3.13 du chapitre 5. ■

Remarque : Soit x_0 un réel; si f est continue en x_0 et si l'on a : $f(x_0) > 0$, il résulte de la première ligne du tableau que l'on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x_0)}$,

c'est-à-dire que $\sqrt[n]{f}$ est continue en x_0 .

Cette propriété résulte aussi du théorème 1.7 du chapitre 5.

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle satisfait à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x^2 + 1}$ est donc aussi continue sur $\mathbb{R}$.

2. Cherchons si la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 9}$ admet une limite au point 6.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 6} (x^2 - 9) = 36 - 9 = 27.$$

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow 6} f$ existe et que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[3]{x^2 - 9} = \sqrt[3]{27} = 3.$

3. Cherchons si la fonction $f : x \mapsto \sqrt[5]{x^5 + x^4 - 3}$ admet une limite en $+\infty$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x^4 - 3) = +\infty.$$

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ existe et que l'on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^4 - 3} = +\infty.$

4. Cherchons si la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x}$ admet une limite en $-\infty$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1) = +\infty \text{ et par suite : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} = +\infty,$$

$$\text{et aussi : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x) = +\infty \text{ et par suite : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} = +\infty.$$

On ne peut donc pas conclure directement à l'existence d'une limite de f .

Les fonctions polynômes $x \mapsto x^2 + x - 1$ et $x \mapsto x^2 - 3x$ ne sont pas nulles en même temps. On a donc :

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x})(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - 3x})}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - 3x}}$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{(x^2 + x - 1) - (x^2 - 3x)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - 3x}} = \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - 3x}}.$$

$$\text{On a alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x - 1) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - 3x}) = +\infty.$$

On ne peut encore conclure à l'existence d'une limite de f .

$$\text{Mais, on a : } \forall x \in D_f, f(x) = \frac{x \left(4 - \frac{1}{x}\right)}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}\right)}.$$

Soit I un intervalle de la famille de départ considérée, c'est-à-dire un intervalle de la forme $] -\infty, a[$; supposons de plus $a < 0$.

On a alors : $\forall x \in I, |x| = -x$ et, par suite :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{4 - \frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}\right)}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4$$

$$\text{et : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}\right) = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2.$$

$$\text{On a donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{4}{-2} = -2.$$

3. Puissances rationnelles d'un réel strictement positif.

Définition.

- 3.1 Soit a un réel strictement positif; si n est un entier rationnel quelconque, nous avons défini, dans le paragraphe 1.3 du chapitre 4, le réel a^n . Nous avons ainsi défini une application φ_a de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ n \longmapsto a^n$$

qui satisfait aux propriétés suivantes :

$$\forall (n, n') \in \mathbb{Z}^2, (a^n)^{n'} = a^{nn'}$$

$$\forall (n, n') \in \mathbb{Z}^2, a^n \times a^{n'} = a^{n+n'}$$

$$\forall (n, n') \in \mathbb{Z}^2, \frac{a^n}{a^{n'}} = a^{n-n'}$$

et, si b est aussi un réel strictement positif :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, a^n b^n = (ab)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Nous voulons maintenant définir un prolongement de φ_a à $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire, définir, si r est un nombre rationnel quelconque, le réel a^r de telle sorte que, si r appartient à $\mathbb{Z}$, on retrouve la définition donnée dans le chapitre 4.

- 3.2 **THÉORÈME :** Soient a un réel strictement positif et φ_a l'application définie par :

$$\varphi_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ n \longmapsto a^n.$$

L'application f de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui, à tout rationnel r dont un représentant est $\frac{p}{q}$ (avec q strictement positif), associe le réel $a^r = \sqrt[q]{a^p}$, est l'unique prolongement de φ_a à $\mathbb{Q}$ qui satisfait à la proposition suivante :

$$\forall (r, r') \in \mathbb{Q}^2, (a^r)^{r'} = a^{rr'}.$$

Démonstration :

Unicité.

- Soit q un entier naturel non nul.

On a nécessairement :

$$\left(\frac{1}{a^q}\right)^q = \frac{1}{a^q} = a^{-1} = a^{-\frac{1}{q}} \text{ et par suite : } a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}.$$

- Soit (p, q) un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^*$.

On a nécessairement : $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$, et, d'après la remarque du para-

graphe 2.5, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

- Tout rationnel r admet au moins un représentant (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^*$.

On a donc nécessairement : $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

L'application cherchée, si elle existe, est donc unique.

Existence.

• L'application f est bien déterminée :

Soient r un rationnel quelconque et (p, q) et (p', q') deux éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ qui le représentent. On a donc : $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ et aussi : $a^r = a^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q']{a^{p'}}$.

Il résulte de l'égalité : $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ que l'on a : $pq' = p'q$ et par suite :

$$(\sqrt[q]{a^p})^{pq'} = (\sqrt[q]{a^p})^{p'q} = ((\sqrt[q]{a^p})^q)^{p'} = (a^p)^{p'} = a^{pp'}$$

$$\text{et aussi : } (\sqrt[q']{a^{p'}})^{pq'} = ((\sqrt[q']{a^{p'}})^{q'})^p = (a^{p'})^p = a^{pp'}$$

On a donc : $(\sqrt[q]{a^p})^{pq'} = (\sqrt[q']{a^{p'}})^{pq'}$ et par suite : $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$.

• Soient maintenant r et r' deux rationnels quelconques de représentants respectifs les couples (p, q) et (p', q') de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.

On a : $(a^r)^{r'} = \sqrt[q']{(\sqrt[q]{a^p})^{p'}} = \sqrt[q']{\sqrt[q]{(a^p)^{p'}}} = \sqrt[qq']{a^{pp'}} = a^{\frac{pp'}{qq'}} = a^{rr'}$.

L'application ainsi définie répond donc à la question. ■

Remarque : Si a est nul, on ne peut définir a^r que si r est strictement positif; pour éviter les confusions, on ne considère pas le cas où $a = 0$.

Exemples.

1. On a : $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

2. On a : $16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

3. On a : $1^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{1^4} = \sqrt[5]{1} = 1$.

Formules.

3.3 Nous allons démontrer que le prolongement obtenu dans le paragraphe 3.2 satisfait aussi aux autres propriétés rappelées dans le paragraphe 3.1.

Soient a et b deux réels strictement positifs et r et r' deux nombres rationnels de représentants respectifs $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, avec q et q' strictement positifs. On a les formules suivantes :

$(a^r)^{r'} = a^{rr'}$ (1)	$(ab)^r = a^r b^r$ (4)
$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$ (2)	$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (5)
$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$ (3)	

Démonstration :

1. Cette propriété a été démontrée dans le paragraphe 3.2.

$$\begin{aligned} 2. \text{ On a : } a^r \times a^{r'} &= \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[q']{a^{p'}} = \sqrt[qq']{a^{pq'}} \times \sqrt[qq']{a^{p'q}} \\ &= \sqrt[qq']{(a^{pq'})(a^{p'q})} = \sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}} \\ &= a^{\frac{pq'+p'q}{qq'}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}} = a^{r+r'}. \end{aligned}$$

3. On a : $\frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[r]{a^p}}{\sqrt[s]{a^p}} = \frac{\sqrt[r]{a^{pq}}}{\sqrt[s]{a^{pq}}} = \sqrt[\frac{r}{s}]{\frac{a^{pq}}{a^{pq}}} = \sqrt[\frac{r}{s}]{a^{\frac{pq^1 - p^1 q}{q^1 s}}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{q^1 - p^1}{s}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{p^1}{q^1}} = a^{r - r^1}.$
4. On a : $(ab)^r = \sqrt[r]{(ab)^p} = \sqrt[r]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[r]{a^p} \times \sqrt[r]{b^p} = a^{\frac{p}{r}} \times b^{\frac{p}{r}} = a^r \times b^r.$
5. On a : $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \sqrt[r]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[r]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[r]{a^p}}{\sqrt[r]{b^p}} = \frac{a^r}{b^r} \quad \blacksquare$

Exemples.

Simplifions $A = \frac{2^{\frac{3}{4}} \times 8^{-\frac{5}{3}}}{4^{-\frac{7}{4}}}$

On a : $8^{-\frac{5}{3}} = (2^3)^{-\frac{5}{3}} = 2^{-\frac{15}{3}} = 2^{-5}$

$4^{-\frac{7}{4}} = (2^2)^{-\frac{7}{4}} = 2^{-\frac{14}{4}} = 2^{-\frac{7}{2}}$

et par suite : $A = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-5} \times 2^{-(-\frac{7}{2})}$
 $= 2^{\frac{3}{4} - 5 + \frac{7}{2}} = 2^0 = 1.$

EXERCICES

Fonction réciproque d'une fonction continue.

1 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ est une bijection de $[0, 2]$ sur $[-3, 5]$. Préciser la bijection réciproque.

2 Soit f l'application de $]2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in]2, +\infty[, \quad f(x) = 2x - \frac{3x+9}{x-2}.$

Montrer que f admet une application réciproque que l'on précisera.

3 Soit f l'application de $[2, 6]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in [2, 6], \quad f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x-1}$

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. Quel est le sens de variation de f^{-1} sur J ? Pour tout x de J , déterminer, en fonction de x , le réel $f^{-1}(x)$.

4 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x+1}{2x-5}$.

1° Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

2° Démontrer que f est une bijection de D_f sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

3° Expliciter f^{-1} .

* 5 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $0 < a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui possède la propriété suivante :

$\exists k \in \mathbb{R}^*, \forall (x, x') \in [a, b] \times [a, b], (x \neq x' \implies |f(x) - f(x')| < k|x^3 - x'^3|)$.

1° Démontrer que f est uniformément continue sur $[a, b]$ (cf. exercice n° 36 du chapitre 5).

2° Soit φ la fonction : $x \mapsto f(x) - kx^3$.

Démontrer que φ est continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

3° On suppose, de plus, que l'on a : $\forall x \in [a, b], ka^3 \leq f(x) \leq kb^3$.

Démontrer qu'il existe un unique réel α de $[a, b]$ tel que l'on ait : $\varphi(\alpha) = 0$.

6 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - |x|} - x$.

1° Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Quelle est la limite de f en 0?

2° Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3° Démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

4° Vérifier que la fonction réciproque de f est la fonction $x \mapsto |x|x$.

* 8 1° Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 1 + \sqrt{x} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -1 - \sqrt{-x}. \end{cases}$$

a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la continuité de f en 0.

c) Démontrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et croissante sur $\mathbb{R}$, telle que l'on ait : $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

A-t-on : $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$?

d) Construire, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives respectives de f et de g .

2° De façon générale, soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et bornée sur $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et croissante sur $\mathbb{R}$, telle que l'on ait : $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

b) Donner une condition suffisante pour que l'on ait aussi : $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

9 1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - \frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, on a la double inégalité :

$$x - \frac{x^2}{2} < \frac{x}{\sqrt{1+x}} < x.$$

2° Déterminer le réel b tel que la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - (1+bx)}{x^2}$ ait une limite finie c en 0; calculer c .

En déduire qu'il existe une fonction ε définie sur un intervalle épointé I de centre 0 et telle que l'on ait :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \\ \forall x \in I, \sqrt{1+x} = 1 + bx + cx^2 + x^2 \varepsilon(x). \end{cases}$$

Radicaux.

10 Simplifier : $2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt{36}$.

11 Simplifier : $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

12 Simplifier : $\frac{\sqrt{8} + 2\sqrt{10}}{2\sqrt{5} - 2}$.

13 Simplifier : $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des deux équations suivantes :

(1) $x^3 + 27 = 0$.

(2) $x^5 - 4x^3 + 27x^2 - 108 = 0$.

15 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{(x^2 - 8)(x^3 + 125)}{x^3 - 16\sqrt{2}} = 0.$$

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x = 31.$$

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(x\sqrt{2} - \sqrt{3})^6 = \left(x\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right)^3.$$

* 18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(x - \sqrt{7})^8 = (2x^2 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{7})x - \sqrt{21})^4.$$

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{3 - \sqrt[3]{x}}\right)^3 + 125 = 0.$$

20 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} (x\sqrt{3} - y\sqrt{2})^2 = (2x + 3y)^2 \\ x^3 = (y - 1)^3. \end{cases}$$

21 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]2, +\infty[. & f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \\ \forall x \in]-\infty, 2[. & f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}. \end{cases}$$

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2 ?

22 Soient a un réel et f_a la fonction : $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + ax + a}}{x - 2}$.

1° Quel est l'ensemble de définition de f_a ?

2° Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a admet-elle un prolongement par continuité en 2 ?

23 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 16} - \sqrt{4x^2 + 2x}}{x(x - 2)}$.

1° Quel est l'ensemble de définition de f ?

2° Déterminer les limites éventuelles respectives de f en $+\infty$, en 0, en 2.

24 Déterminer la limite éventuelle en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x} - \sqrt[3]{2x^3 + x}}{x}$$

25 Déterminer la limite éventuelle en 3 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

26 Déterminer la limite éventuelle en 2 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{2x^2 + 7x - 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 6}}{x - 2}$$

27 Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 7x + 5} - \sqrt{3x^2 + x - 1}.$$

28 Déterminer les limites éventuelles respectives en $+\infty$, en -1 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt[3]{2x^3 + 5x + 7} - \sqrt[3]{3x^3 + 7x^2 - 4}}{x + 1}$$

29 Soit m un réel. Déterminer, suivant le réel m , les limites éventuelles respectives en $+\infty$, en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{m^2x^2 + x + 2m^2}}{x}$$

30 Soit m un réel. Déterminer, suivant le réel m , les limites éventuelles respectives en $+\infty$, en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + mx + 2m} - \sqrt{x^2 - mx + m + 5}}{\sqrt{x^2 + m} - 5}$$

31 Soient a et b deux réels. Déterminer, suivant les réels a et b , les limites éventuelles respectives :

1° en $+\infty$ de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^4 + ax^2 + b} - \sqrt{x^4 + (a + b)x^2 + a}$

2° en 0 de la fonction : $x \mapsto \frac{\sqrt{x^4 + ax^2 + b} - \sqrt{x^4 + (a + b)x^2 + a}}{x}$.

32 Soient a et b deux réels. Déterminer, suivant les réels a et b , les limites éventuelles respectives en $+\infty$, en $-\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{ax^2 + ax + 1} - \sqrt{bx^2 + 2x + b}}{\sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{2x^2 + 7x + 7}}$$

Puissances rationnelles.

33 Simplifier :
$$\frac{\sqrt[3]{a^5} \times (\sqrt[4]{a^7})^2}{(a^2)^2 \times \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{a^3}}$$

34 Simplifier :
$$\frac{27^{-\frac{2}{3}} \times 49^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{5}{4}}}{(\sqrt[5]{243})^2}$$

35 Simplifier :

$$\left(27^{\frac{1}{6}} - 2(5)^{\frac{1}{2}}\right) \left(27^{\frac{1}{2}} + 4(400)^{\frac{1}{4}}\right) \left(20^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) \left(3(9)^{\frac{1}{4}} - 8(5)^{\frac{1}{2}}\right)$$

◆ Dans les exercices suivants (nos 36 à 39), mettre A sous forme d'un quotient dont le dénominateur est rationnel.

36 $A = \frac{10^{\frac{3}{2}} \times 8^{-\frac{4}{3}}}{5 \times 4^{-\frac{7}{3}}}$

37 $A = \frac{1}{\sqrt[4]{5} - 1}$

38 $A = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1}$

39 $A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}$

40 Démontrer, pour tout élément (a, b) de $\mathbb{R}^2$, l'égalité suivante :

$$\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}\right)^3$$

41 1° Développer $(2 + \sqrt{5})^3$.

2° Simplifier : $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$

42 Soient a et b deux réels.

1° Exprimer a en fonction de b pour que l'on ait :

$$a^{\frac{4}{5}} - 2b^2 a^{\frac{2}{5}} + b^4 = 0.$$

2° Simplifier :

$$\frac{a^{\frac{6}{5}} - 3a^{\frac{4}{5}}b^2 + 3a^{\frac{2}{5}}b^4 - b^6}{a^{\frac{4}{5}} - 2b^2 a^{\frac{2}{5}} + b^4}$$

43 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = 0 \\ x^{\frac{1}{2}} - 32y^{\frac{1}{4}} = 0. \end{cases}$$

44 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{3}} = 0 \\ x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{3}} = 4. \end{cases}$$

45 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x^2 + 3x^4y^{\frac{1}{4}} = -x^4 \\ 3x^2 - x^4y^{\frac{1}{4}} = 2x^4. \end{cases}$$

46 Soit r un nombre rationnel non nul.

Démontrer que la fonction : $x \mapsto x^r$ admet une limite en $+\infty$, égale à 0 si r est négatif, et à $+\infty$ si r est positif.

47 Déterminer les limites éventuelles respectives en $+\infty$, en 1 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2 - x} - \sqrt[3]{x^3 - 7x + 6}}{(x - 1)}.$$

48 Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 2} - \sqrt[5]{x^2 + 2x}}{x^3 - x^2 + 5}.$$

49 Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{7}{5}} + x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{7}{3}}}.$$

50 Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{12}{5}}}.$$

51 Soient a, b, m trois réels. Déterminer, suivant les valeurs de a , de b , de m , la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + 1} - mx\sqrt{x + 2}.$$

7.

Dérivation

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés vues en classe de Première et nous donnons quelques compléments.

1. Fonction dérivable en un point.

Le but de cette étude est l'approximation au voisinage d'un réel x_0 de fonctions numériques f définies sur un intervalle de centre x_0 par des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ telles que $ax_0 + b = f(x_0)$.

Définitions.

Soient x_0 un réel et α un réel strictement positif; nous désignons par $\delta_{x_0, \alpha}$ l'ensemble des fonctions f définies sur l'intervalle de centre x_0 et de rayon α telles que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f = 0$.

Différentiabilité et dérivabilité.

1.1 DÉFINITION : Soient x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle D auquel appartient x_0 .

On dit que f est différentiable en x_0 si et seulement s'il existe un intervalle I de centre x_0 et de rayon α , inclus dans D , un réel m et un élément φ de $\delta_{x_0, \alpha}$ tels que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$.

La fonction qui, à tout réel x , associe le réel $mx + f(x_0) - mx_0$ est appelée la **fonction affine tangente à f au point x_0** .

La fonction qui, à tout réel x , associe le réel mx est appelée **fonction linéaire tangente à f au point x_0** ou encore **différentielle de f en x_0** et est notée df_{x_0} .

Le réel m est appelé **coefficient de la différentielle de f en x_0** .

Remarque : Considérons $\mathbb{R}$ comme espace affine associé à $\mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto mx$ est alors l'endomorphisme associé à l'application affine $x \mapsto mx + f(x_0) - mx_0$.

Exemples.

1. Soient la fonction $f: x \mapsto 2x + 3$ et x_0 un réel quelconque.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(x_0) = 2x + 3 - (2x_0 + 3) = 2(x - x_0)$

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0) + 2(x - x_0)$.

La fonction f est donc différentiable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et le coefficient de la différentielle de f en x_0 est égal à 2.

D'une manière générale, toute fonction affine est différentiable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction $g: x \mapsto x^2 + x - 5$.

Cherchons si cette fonction est différentiable en 3.

On a : $g(3) = 7$ et par suite :

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - g(3) = x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4) = (x - 3)(x + 7 - 3)$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(3) + 7(x - 3) + (x - 3)(x - 3)$.

La fonction $x \mapsto x - 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a : $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$.

La fonction g est donc différentiable en 3 et le coefficient de la différentielle de g en 3 est égal à 7.

1.2 DÉFINITION : Soient x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle D auquel appartient x_0 .

f est dérivable en x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie / au point x_0 .

Le réel / est appelé **nombre dérivé de f au point x_0** .

Remarque : De cette définition il résulte qu'une fonction f n'est pas dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ n'a pas de limite en x_0 , ou bien si elle a une limite infinie en x_0 .

Exemples.

Reprenons les exemples du paragraphe 1.1.

1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x + 3 - (2x_0 + 3)}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} = 2$$

$$\text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2.$$

La fonction f est donc dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et de nombre dérivé 2 en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

D'une manière générale, toute fonction affine est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

2. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 4)}{x - 3} = x + 4$$

$$\text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = 7.$$

La fonction g est donc dérivable au point 3 et de nombre dérivé égal à 7.

Plus généralement, on a le théorème suivant :

1.3 THÉORÈME : Soient x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle D auquel appartient x_0 . Soit l un réel.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est dérivable en x_0 et de nombre dérivé l .
 (2) f est différentiable en x_0 et le coefficient de sa différentielle est l .

Démonstration :

(2) $\implies$ (1) Il existe un intervalle I de centre x_0 et de rayon α et un élément φ de $\mathcal{E}_{x_0, \alpha}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x).$$

$$\text{On a alors : } \forall x \in I - \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l + \varphi(x)$$

$$\text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (l + \varphi(x)) = l + \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = l.$$

(1) $\implies$ (2) Soient a un réel et φ la fonction définie par :

$$(\forall x \in D - \{x_0\}, \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l) \text{ et } \varphi(x_0) = a.$$

$$\text{On a alors : } \forall x \in D, f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right) = l - l = 0.$$

Si I est un intervalle de centre x_0 contenu dans D , on a alors, a fortiori :

$$(\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi = 0. \blacksquare$$

Remarque : Suivant les problèmes, il est plus commode d'utiliser l'une de ces définitions plutôt que l'autre.

Dérivabilité à droite. Dérivabilité à gauche.

1.4 DÉFINITION : Soient x_0 un réel et α un réel strictement positif.
 Soit f une fonction définie sur $[x_0, x_0 + \alpha[$ (resp. $]x_0 - \alpha, x_0]$). On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ a une limite finie à droite (resp. à gauche) en } x_0.$$

Remarque : Si une fonction f est dérivable en x_0 , elle est dérivable à droite et dérivable à gauche en x_0 .

Exemples.

1. Soit la fonction $f: x \mapsto |x|$.

Étudions la dérivabilité de f en 0.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -x)$, et par suite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0; mais elle est dérivable à droite de nombre dérivé 1 et dérivable à gauche de nombre dérivé -1.

2. Soit la fonction $f: x \mapsto |x^3 - 1|$.
Étudions la dérivabilité de f en 1.

On a : $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = x^3 - 1$ et $\forall x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = -(x^3 - 1)$
et par suite :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} = -(x^2 + x + 1).$$

$$\text{On a donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -3.$$

La fonction f n'est pas dérivable en 1; mais elle est dérivable à droite de nombre dérivé 3 et dérivable à gauche de nombre dérivé -3 .

Dérivabilité et continuité.

1.5 THÉORÈME : Soient x_0 un réel et f une fonction définie sur un intervalle D auquel appartient x_0 .

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Démonstration :

Il existe un intervalle I de centre x_0 et de rayon α , un réel m et un élément φ de $\mathcal{S}_{x_0, \alpha}$ tels que : $\forall x \in I$, $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ et par suite : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Mais la réciproque est fautive; une fonction continue en un point x_0 n'est pas nécessairement dérivable en ce point. Considérons, par exemple, la fonction valeur absolue. Nous avons démontré dans l'exemple 3 du paragraphe 1.2 du chapitre 5 qu'elle est continue en 0, puis, dans l'exemple 1 du paragraphe 1.4 du chapitre 7, qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique.

Nous rappelons les définitions et résultats suivants.

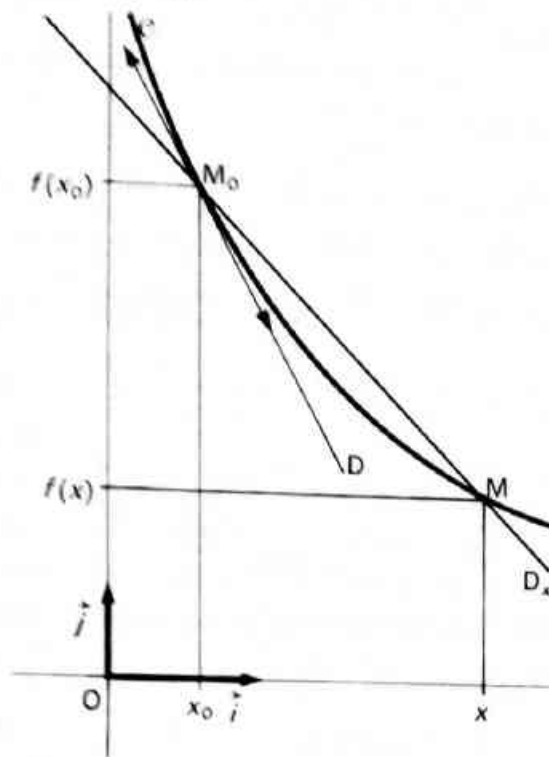
Soient P un plan affine réel et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P .

Position limite d'une droite.

- 1.6** Soient M_0 un point de P et λ_0 un réel. Soient I un intervalle épointé de centre λ_0 et c une fonction définie sur I .
Pour tout réel λ , nous désignons par D_λ la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $c(\lambda)$.
On dit que la droite D_λ a une **position limite D quand λ tend vers λ_0** si la fonction c admet une limite en λ_0 , finie ou non.
Si la limite de c en λ_0 est finie et égale à m , la droite D est la droite passant par M_0 et de coefficient directeur m .
Si la limite de c en λ_0 est infinie, la droite D est la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{j}$.

Tangente en un point à une courbe.

1.7 Soit x_0 un réel. Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I de centre x_0 et C la courbe représentative de f dans le plan P rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit M_0 le point de C d'abscisse x_0 .



Soient x un élément de $I - \{x_0\}$ et M le point de C d'abscisse x .

Les coordonnées de M_0 (resp. M) sont $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$).

Considérons la droite D_x déterminée par les deux points distincts M et M_0 . Le coefficient directeur de D_x est égal à $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

La courbe C admet une tangente en M_0 si et seulement si la droite D_x a une position limite D quand x tend vers x_0 . La droite D est appelée **tangente à C en M_0** .

Des définitions précédentes nous déduisons :

si la fonction f est dérivable en x_0 , de nombre dérivé m , la courbe C admet une tangente en M_0 d'équation : $y - f(x_0) = m(x - x_0)$,

si la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 est infinie, la courbe C admet une tangente en M_0 d'équation : $x = x_0$, appelée tangente verticale par abus de langage.

Exemples.

1. Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 + x - 5$.

Nous avons démontré dans le paragraphe 1.2 que cette fonction est dérivable au point 3, de nombre dérivé égal à 7.

Soit M le point de la courbe représentative de f d'abscisse 3. Les coordonnées de M sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. La courbe C admet au point M une tangente d'équation : $y - 7 = 7(x - 3)$, c'est-à-dire : $y = 7x - 14$.

2. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 1[, & f(x) = -\sqrt{1-x}, \\ & f(1) = 0, \\ \forall x \in]1, +\infty[, & f(x) = \sqrt{x-1}. \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et nous laissons au lecteur le soin de démontrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Étudions si la courbe représentative de f admet une tangente au point M d'abscisse 1.

Les coordonnées de M sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ admet une limite au point 1.

Il faut distinguer deux cas : $x \in]-\infty, 1[$ et $x \in]1, +\infty[$.

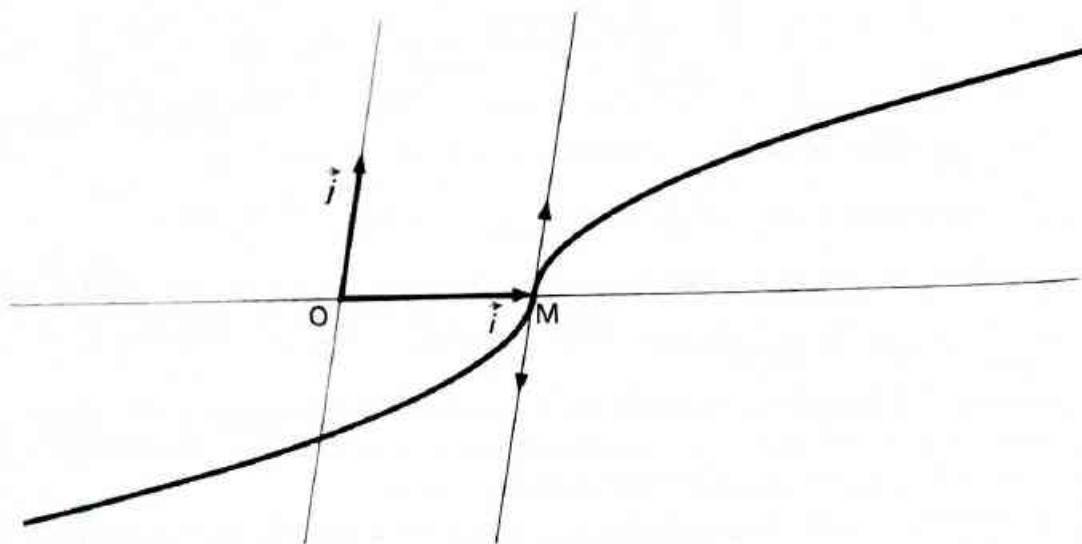
$$\text{On a : } \forall x \in]-\infty, 1[, \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-\sqrt{1-x}}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\text{et : } \forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{Par suite on a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty.$$

$$\text{On a donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty.$$

La courbe représentative de f admet donc au point M une tangente d'équation : $x = 1$.

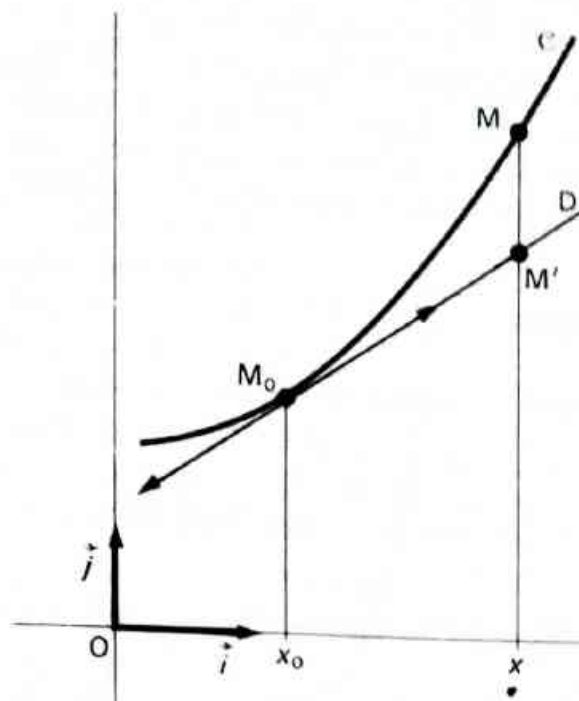


Remarque : Dans le cas où f est dérivable en x_0 de nombre dérivé m , désignons par D la tangente à C en M_0 . Soit M' le point de D de même abscisse x que le point M .

Les coordonnées de M' sont donc $\begin{pmatrix} x \\ f(x_0) + m(x - x_0) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \overline{M'M} &= f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) \\ &= f(x) - f(x_0) - m(x - x_0). \end{aligned}$$

Puisque la fonction f est différentiable en x_0 , il existe un élément φ de $\mathcal{E}_{x_0, \alpha}$ tel que : $\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$.



On a donc : $\overline{M'M} = (x - x_0) \varphi(x)$.

L'étude du signe de $(x - x_0) \varphi(x)$ permet alors de déterminer la position de C par rapport à la tangente à C en M_0 .

Demi-tangente à droite (resp. à gauche) en un point d'une courbe.

1.8 Reprenons les mêmes notations qu'au paragraphe 1.7.

On dit que la courbe C admet une **demi-tangente à droite (resp. à gauche)** en M_0 si et seulement si la droite D_x a une position limite quand x tend vers x_0 à droite (resp. à gauche).

• Si la fonction f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 , de nombre dérivé m , la courbe C admet au point M_0 une demi-tangente à droite (resp. à gauche); c'est la demi-droite définie par :

$$\begin{cases} y - f(x_0) = m(x - x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \quad \left(\text{resp.} \begin{cases} y - f(x_0) = m(x - x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases} \right).$$

• Si la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 à droite (resp. à gauche) est $+\infty$, la courbe C admet au point M_0 une demi-tangente à droite (resp. à gauche); c'est la

demi-droite définie par : $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$ (resp. $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$).

• Si la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 à droite (resp. à gauche) est $-\infty$, la courbe C admet au point M_0 une demi-tangente à droite (resp. à gauche); c'est la

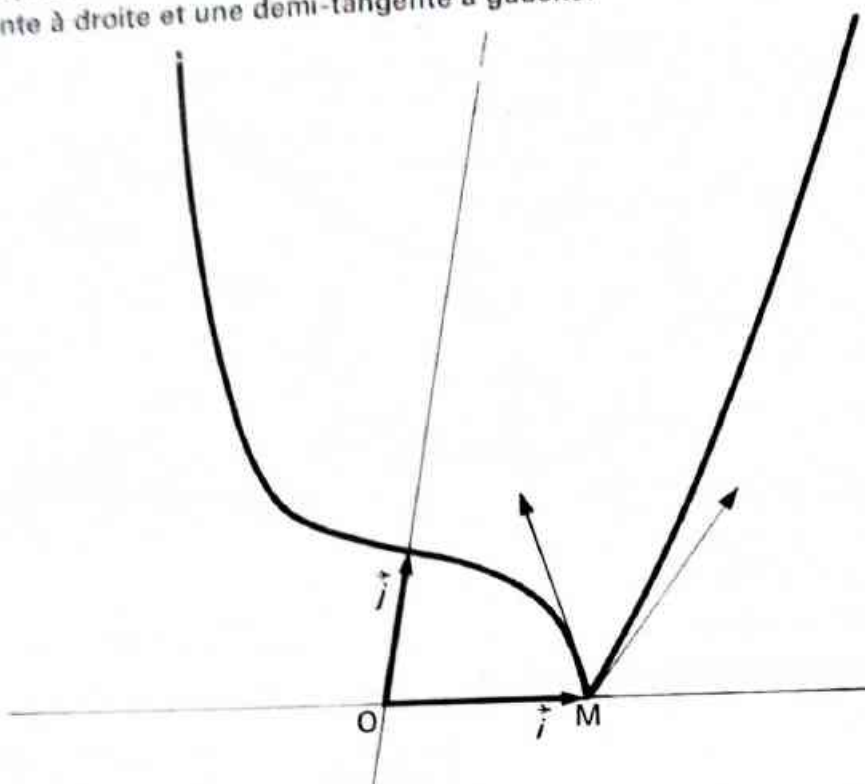
demi-droite définie par : $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$ (resp. $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$).

Dans les deux derniers cas, on dit parfois que la courbe C admet une demi-tangente verticale à droite (resp. à gauche) en M_0 .

Dans le cas où la courbe C admet en M_0 une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche de supports distincts, on dit que M_0 est un **point anguleux**.

Exemples.

1. Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 1.4. La fonction : $x \mapsto |x^3 - 1|$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en 1, de nombre dérivé 3 (resp. -3). La courbe représentative de cette fonction admet donc au point M d'abscisse 1 une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche.



La demi-tangente à droite est définie par : $y = 3(x - 1)$ et $x \geq 1$; la demi-tangente à gauche est définie par : $y = -3(x - 1)$ et $x \leq 1$.

Le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point anguleux.

2. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est définie sur $[0, +\infty[$. Cherchons si la courbe représentative admet une tangente à droite en 0.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; de plus, pour $x \geq 0$, on a :

$\sqrt{x} \geq 0$. La courbe représentative de f admet donc en 0 une demi-tangente à droite définie par : $x = 0$ et $y \geq 0$.

2. Fonction dérivée.

Définitions.

2.1 DÉFINITION : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I . f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I . L'application de I dans $\mathbb{R}$, qui, à tout élément x de I , associe le nombre dérivé de f en x , est appelée fonction dérivée de la fonction f et est notée f' .

Le nombre dérivé de f en un point x_0 de I est noté $f'(x_0)$.

D'une façon analogue, soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$.
 f est dérivable sur $[a, b]$ si et seulement si f possède les trois propriétés suivantes :

- elle est dérivable sur $]a, b[$;
- elle est dérivable à droite en a ;
- elle est dérivable à gauche en b .

On appelle **fonction dérivée de f sur $[a, b]$** , et on note encore f' , l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

si x est élément de $]a, b[$, alors $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x ;

$f'(a)$ est le nombre dérivé à droite de f en a ;

$f'(b)$ est le nombre dérivé à gauche de f en b .

On a des définitions analogues pour les fonctions dérivées sur les intervalles $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$.

Remarques : 1. Il importe de ne pas confondre f' , $f'(x_0)$ et df_{x_0} .

On a $df_{x_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto xf'(x_0).$$

2. L'équation de la **tangente** à la courbe représentative de f au point M_0 d'abscisse x_0 est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Si f est différentiable en x_0 , alors il existe un intervalle I , de centre x_0 et de rayon α , et un élément φ de $\mathcal{E}_{x_0, \alpha}$ tels que l'on ait :

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varphi(x).$$

Exemples.

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto x$, définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x_0 un réel quelconque.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \text{ et, par suite :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1.$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1$.

2. Considérons la fonction $\cos$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x_0 un élément quelconque de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}, \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= -2 \frac{\sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= -\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \sin \frac{x + x_0}{2}. \end{aligned}$$

De l'étude faite dans le paragraphe 3.14 du chapitre 5, il résulte la propriété :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin x_0.$$

La fonction $\cos$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $(\cos)' = -\sin$.

3. Considérons la fonction $f : x \longmapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$.

De l'exemple 1 du paragraphe 1.4, il résulte que f est dérivable sur $]-\infty, 0]$, de fonction dérivée $x \longmapsto -1$, et qu'elle est dérivable sur $[0, +\infty[$, de fonction dérivée $x \longmapsto 1$.

Mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriétés (rappels).

2.2 Nous rappelons les propriétés suivantes, démontrées en classe de Première.

Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur un intervalle ouvert non vide $]a, b[$, par $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $]a, b[$.

P1

$\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

P2

L'application qui, à tout élément f de $\mathcal{D}$, associe sa fonction dérivée f' est une application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{F}$.

On a donc : $\forall (f, g) \in \mathcal{D}^2, (f + g)' = f' + g'$;
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{D}, (\lambda f)' = \lambda f'$.

P3

$\mathcal{D}$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}$.

On a donc : $\forall (f, g) \in \mathcal{D}^2, (fg)' = f'g + fg'$.

P4

Les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{D}$ sont les fonctions qui ne s'annulent pas sur $]a, b[$.

Si g est un élément inversible de $\mathcal{D}$, on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Il résulte des propriétés P_3 et P_4 que, si f est un élément de $\mathcal{D}$ et g un élément inversible de $\mathcal{D}$, on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exemples

1. Nous avons démontré dans l'exemple 1 du paragraphe 2.1 que la fonction $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Il résulte de la propriété P_3 que la fonction qui, à tout réel x , associe le réel x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction dérivée est définie par : $x \mapsto 1 \cdot x + x \cdot 1$,

c'est-à-dire par : $x \mapsto 2x$.

2. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que pour tout entier naturel n la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

De la propriété P_2 il résulte que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0; la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Fonctions dérivées des fonctions usuelles (rappels).

2.3 Nous rassemblons les résultats démontrés en classe de Première dans le tableau suivant : nous désignons par D_f l'ensemble de définition de la fonction f , par $D_{f'}$ celui de la fonction dérivée f' de f , par a un réel et par n un entier naturel non nul.

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto x^{-n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Composition de fonctions dérivables.

2.4 THÉORÈME : Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert non vide K , et g une fonction dérivable en tout point de $f(K)$.

Alors, $g \circ f$ est dérivable sur K , et l'on a :

$$\forall x_0 \in K, (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$$\forall x_0 \in K, d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \cdot df_{x_0}.$$

Démonstration :

La fonction f est dérivable sur K ; elle est donc continue sur K , et par suite $f(K)$ est un intervalle non vide.

Soit x_0 un élément quelconque de K . La fonction f est dérivable en x_0 ; il existe donc un intervalle I de centre x_0 et de rayon α , et un élément φ de $\mathcal{E}_{x_0, \alpha}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x).$$

La fonction g est dérivable en $f(x_0)$; il existe donc un intervalle J de centre $f(x_0)$ et de rayon β et un élément ψ de $\mathcal{E}_{f(x_0), \beta}$ tels que :

$$\forall y \in J, g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + (y - f(x_0))\psi(y).$$

Soit ψ_1 la fonction définie par :

$$(\forall y \in J - \{f(x_0)\}, \psi_1(y) = \psi(y)) \text{ et } \psi_1(f(x_0)) = 0.$$

La fonction ψ_1 est donc continue en $f(x_0)$, et on a :

$$\forall y \in J, g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + (y - f(x_0))\psi_1(y).$$

La fonction f est dérivable en x_0 ; elle est donc continue en x_0 .

De la définition 1.2 du chapitre 5, il résulte qu'il existe un intervalle I_1 de centre x_0 tel que : $f(I_1) \subset J$.

I et I_1 sont deux intervalles de centre x_0 ; leur intersection $I \cap I_1$ est donc un intervalle de centre x_0 . On a alors : $(\forall x \in I \cap I_1, f(x) \in J)$ et par suite :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \cap I_1, g(f(x)) &= g(f(x_0)) + (g'(f(x_0)) + \psi_1(f(x)))(f(x) - f(x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + (g'(f(x_0)) + \psi_1(f(x)))(f(x_0) + \varphi(x))(x - x_0) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + (x - x_0)(g'(f(x_0))\varphi(x) + \psi_1(f(x))(f(x_0) + \varphi(x))). \end{aligned}$$

Désignons par Φ la fonction définie par :

$$\forall x \in I \cap I_1, \quad \Phi(x) = g'(f(x_0)) \varphi(x) + \psi_1(f(x)) (f'(x_0) + \varphi(x)).$$

Par définition, on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$.

D'autre part, il résulte de la continuité de la fonction ψ_1 en $f(x_0)$ et de celle de la fonction f en x_0 que la fonction $\psi_1 \circ f$ est continue en x_0 ; on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\psi_1 \circ f)(x) = (\psi_1 \circ f)(x_0) = \psi_1(f(x_0)) = 0.$$

Par suite on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = 0$.

On obtient finalement :

$$\forall x \in I \cap I_1, \quad g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) f'(x_0) (x - x_0) + (x - x_0) \Phi(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi = 0$.

La fonction $g \circ f$ est donc dérivable en x_0 et l'on a : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. ■

Applications.

2.5 • Soient a et b deux réels.

La fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ est différentiable sur $\mathbb{R}$; il en est de même pour les fonctions sin et cos.

Les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs fonctions dérivées sont respectivement définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos \circ f)'(x) = (\cos)'(f(x)) f'(x) = -\sin(ax + b) \times a = -a \sin(ax + b)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\sin \circ f)'(x) = (\sin)'(f(x)) f'(x) = \cos(ax + b) \times a = a \cos(ax + b).$$

• Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide K et telle que :

$$\forall x \in K, f(x) \geq 0.$$

Supposons f dérivable sur K . La fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $\sqrt{f}$ est donc dérivable en tout point de K où f ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x \in K - f^{-1}(\{0\}), (\sqrt{f})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

• Soient f une fonction dérivable sur K et n un entier naturel différent de 0.

La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction $x \mapsto (f(x))^n$ est donc dérivable sur K , de fonction dérivée $x \mapsto n(f(x))^{n-1} f'(x)$.

De même la fonction $x \mapsto (f(x))^{-n}$ est dérivable en tout point de K où f ne s'annule pas.

Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant; nous utilisons les mêmes notations que dans le tableau du paragraphe 2.3.

$x \mapsto \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{f}$	$D_{\sqrt{f}}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$D_{\sqrt{f}} - f^{-1}(\{0\})$
$f^n (n \in \mathbb{N}^*)$	D_f	$nf^{n-1}f'$	D_f
$f^{-n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$D_f - f^{-1}(\{0\})$	$-nf^{-n-1}f'$	$D_f - f^{-1}(\{0\})$

Exemples.

1. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Pour que cette fonction soit définie, il faut et il suffit que $1-x^2$ soit positif ou nul. On a donc : $D_f = [-1, 1]$.

De l'étude précédente, il résulte que la fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Soit la fonction $f: x \mapsto \sin(2x+3)^3$.

Soient les fonctions $f_1: x \mapsto 2x+3$ et $f_2: x \mapsto x^3$.

On a alors : $f = (\sin) \circ f_2 \circ f_1$.

Les fonctions $\sin, f_2, f_1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $f' = ((\sin)' \circ f_2 \circ f_1) \times (f_2 \circ f_1)' = \cos \circ (f_2 \circ f_1) \times (f_2' \circ f_1) \times f_1'$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \cos(2x+3)^3 \cdot 3(2x+3)^2 \cdot 2 \\ &= 6(2x+3)^2 \cos(2x+3)^3. \end{aligned}$$

Fonction réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone.

2.6 THÉORÈME : Soit f une fonction dérivable, strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle ouvert non vide I et telle que la fonction dérivée f' ne s'annule pas sur I .

Alors f^{-1} est une application bijective de $f(I)$ sur I ; la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et l'on a, pour tout réel x_0 de $f(I)$:

$$(df^{-1})_{x_0} = (df_{x_0})^{-1}.$$

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration :

Nous faisons la démonstration dans le cas où f est strictement croissante sur I .

La fonction f est dérivable sur I , donc continue sur I .

Il résulte du théorème 2.1 du chapitre 6 que la fonction f , continue et strictement croissante sur I , est une bijection de I sur l'intervalle ouvert $f(I)$, et que l'application réciproque f^{-1} est une bijection continue de $f(I)$ sur I .

Soit x_0 un élément de $f(I)$.

Étudions la dérivabilité de f^{-1} en x_0 .

La fonction f est bijective; il existe donc un unique élément y_0 de I tel que :

$$f(y_0) = x_0.$$

Soit x un élément quelconque de $f(I) - \{x_0\}$; désignons par y l'unique élément de I tel que : $f(y) = x$.

$$\text{On a alors : } \forall x \in f(I) - \{x_0\}, \quad \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}$$

Cherchons la limite éventuelle en x_0 de la fonction $x \mapsto \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$.

La fonction $x \mapsto \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$ est la composée de la fonction f^{-1} et

de la fonction $y \mapsto \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}$.

La fonction f^{-1} est continue en x_0 ; elle admet donc en x_0 une limite égale à $f^{-1}(x_0)$, c'est-à-dire à y_0 . D'autre part, la fonction f^{-1} est une bijection; on a donc :

$\forall x \in f(I) - \{x_0\}, f^{-1}(x) \neq f^{-1}(x_0)$, c'est-à-dire : $\forall x \in f(I) - \{x_0\}, f^{-1}(x) \neq y_0$.

La fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée ne s'annule pas sur I ;

$$\text{on a donc : } \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

De la propriété P_2 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(y_0)},$$

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}. \quad \blacksquare$$

Applications.

- 2.7 • Nous avons démontré dans le chapitre 6 que pour tout entier naturel n différent de 0, la fonction $x \mapsto x^n$ est une application f bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'autre part cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle admet donc une fonction réciproque, définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}. \quad (1)$$

• Soient r un nombre rationnel non nul et la fonction $f: x \mapsto x^r$.

Soit (p, q) un élément de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}_+^*$ qui représente r .

Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^r = \sqrt[q]{x^p}$.

Soient f_1 la fonction : $x \mapsto x^p$ et f_2 la fonction : $x \mapsto \sqrt[q]{x}$.

On a alors : $f = f_2 \circ f_1$. Les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $f' = f_2(f_1) \times f_1'$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{q} (x^p)^{\frac{1}{q}-1} \times p x^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-p+1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = r x^{r-1}. \quad (2)$$

Remarquons que la proposition (1) se déduit de la proposition (2) dans le cas où

$$\text{l'on a : } r = \frac{1}{n}.$$

Nous invitons donc le lecteur à retenir le résultat suivant, pour tout nombre rationnel r non nul :

$f: x \mapsto x^r$	$D_f = \mathbb{R}_+^*$	$f': x \mapsto r x^{r-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$
--------------------	------------------------	---------------------------	---------------------------

Dérivées successives.

2.8 Soient f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et f' la fonction dérivée de f , définie sur $]a, b[$.

Supposons que la fonction f' soit elle-même dérivable sur $]a, b[$; elle admet donc une fonction dérivée, appelée **fonction dérivée seconde de f** et notée f'' . La fonction f est dite **deux fois dérivable sur $]a, b[$** .

Si la fonction dérivée seconde est dérivable sur $]a, b[$, la fonction dérivée de f'' est appelée **fonction dérivée troisième de f** ou **fonction dérivée d'ordre 3 de f** , notée $f^{(3)}$. La fonction f est dite trois fois dérivable sur $]a, b[$.

Plus généralement, si la fonction f est n fois dérivable sur $]a, b[$, on définit la **fonction dérivée d'ordre n de f** , notée $f^{(n)}$.

Si, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f est n fois dérivable, on dit que la **fonction f est indéfiniment dérivable**.

Exemples.

1. Nous avons démontré dans l'exemple 2 du paragraphe 2.1 que la fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $-\sin$.

La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $\cos$.

La fonction $\cos$ est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde égale à $-\cos$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)'(x) = -\sin x$ et $(\cos)''(x) = -\cos x$,

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $(\cos)''(x) = \cos(x + \pi)$.

Démontrons, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , la fonction $\cos$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée d'ordre n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Cette propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour n . La fonction $(\cos)^{(n)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ((\cos)^{(n)})'(x) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}, (\cos)^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

La propriété est vraie pour 1, et, si elle est vraie pour n , elle est vraie pour $n + 1$; elle est donc vraie pour tout entier naturel supérieur à 1.

La fonction $\cos$ est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction polynôme $f: x \mapsto 2x^3 + 5x^2 + 7x + 19$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée f' définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x^2 + 10x + 7.$$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée f'' définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 12x + 10.$$

La fonction f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $f^{(3)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 12.$$

La fonction $f^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $f^{(4)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = 0.$$

La fonction f est donc quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée d'ordre 4 égale à la fonction nulle.

La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3\}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 0.$$

3. Dérivée et sens de variation.

Dérivée d'une fonction dont on connaît le sens de variation.

3.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et dont on connaît le sens de variation sur I . Soit f' la fonction dérivée de f sur I .

On a les propriétés suivantes :

P1 Si la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I , alors on a :
 $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

Démonstration :

Nous faisons la démonstration dans le cas où f est croissante sur I .

Soit x_0 un élément de I . La fonction f est dérivable en x_0 ; on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

D'autre part, la fonction f est croissante sur I ; on a alors :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I - \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

De la propriété P_4 du paragraphe 3.2 du chapitre 5 il résulte que la limite quand x tend vers x_0 de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est positive ou nulle. ■

P2 Si la fonction f est constante sur I , alors la fonction dérivée f' est nulle sur I ; on a : $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Cette propriété est une conséquence des propriétés du paragraphe 2.3.

P3 Si la fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I , alors on a : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$), et l'ensemble des réels x tels que : $f'(x) = 0$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration :

Nous faisons la démonstration dans le cas où la fonction f est strictement croissante sur I ; de la propriété P_1 , il résulte que l'on a : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

Supposons qu'il existe un intervalle ouvert non vide I_1 inclus dans I et tel que : $\forall x \in I_1, f'(x) = 0$. De la propriété P_2 , il résulterait que la fonction f serait constante sur I_1 , ce qui est impossible puisque f est strictement croissante sur I , donc sur I_1 . ■

Sens de variation d'une fonction dont la dérivée a un signe connu sur un intervalle non vide.

3.2 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée f' , telle que, pour tout élément x de I , le réel $f'(x)$ ait un signe constant.

Nous admettons la propriété suivante :

P1 Si l'on a : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$), alors la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I .

On a aussi les propriétés suivantes :

P2 Si l'on a : $\forall x \in I, f'(x) = 0$, la fonction f est constante sur I .

Démonstration :

On a : $(\forall x \in I, f'(x) = 0) \implies (\forall x \in I, f'(x) \geq 0)$

et $(\forall x \in I, f'(x) = 0) \implies (\forall x \in I, f'(x) \leq 0)$.

De la propriété P_1 , il résulte que la fonction f est à la fois croissante et décroissante sur I .

On a donc : $\forall (x, x') \in I^2, ((x < x') \implies (f(x) \leq f(x') \text{ et } f(x) \geq f(x')))$

c'est-à-dire : $\forall (x, x') \in I^2, ((x < x') \implies (f(x) = f(x')))$.

La fonction f est donc constante sur I . ■

P3 Si l'on a : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et si l'ensemble des réels x de I tels que : $f'(x) = 0$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide, alors la fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I .

Démonstration :

Nous faisons la démonstration dans le cas où l'on a : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

De la propriété P_1 , il résulte que la fonction f est croissante sur I .

Supposons qu'il existe deux éléments x et x' de I tels que : $x < x'$ et $f(x) = f(x')$.

La fonction f est croissante sur I ; on a donc :

$\forall y \in]x, x'[, f(x) \leq f(y) \leq f(x')$.

De l'égalité, $f(x) = f(x')$, nous déduisons alors :

$\forall y \in]x, x'[, f(x) = f(y) = f(x')$.

La fonction f est donc constante sur $]x, x'[$.

De la propriété P_2 , il résulte que l'on a : $\forall y \in]x, x'[, f'(y) = 0$.

Cette propriété est incompatible avec l'hypothèse.

La fonction f est donc strictement croissante sur I . ■

P4 Soient f et g deux fonctions dérivables sur I telles que $f' = g'$.
Alors la fonction $f - g$ est constante sur I .

Démonstration :

La fonction $f - g$ est dérivable sur I et l'on a : $(f - g)' = f' - g' = 0$.

De la propriété P_2 , il résulte que $f - g$ est constante sur I . ■

EXERCICES

Dérivabilité en un point. Interprétation géométrique.

◆ Dans chacun des exercices suivants (nos 1 à 5), on considère une fonction f et un réel x_0 . On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan affine réel rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par M_0 le point de C d'abscisse x_0 . Déterminer l'ensemble de définition de f ; puis déterminer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de f en x_0 , s'il existe, et l'équation de la tangente D à C en M_0 , si elle existe. Étudier la position de C par rapport à la droite D .

$$1 \quad f: x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 3x - 1 \quad x_0 = 1.$$

$$2 \quad f: x \mapsto \frac{x+2}{-x+7} \quad x_0 = 5.$$

$$3 \quad f: x \mapsto 3x^5 - 40x^3 + 21 \quad x_0 = -2.$$

$$4 \quad f: x \mapsto \cotg x \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$5 \quad f: x \mapsto E(x) \quad x_0 = 1.$$

$$6 \quad \text{Soit } a \text{ un élément de } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Étudier la limite, quand x tend vers a , de la fonction

$$x \mapsto \frac{\tg x - \sin x + \sin a - \tg a}{x - \sin x + \sin a - a}.$$

7 Soit f une fonction dérivable en x_0 .

1° Déterminer la limite éventuelle, quand x tend vers x_0 , de la fonction

$$x \mapsto \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}.$$

$$2^\circ \text{ Calculer : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3a - a^3x}{x - a} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \cos x}{x - \frac{\pi}{3}}.$$

Dérivabilité à droite. Dérivabilité à gauche. Interprétation géométrique.

◆ Dans chacun des exercices suivants (nos 8 à 12), on considère une fonction f et un réel x_0 . On désigne par C la courbe représentative de f dans un plan affine réel rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par M_0 le point de C d'abscisse x_0 . Déterminer l'ensemble de définition de f . Étudier la dérivabilité de f en x_0 et déterminer les équations des demi-tangentes éventuelles à C en M_0 .

$$8 \quad f: x \mapsto \sqrt{|x-2|} \quad x_0 = 2.$$

$$9 \quad f: x \mapsto x^2 + 2|x-1| \quad x_0 = 1.$$

$$10 \quad f: x \mapsto x + \sqrt{4-x^2} \quad x_0 = -2.$$

$$11 \quad f: x \mapsto \sqrt{(2x^2 + x - 3)^2} \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

$$12 \quad f: x \mapsto |x(3 - x)| \quad x_0 = 3.$$

13 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 - 16x^3 + 16x^2}}{(x-2)(x^2+1)} \right) \text{ et } f(2) = -\frac{4}{5}.$$

1° La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle continue en 2 ?

2° La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable en 2 ?

14 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \right) \text{ et } f(-1) = \frac{1}{3}.$$

1° La fonction f est-elle continue en -1 ? Est-elle continue en 0 ?

2° La fonction f est-elle dérivable en -1 ? Est-elle dérivable en 0 ?

Fonction dérivée.

◆ Dans chacun des exercices suivants (nos 15 à 38), on considère une fonction f . Déterminer l'ensemble de définition de f . Déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans lequel f est dérivable et déterminer la fonction dérivée f' de f .

$$15 \quad f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$$

$$16 \quad f: x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$$

$$17 \quad f: x \mapsto \frac{3x^2 - 4x}{4(1 - x)}$$

$$18 \quad f: x \mapsto \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x + 1)^2}$$

$$19 \quad f: x \mapsto \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3(x + 2)^5}$$

$$20 \quad f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x + 1)}$$

$$21 \quad f: x \mapsto 2x + 1 - \frac{2}{(1 - x)^2}$$

$$22 \quad f: x \mapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1}.$$

$$23 \quad f: x \mapsto (x - 1)\sqrt{2x}.$$

$$24 \quad f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 1}.$$

$$25 \quad f: x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2}}$$

$$26 \quad f: x \mapsto x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$$

$$27 \quad f: x \mapsto x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \quad \text{où } a \text{ est un réel non nul.}$$

$$28 \quad f: x \mapsto x \sqrt{\frac{3(x+1)}{1-3x}}$$

$$29 \quad f: x \mapsto \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2}$$

$$30 \quad f: x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x+1}}$$

$$31 \quad f: x \mapsto \cos 2x - 2 \cos x.$$

$$32 \quad f: x \mapsto \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4} \cos \pi x.$$

$$33 \quad f: x \mapsto \frac{\cos^3 x}{1-2 \sin x}$$

$$34 \quad f: x \mapsto \frac{\sin(2x^3+5)}{1-\cos(5x+3)}$$

$$35 \quad f: x \mapsto \sqrt{2(1-\cos x)}.$$

$$36 \quad f: x \mapsto \sqrt{2+\cos^2(2x^2+1)} - \sqrt{3} \sin^2(2x^2+1).$$

$$37 \quad f: x \mapsto \operatorname{tg}^3(\pi \sqrt{x^2+1}).$$

$$38 \quad f: x \mapsto x \sin x - \cos x.$$

$$39 \quad \text{Soit la fonction } f: x \mapsto (x - E(x))(E(x) + 1 - x).$$

1° La fonction f est-elle continue et dérivable sur $[0, 1]$?

2° Déterminer l'ensemble où f est continue et l'ensemble où f est dérivable.

$$40 \quad \text{Soit la fonction } f: x \mapsto x(x - E(x)).$$

Sur quels intervalles la fonction f est-elle continue ? Sur quels intervalles f est-elle dérivable ? Déterminer alors la fonction dérivée f' .

$$41 \quad \text{Soit la fonction } f: x \mapsto \frac{x-1}{|x|+1}.$$

1° Étudier la continuité de f en 0.

2° Sur quels intervalles la fonction f est-elle dérivable ?

Déterminer la fonction dérivée f' sur chacun de ces intervalles.

42 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1[, & f(x) = \sqrt{-x-1} \\ \forall x \in [-1, 1], & f(x) = x^2 - 1 \\ \forall x \in]1, +\infty[, & f(x) = 2 \sin(x-1). \end{cases}$$

1° Étudier la continuité de f .

2° On désigne par f' la fonction dérivée de f , si elle existe.

Déterminer la fonction f' et étudier sa continuité.

43 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1], & f(x) = x+1 \\ \forall x \in]-1, 1[, & f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}} \\ \forall x \in [1, +\infty[, & f(x) = \frac{(x-1)^2((x-1)^2+1)}{(x-1)^3+1}. \end{cases}$$

- 1° Cette fonction est-elle continue en tout point réel ?
 2° Cette fonction est-elle dérivable en tout point réel ?

44 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}$.

- 1° Quel est l'ensemble de définition de f ?
 2° Démontrer que la fonction f admet en 0 un prolongement par continuité g .
 3° Démontrer que g est dérivable en 0.
 4° Déterminer la fonction dérivée g' de g .

* **45** 1° Montrer que la fonction $f: x \mapsto \sin x$ admet une fonction réciproque sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer l'ensemble de définition de f^{-1} .

2° Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et que sa fonction dérivée $(f^{-1})'$ est définie par : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable en 1 ?

3° Préciser l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto (f^{-1})(\cos^2 x)$ et déterminer la fonction dérivée si elle existe.

(D'après Baccalauréat 1972.)

46 Théorème de Rolle.

Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui satisfait à : $f(a) = f(b)$.

1° On suppose que f est constante sur $[a, b]$.

Démontrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que l'on ait : $f'(c) = 0$.

2° On suppose que f n'est pas constante et on désigne par $[m, M]$ le segment image par f du segment $[a, b]$ et par c un réel dont l'image par f est égale à m .

Démontrer ~~que c appartient à $]a, b[$ et que l'on a : $f'(c) = 0$~~ (on écrira la définition de $f'(c)$).

3° Trouver un exemple de fonction non constante qui satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle. En tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

47 Théorème des accroissements finis.

Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1° Soit φ l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Vérifier que φ satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle (cf. exercice n° 46).

En déduire qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que l'on ait : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

2° Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

48 Soient un entier naturel non nul n et la fonction $f: x \mapsto (x+2)^n$.

1° Utiliser la formule du binôme de Newton pour donner une autre expression de $f(x)$.

2° La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Si oui, déterminer deux expressions de $f'(x)$ et en déduire la valeur de la somme :

$$C_n^1 + 2 C_n^2 + \dots + p C_n^p + \dots + (n-1) C_n^{n-1} + n C_n^n.$$

Dérivées successives.

49 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction $\sin$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$.

50 Soit n un entier naturel non nul. Soit f la fonction polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Démontrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{(n)}(x) = (n!)a_n$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, f^{(n+p)}(x) = 0$).

51 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et déterminer en fonction de n et de x une expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$.

52 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-3}$.

1° Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle dérivable ?

Déterminer la fonction dérivée f' de f .

2° Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f est n fois dérivable sur D_f et déterminer une expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout x de D_f .

53 Soient λ un réel et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\lambda x)$.

Démontrer que, pour tout entier p supérieur à 1, $f^{(p)}$ existe et satisfait à la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(p)}(x) = \lambda^{\frac{p(p-1)}{2}} f(\lambda^p x).$$

54 A l'aide du théorème des accroissements finis (cf. exercice n° 47), démontrer la propriété P_1 du paragraphe 3.2 qui a été admise.

Fonction dérivée et sens de variation.

55 Soit f la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle $I = [0, 1]$, associe le nombre réel $\frac{2x}{x^2+1}$.

1° Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur I . Quel est l'ensemble de définition de f^{-1} ?

2° La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur I ? Si oui, déterminer sa fonction dérivée $(f^{-1})'$.

56 Soit f la fonction définie par : $\forall x \in [0, \pi], f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$.

1° Montrer que f est une bijection de l'intervalle $I = [0, \pi]$ sur un intervalle J à préciser.

2° La fonction réciproque f^{-1} est-elle dérivable sur J ? (On ne cherchera pas à déterminer la fonction dérivée de f^{-1} .)

57 Soit f la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x - x$.

Démontrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

* 58 Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = x \sin x$.

1° Étudier la dérivabilité de f et déterminer la fonction dérivée de f , si elle existe.

2° Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} .

3° Étudier la dérivabilité de f^{-1} et déterminer la fonction dérivée de f^{-1} , si elle existe.

(D'après Baccalauréat 1972.)

59 On considère une fonction numérique f continue sur $[0, 1]$ et telle que :

$\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$.

Soit alors φ la fonction numérique définie par : $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = f(x) - x$.

1° En appliquant à φ le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer qu'il existe un réel a de $[0, 1]$ vérifiant $f(a) = a$.

2° On suppose de plus que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que sa fonction dérivée vérifie, pour tout x de $]0, 1[$, la condition $f'(x) < 1$.

Démontrer alors que a est unique.

Construire un exemple et un contre-exemple simples.

(D'après Baccalauréat 1973.)

* 60 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $[a, b[$ et dont la dérivée f' est strictement croissante sur $[a, b[$.

1° Soit x un élément de $]a, b]$. Démontrer, à l'aide du théorème des accroissements finis (cf. exercice n° 47) qu'il existe un unique réel c de $]a, x[$ tel que l'on ait :

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c).$$

2° Soit g l'application de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$g : t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

a) Démontrer que g est continue sur $]a, b]$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en a .

b) Démontrer que g est dérivable sur $]a, b]$. Calculer $g'(t)$ pour tout t de $]a, b]$.

c) Démontrer que g est strictement croissante sur $]a, b]$. (On pourra étudier le signe de g' .)

3° Soit φ l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} \varphi(a) = a \\ \text{pour tout } x \text{ de }]a, b], \varphi(x) \text{ est l'unique réel } c \text{ défini au 1°} \end{cases}$$

a) Démontrer que φ est strictement croissante sur $[a, b]$.

b) Soit y un élément de $[a, \varphi(b)]$. Démontrer qu'il existe un unique réel x de $[a, b]$ tel que l'on ait : $g(x) = f'(y)$.

c) Démontrer l'égalité : $\varphi([a, b]) = [a, \varphi(b)]$.

d) Démontrer que φ est continue sur $[a, b]$. (On pourra utiliser l'exercice n° 35 du chapitre 5.)

8.

Pratique de l'étude d'une fonction

En classe de Première, nous avons étudié et tracé les courbes représentatives de certaines fonctions simples, par exemple les fonctions polynômes, les fonctions homographiques.

Dans ce chapitre nous revoyons et approfondissons les différentes étapes de l'étude d'une fonction. Nous désignons par P un plan affine réel euclidien, par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P et par Ox (resp. Oy) la droite passant par le point O et de vecteur directeur $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$). Ces droites sont traditionnellement appelées les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Toutes les coordonnées (resp. les composantes) sont données dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. la base $(\vec{i}, \vec{j})$). Toutes les courbes représentatives des fonctions sont tracées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans la plupart des cas, ce repère est ortho-normé.

1. Recherche de l'ensemble d'étude.

Dans ce paragraphe, nous considérons une fonction f ; nous désignons par D_f son ensemble de définition et par C sa courbe représentative.

L'ensemble d'étude de f , que nous notons E_f , est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel il suffit d'étudier f pour pouvoir tracer C . On a toujours : $E_f \subset D_f$.

En général, E_f est égal à D_f , mais dans certains cas, E_f est strictement inclus dans D_f . L'objet de ce paragraphe est de déterminer l'ensemble E_f .

Tout d'abord, il faut s'assurer que, pour tout réel x de D_f , le réel $f(x)$ est mis sous la forme la plus simple possible, comme le montrent les deux exemples suivants :

Exemples.

1. Soit la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{(x^4 + 5)^2}$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 5 > 0)$. On peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 + 5.$$

2. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{(x^2 + 1)(x + 3)}{x^2 + x - 6}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2))$, et par suite : $D_f = \mathbb{R} - \{-3, +2\}$.

On a donc : $(\forall x \in D_f, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2})$.

Pour déterminer E_f , on étudie la périodicité éventuelle de f et les symétries éventuelles de $\mathbb{C}$.

Périodicité.

Définitions.

1.1 Soit f une application d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit t un réel; désignons par D_t l'image de D par la translation $x \mapsto x + t$ de $\mathbb{R}$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in D \iff x + t \in D_t)$.

On dit que t est **une période de la fonction f** si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} D_t = D \\ \forall x \in D, f(x + t) = f(x). \end{cases}$$

Le réel 0 est une période de toute fonction f .

On dit que f est **périodique** si et seulement si elle admet une période non nulle t ; on dit alors que f est **périodique de période t** .

• **L'ensemble G des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.**

Soient t et t' deux périodes de f . On a : $D_{t+t'} = (D_t)_{t'} = D_{t'} = D$ et

$$\forall x \in D, (x + t \in D \text{ et } f(x + t + t') = f((x + t) + t') = f(x + t) = f(x));$$

par suite $t + t'$ est une période de f .

L'élément neutre 0 est une période de f .

Soit t une période de f . On a : $D = D_t$ et par suite : $D_{-t} = (D_t)_{-t} = D_{t-t} = D$.

On a aussi : $\forall x \in D, (x - t \in D \text{ et } f(x - t) = f(x - t + t) = f(x))$. Par suite le réel $-t$ est une période de f .

Il résulte alors du théorème 1.5 du chapitre 1 du tome 1 que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Remarquons, que, si f est périodique, le groupe G de ses périodes n'est pas réduit à l'élément neutre.

• Si G admet un plus petit élément strictement positif T , on démontre et nous admettons que l'on a : $G = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{Z}, x = nT\}$; on dit que T est la **période** de la fonction f .

On démontre que toute fonction périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et dont le groupe des périodes n'a pas de plus petit élément strictement positif est constante sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que le groupe des périodes de toute fonction périodique, continue et non constante sur $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément strictement positif, qui est la période de la fonction considérée.

Remarque : L'image de $\mathbb{R}$ par toute translation de $\mathbb{R}$ est égale à $\mathbb{R}$; pour démontrer que le réel t est une période d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de démontrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + t) = f(x)$.

Exemples.

1. Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en classe de Première, nous avons démontré que ces fonctions sont périodiques et que la période est égale à 2π .

2. La fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$ est une application de $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ dans $\mathbb{R}$; en classe de Première, nous avons démontré que cette fonction est périodique et que la période est égale à π .

3. La fonction $f: x \mapsto \sin 3x$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x$,

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin 3x$.

La fonction f est donc périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

De plus on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, ((\sin 3(x+t) = \sin 3x) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, 3t = 2k\pi)).$$

Le réel $\frac{2\pi}{3}$ est donc la plus petite période strictement positive de f ; c'est donc la période de f .

4. La fonction $f: x \mapsto \cos^2 x + \operatorname{tg} x$ est une application de l'ensemble

$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ dans $\mathbb{R}$. On a : $D_\pi = D$

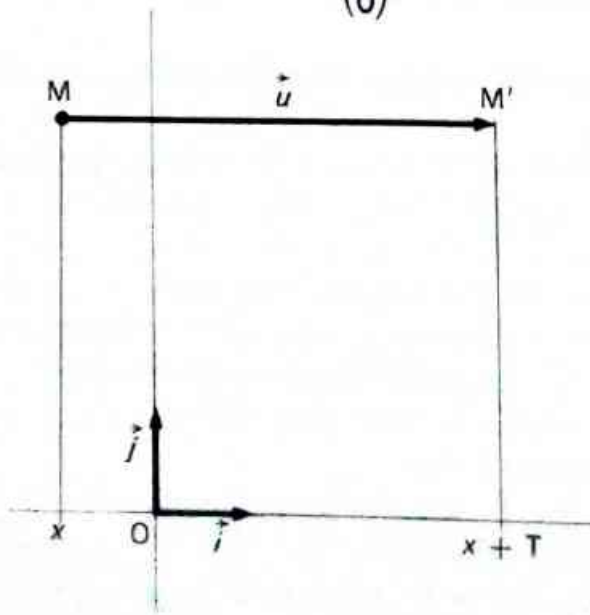
et $\forall x \in D, \cos^2(x + \pi) + \operatorname{tg}(x + \pi) = \cos^2(-x) + \operatorname{tg} x = \cos^2 x + \operatorname{tg} x$.

La fonction f est donc périodique de période π ; l'étude du sens de variation de f permet de démontrer que π est la période de f .

Conséquence pratique.

1.2 Supposons que la fonction f soit périodique de période t . Soit x un élément quelconque de D_f . Désignons par M et M' les points de C d'abscisses respectives x et $x + t$. Les coordonnées de M (resp. M') sont donc $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} x+t \\ f(x) \end{pmatrix}$). Les composantes du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Désignons par $\vec{u}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$; on a alors : $M' = t_{\vec{u}}(M)$.



Soient x_0 un élément de D_f et k un entier rationnel. Soient I_k l'intervalle $[x_0 + kt, x_0 + (k+1)t]$ et C_k l'ensemble des points M de C dont l'abscisse appartient à I_k . On a donc : $C = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$.

D'autre part, pour tout point M de C_k , le point $t_u^*(M)$ appartient à C_{k+1} et pour tout point M' de C_{k+1} , d'abscisse x , il existe un unique point M de C_k , d'abscisse $x - t$, tel que l'on ait : $M' = t_u^*(M)$. On a donc : $C_{k+1} = t_u^*(C_k)$.

On étudie alors f seulement sur l'intervalle I_0 ; on construit la courbe C_0 et on complète par les translations convenables pour obtenir la courbe C .

Dans la pratique, on prend pour t la plus petite période strictement positive de f que l'on peut trouver; si la courbe C_0 n'est pas elle-même la réunion d'un nombre fini n de courbes images les unes des autres par t_u^* , c'est que le réel t choisi est effectivement la période T de f ; sinon, on a : $T = \frac{t}{n}$.

Le choix du réel x_0 est souvent déterminé par les éventuelles symétries de C , de façon à réduire encore l'ensemble d'étude.

Symétries.

Fonction paire.

- 1.3 • On dit que la fonction f est **paire** si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} D_f \text{ est globalement invariant par la symétrie de } \mathbb{R} : x \mapsto -x \\ \forall x \in D_f, f(-x) = f(x). \end{cases}$$

• Supposons que la fonction f soit paire et désignons par s la symétrie par rapport à l'axe Oy , du plan P . L'image par s d'un point M quelconque de P , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est le point de P de coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Montrons que la courbe C est globalement invariante par s .

Soit M un point quelconque de C , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$; son image par s a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -x \\ f(-x) \end{pmatrix}$ et, par suite, appartient à C . On a donc : $s(C) \subset C$.

On a alors : $s(s(C)) \subset s(C)$; de l'égalité $s \circ s = \text{Id}_P$, il résulte que l'on a : $C \subset s(C)$.

Des propositions : $s(C) \subset C$ et $C \subset s(C)$, il résulte que l'on a : $s(C) = C$.

Il suffit donc d'étudier f sur l'ensemble $D_1 = D_f \cap [0, +\infty[$ et de tracer l'ensemble C_1 des points M de C dont l'abscisse appartient à D_1 . On a alors : $C = C_1 \cup s(C_1)$. On dit que la courbe C est **symétrique par rapport à Oy** .

Exemple.

La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 3}$ est une fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$.

Il suffit donc de l'étudier sur $[0, +\infty[$.

La courbe représentative de cette fonction est symétrique par rapport à Oy .

Fonction impaire.

- 1.4 • On dit que la fonction f est impaire si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} D_f \text{ est globalement invariant par la symétrie de } \mathbb{R} : x \mapsto -x \\ \forall x \in D_f, f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

• Supposons que la fonction f soit impaire et désignons par s_0 la symétrie par rapport à O, du plan P. L'image par s_0 d'un point M quelconque de P, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est le point de P de coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$. Démontrons que la courbe C est globalement invariante par s_0 .

Soit M un point quelconque de C, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$; son image M' par s_0 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -f(x) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -x \\ f(-x) \end{pmatrix}$ et, par suite, M' appartient à C. On a donc : $s_0(C) \subset C$.

On a : $s_0(s_0(C)) \subset s_0(C)$; de l'égalité : $s_0 \circ s_0 = \text{Id}_P$ il résulte : $C \subset s_0(C)$.

Des propositions : $s_0(C) \subset C$ et $C \subset s_0(C)$, il résulte que l'on a : $s_0(C) = C$.

Il suffit donc d'étudier f sur l'ensemble $D_1 = D_f \cap [0, +\infty[$ et de tracer l'ensemble C_1 des points M de C dont l'abscisse appartient à D_1 . On a alors : $C = C_1 \cup s_0(C_1)$. On dit que la courbe C est symétrique par rapport à O.

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^3 - 7x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^3 - 7(-x) = -x^3 + 7x = -(x^3 - 7x).$$

Cette fonction est une fonction impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, +\infty[$.

La courbe représentative de cette fonction est symétrique par rapport à O.

Généralisation.

Courbe symétrique par rapport à une droite parallèle à Oy.

- 1.5 Supposons qu'il existe un réel a tel que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} D_f \text{ est globalement invariant par la symétrie de } \mathbb{R} : x \mapsto 2a - x \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = f(x). \end{cases}$$

Désignons par s_Δ la symétrie de P par rapport à la droite Δ d'équation : $x = a$.

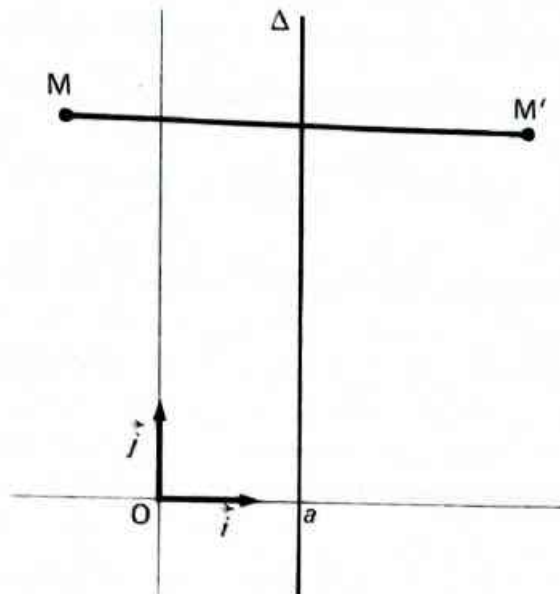
L'image par s_Δ d'un point M quelconque de P, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est le point de P de coordonnées $\begin{pmatrix} 2a - x \\ y \end{pmatrix}$. Démontrons que la courbe représentative C de f est globalement invariante par s_Δ .

Soit M un point quelconque de C, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$; son image par s_Δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2a - x \\ f(x) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2a - x \\ f(2a - x) \end{pmatrix}$ et, par suite, appartient à C. On a donc : $s_\Delta(C) \subset C$.

On a alors : $s_\Delta(s_\Delta(C)) \subset s_\Delta(C)$; de l'égalité $s_\Delta \circ s_\Delta = \text{Id}_P$ il résulte : $C \subset s_\Delta(C)$.

Des propositions : $s_\Delta(C) \subset C$ et $C \subset s_\Delta(C)$, il résulte que l'on a : $s_\Delta(C) = C$.

Il suffit donc d'étudier f sur l'ensemble : $D_1 = D_f \cap [a, +\infty[$ et de tracer l'ensemble C_1 des points M de C dont l'abscisse appartient à D_1 .
On a alors : $C = C_1 \cup s_\Delta(C_1)$.
On dit que C est symétrique par rapport à la droite Δ .



Remarques : 1. Si a est nul, on retrouve le cas des fonctions paires.

2. Supposons qu'il existe deux réels a et a' (avec $a < a'$) tels que C soit globalement invariante par chacune des symétries s_Δ et $s_{\Delta'}$ de P par rapport aux droites Δ et Δ' d'équations respectives : $x = a$ et $x = a'$. Il résulte de l'étude des symétries de P , que l'application $s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2(a' - a) \\ 0 \end{pmatrix}$ et que la composée de la symétrie de $\mathbb{R} : x \mapsto 2a - x$ et de la symétrie de $\mathbb{R} : x \mapsto 2a' - x$ est la translation de $\mathbb{R} : x \mapsto x + 2(a' - a)$. L'ensemble D_f est donc globalement invariant par la translation $x \mapsto x + 2(a' - a)$ et on a :

$$\forall x \in D_f, (2a - x \in D_f \text{ et } f(x + 2(a' - a)) = f(2a' - (2a - x)) = f(2a - x) = f(x)).$$

La fonction f est donc périodique de période $2(a' - a)$.

Exemple.

La fonction $x \mapsto \cos 2x + \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2(\pi - x) + \sin(\pi - x) = \cos(2\pi - 2x) + \sin x = \cos 2x + \sin x.$$

La courbe représentative de cette fonction est donc symétrique par rapport à la droite

$$\text{d'équation : } x = \frac{\pi}{2}.$$

Courbe symétrique par rapport à un point de Ox .

1.6 Supposons qu'il existe un réel a tel que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_f \text{ est globalement invariant par la symétrie de } \mathbb{R} : x \mapsto 2a - x, \\ \forall x \in D_f, f(2a - x) = -f(x). \end{array} \right.$$

Désignons par A le point de Ox de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et par s_A la symétrie de P de centre A . L'image par s_A d'un point M quelconque de P , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est le point de P de coordonnées $\begin{pmatrix} 2a - x \\ -y \end{pmatrix}$. Démontrons que la courbe représentative C de f est globalement invariante par s_A .

Soit M un point quelconque de C , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$; son image par s_A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2a - x \\ -f(x) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 2a - x \\ f(2a - x) \end{pmatrix}$, et par suite, appartient à C .

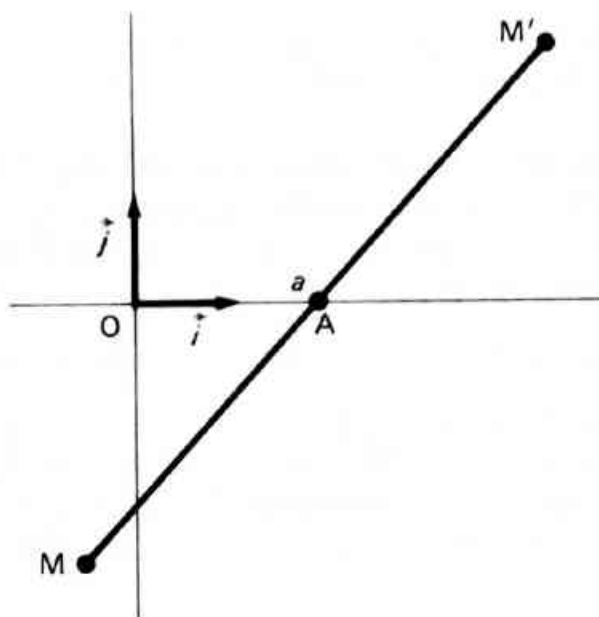
On a donc : $s_A(C) \subset C$.

On a alors : $s_A(s_A(C)) \subset s_A(C)$. De l'égalité : $s_A \circ s_A = \text{Id}_P$ il résulte que l'on a : $C \subset s_A(C)$.

Des propositions : $s_A(C) \subset C$ et $C \subset s_A(C)$, il résulte que l'on a : $s_A(C) = C$.

Il suffit donc d'étudier f sur l'ensemble $D_1 = D_f \cap [a, +\infty[$ et de tracer l'ensemble C_1 des points M de C dont l'abscisse appartient à D_1 . On a alors : $C = C_1 \cup s_A(C_1)$.

On dit que C est symétrique par rapport au point A .



Remarques : 1. Si a est nul, on retrouve le cas des fonctions impaires.

2. Il se peut aussi qu'il existe un point Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (avec $b \neq 0$) tel que la courbe C soit globalement invariante par la symétrie de centre Ω . On démontre, comme dans le paragraphe ci-dessus, que c'est le cas si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- { D_f est globalement invariant par la symétrie de $\mathbb{R} : x \mapsto 2a - x$,
- { $\forall x \in D_f, f(2a - x) = 2b - f(x)$.

On utilise rarement cette propriété pour déterminer E_f , car l'existence du point Ω n'est pas, en général, évidente a priori.

3. Supposons qu'il existe deux réels a et a' (avec $a < a'$) tels que C soit globalement invariante par chacune des symétries de P notées s_A et $s_{A'}$ de centres les points A et A' de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il résulte de l'étude des symétries de P , que l'application $s_{A'} \circ s_A$ est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2(a' - a) \\ 0 \end{pmatrix}$ et que la composée de la symétrie de $\mathbb{R}$: $x \mapsto 2a - x$ et de la symétrie de $\mathbb{R}$: $x \mapsto 2a' - x$ est la translation $x \mapsto x + 2(a' - a)$ de $\mathbb{R}$. L'ensemble D_f est donc globalement invariant par la translation $x \mapsto x + 2(a' - a)$ et on a :

$$\forall x \in D_f, (2a - x \in D_f \text{ et } 2a' - x \in D_f)$$

$$f(x + 2(a' - a)) = f(2a' - (2a - x)) = -f(2a - x) = f(x).$$

La fonction f est donc périodique de période $2(a' - a)$.

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto \cos x + \operatorname{tg} x$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et on a : $\forall x \in D_f, \cos(\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) = -\cos x - \operatorname{tg} x = -(\cos x + \operatorname{tg} x)$. La courbe représentative de cette fonction est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Démontrons que le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 2 \right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f . On a : $\forall x \in D_f, 2 - x \in D_f$ et

$$f(2 - x) = \frac{(2 - x)^2 - 4}{2 - x - 1} = \frac{x^2 - 4 - 4x + 4}{1 - x} = -\frac{x^2 - 4}{x - 1} + 4$$

c'est-à-dire : $\forall x \in D_f, (2 - x \in D_f \text{ et } f(2 - x) = 4 - f(x))$.

La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport au point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 2 \right)$. Il suffit donc d'étudier f sur $]1, +\infty[$.

Exemples de recherche de l'ensemble d'étude.

1.7 • Soit la fonction $f : x \mapsto x - E\left(x + \frac{3}{2}\right)$, qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que l'on a : $\forall y \in \mathbb{R}, E(y + 1) = E(y) + 1$.

Par suite on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 1) = x + 1 - E\left(x + 1 + \frac{3}{2}\right) = x + 1 - \left(E\left(x + \frac{3}{2}\right) + 1\right) = f(x).$$

La fonction f est donc périodique de période 1.

On étudie f sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + 1[$.

Prenons par exemple l'intervalle $[0, 1[$.

$$\text{Nous avons alors : } (x \in [0, 1[) \iff (0 \leq x < 1) \iff \left(\frac{3}{2} \leq x + \frac{3}{2} < \frac{5}{2}\right).$$

Nous devons donc distinguer deux intervalles : $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On a : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], f(x) = x - 1$ et $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(x) = x - 2$.

On remarque alors qu'il est plus judicieux de prendre pour x_0 un réel de la forme $\frac{1}{2} + k$, où k est un entier rationnel quelconque. Prenons par exemple : $x_0 = -\frac{1}{2}$.

On a alors : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f(x) = x - 1$.

1.8 • Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \cos^2 x}$; l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

La fonction f est périodique de période 2π .

On étudie donc f sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + 2\pi]$.

D'autre part on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 - \cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{2 - \cos^2 x} = -f(x)$.

Le point O est donc un centre de symétrie de la courbe représentative C de f .

On étudie donc la fonction f sur $[0, \pi]$.

Enfin on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin x}{2 - \cos^2 x} = f(x)$.

La droite d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est donc un axe de symétrie de la courbe C .

On étudie alors f seulement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on complète par les symétries convenables.

1.9 • Soient la fonction $f : x \mapsto x + \operatorname{tg} x$; l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On a : $\forall x \in D_f, f(-x) = -x + \operatorname{tg}(-x) = -f(x)$.

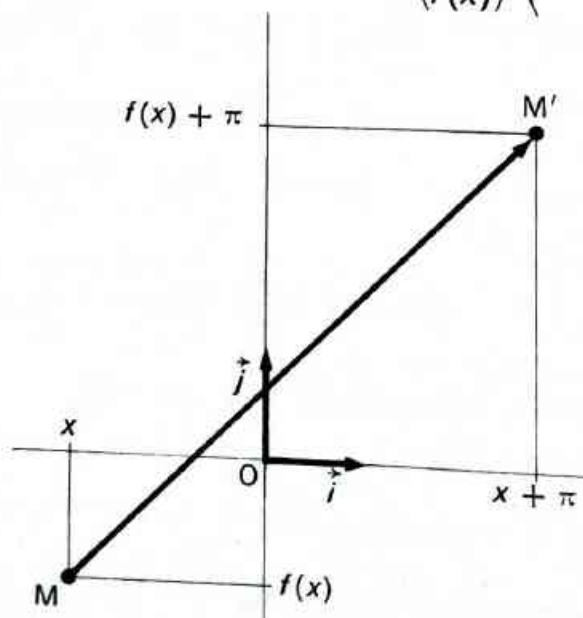
La courbe représentative C de la fonction f est donc symétrique par rapport à O .

On étudie f sur $[0, +\infty[\cap D_f$.

On a de plus : $\forall x \in D_f, f(x + \pi) = x + \pi + \operatorname{tg}(x + \pi) = f(x) + \pi$.

Soient x un réel quelconque de D_f et M et M' les points de C d'abscisses respectives x et $x + \pi$.

Le point M (resp. M') a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} x + \pi \\ f(x) + \pi \end{pmatrix}$).



Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{v}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$. On a donc : $M' = t_{\vec{v}}(M)$.

Soient k un entier rationnel et C_k l'ensemble des points M de C dont l'abscisse appartient à $[k\pi, (k+1)\pi]$. On a alors : $\forall k \in \mathbb{Z}, C_{k+1} = t_{\vec{v}}(C_k)$.

On étudie la fonction f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; on complète par la symétrie de centre O , puis par les translations convenables.

1.10 • Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \cos 4x + 2 \sin 3x + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$. L'ensemble

de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

La fonction $x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π ; la fonction $x \mapsto \cos 4x$ est donc périodique de période : $T_1 = \frac{\pi}{2}$.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π ; la fonction $x \mapsto \sin 3x$ est donc périodique de période : $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$ est périodique de période π ; la fonction $x \mapsto \operatorname{tg} \left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ est donc périodique de période : $T_3 = \frac{\pi}{4}$.

Des égalités : $4T_1 = 3T_2 = 8T_3 = 2\pi$, il résulte que 2π est une période de f . Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que 2π est la période de f .

2. Points particuliers.

Dans ce paragraphe, nous considérons une fonction f . Soient D_f l'ensemble de définition de f et x_0 un élément de D_f .

Extrema.

2.1 Nous rappelons les définitions et résultats suivants :

• La fonction f admet un **minimum relatif** en x_0 (resp. un **maximum relatif** en x_0) si et seulement s'il existe un intervalle I de centre x_0 tel que l'on ait :

$\forall x \in I \cap D_f, f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in I \cap D_f, f(x) \leq f(x_0)$).

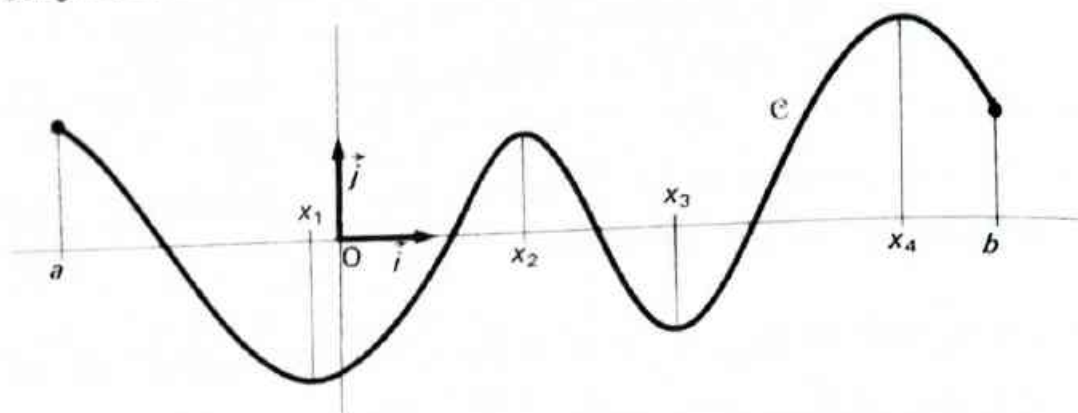
• La fonction f admet un **minimum absolu** en x_0 (resp. un **maximum absolu** en x_0) si et seulement si l'on a :

$\forall x \in D_f, f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$).

• La fonction f admet un **extremum** en x_0 si et seulement si elle admet un maximum ou un minimum en x_0 .

Exemple.

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Soit C la courbe représentative de g .



La fonction g admet des minima relatifs en x_1 et en x_3 , et des maxima relatifs en x_2 et en x_4 .
Elle admet un maximum absolu en x_4 et un minimum absolu en x_1 .

2.2 THÉORÈME : Si la fonction f admet un extremum relatif en x_0 et si elle est dérivable en x_0 , alors la fonction dérivée f' s'annule en x_0 .

Démonstration :

Nous faisons la démonstration dans le cas où l'extremum est un minimum relatif. Supposons que la fonction f admette un minimum relatif en x_0 et qu'elle soit dérivable en x_0 , de nombre dérivé égal à $f'(x_0)$.

Il existe donc un intervalle de centre x_0 et de rayon α , contenu dans D_f , tel que l'on ait : $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x) \geq f(x_0)$.

On a alors : $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

et : $\forall x \in]x_0, x_0 + \alpha[, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

On a donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Puisque la fonction f est dérivable en x_0 , on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

et par suite : $f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$.

On a donc : $f'(x_0) = 0$. ■

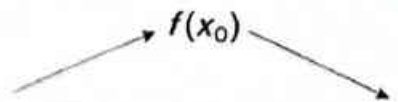
Réciproquement on a le théorème suivant :

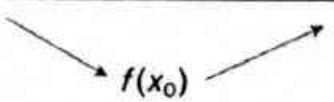
2.3 THÉORÈME : Si la fonction f est dérivable sur un intervalle I de centre x_0 et si la fonction dérivée f' de f s'annule en x_0 en changeant de signe, alors la fonction f admet un extremum relatif en x_0 .

Démonstration :

Soit $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.2 du chapitre 7, il résulte qu'il n'y a que deux tableaux de variation possibles pour f .

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dans les deux cas la fonction f admet un extremum relatif en x_0 . ■

Remarques : 1. Le théorème précédent donne une condition suffisante, mais non nécessaire pour qu'une fonction f admette un extremum relatif en x_0 .

En effet, soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0], f(x) = -x + 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x^2 + 1.$$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$. La fonction f est donc continue en 0.

La fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$, de fonction dérivée f' définie par :

$\forall x \in] -\infty, 0[, f'(x) = -1$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée f' définie par :

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 2x$. De la proposition : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$, il résulte que la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum absolu en 0.

Étudions la dérivabilité de f en 0.

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0.$$

$$\text{et : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

La fonction f n'est pas dérivable en 0.

2. Il est nécessaire que la fonction dérivée change de signe en x_0 pour que f admette un extremum relatif en x_0 .

En effet soit la fonction $f : x \mapsto x^5 + 1$.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée f' définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5x^4.$$

La fonction dérivée f' de f s'annule en 0, sans changer de signe.

D'autre part, de la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$, il résulte que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle n'admet donc pas d'extremum relatif en 0.

3. Soient C la courbe représentative de f et M_0 le point d'abscisse x_0 .

De l'égalité : $f'(x_0) = 0$, il résulte que la tangente à C en M_0 est parallèle à l'axe Ox . Par abus de langage, on dit parfois que C admet en M_0 une tangente horizontale.

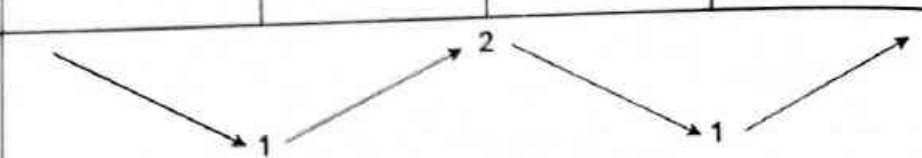
Exemple.

Soit la fonction $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 2$.

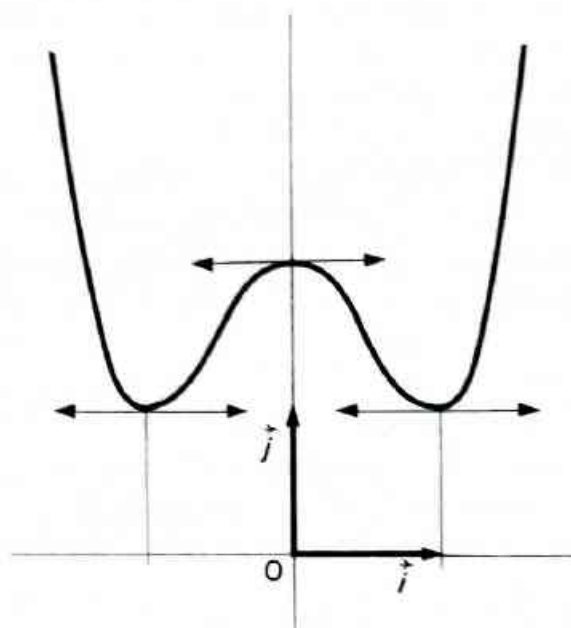
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée f' est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x(x^2 - 1).$$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

La fonction f admet en -1 et en 1 des minima absolus et en 0 un maximum relatif.



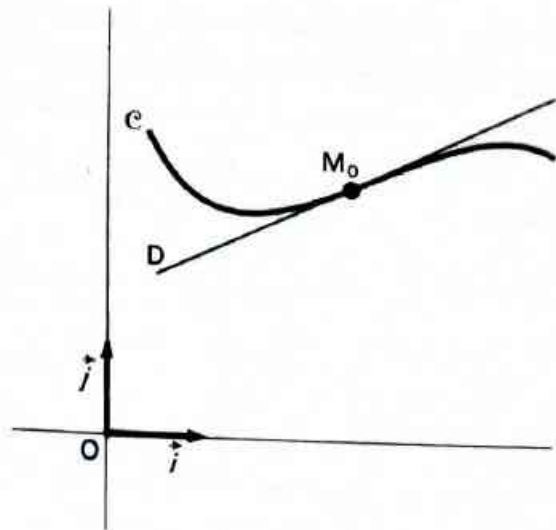
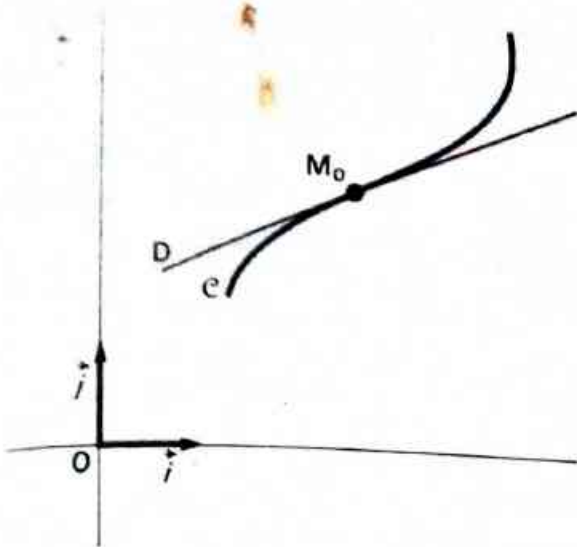
Points d'inflexion.

2.4 Supposons que la fonction f soit dérivable en x_0 . Soit D la tangente à la courbe représentative C de f au point M_0 d'abscisse x_0 .

La droite D partage le plan P en deux demi-plans.

Le point M_0 est un **point d'inflexion** pour la courbe C si et seulement s'il existe un intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon α tel que tous les points de C dont l'abscisse appartient à $]x_0 - \alpha, x_0[$ appartiennent à l'un des demi-plans déterminé par la droite D et tous les points de C dont l'abscisse appartient à $]x_0, x_0 + \alpha[$ appartiennent à l'autre demi-plan.

On dit que la **courbe C traverse la tangente D en M_0** .



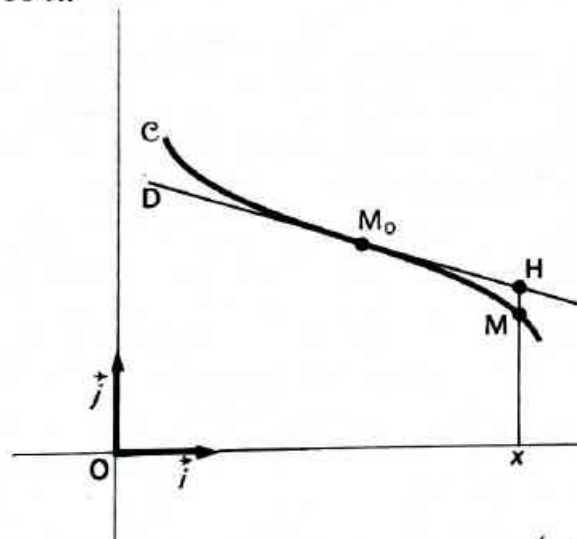
2.5 THÉORÈME : Si la fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I de centre x_0 et si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point M_0 de C d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

Démonstration :

Soit $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

L'équation de la tangente D à C en M_0 est : $y - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0)$.

Soit x un élément de I . Désignons par M le point de C d'abscisse x et par H le point de D de même abscisse x .



Les coordonnées du point M (resp. du point H) sont $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$

(resp. $\begin{pmatrix} x \\ f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) \end{pmatrix}$).

On a alors : $\overline{HM} = f(x) - (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0))$.

Étudions la fonction h définie par :

$\forall x \in I, h(x) = \overline{HM} = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$.

Cette fonction est définie sur I . La fonction f est deux fois dérivable sur I ; la fonction

h est donc deux fois dérivable sur I et l'on a :

$\forall x \in I, (h'(x) = f'(x) - f'(x_0) \text{ et } h''(x) = f''(x))$.

D'autre part on a : $h(x_0) = 0$ et $h'(x_0) = 0$.

La fonction f' s'annule en x_0 en changeant de signe; il n'y a donc que deux tableaux de variation possibles pour h .

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
$h''(x)$	-	0	+
$h'(x)$	↘	0	↗
$h(x)$	-	0	+

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
$h''(x)$	+	0	-
$h'(x)$	↗	0	↘
$h(x)$	+	0	-

Dans les deux cas la fonction h s'annule en x_0 en changeant de signe. Le point M_0 est donc un point d'inflexion pour $\mathcal{C}$. ■

Remarque : Le théorème précédent donne une condition suffisante, mais non nécessaire pour qu'un point soit un point d'inflexion pour une courbe.

En effet, considérons la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 0], f(x) = -x^2 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x^2.$$

La fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée f' définie par : $\forall x \in]-\infty, 0[, f'(x) = -2x$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 2x$.

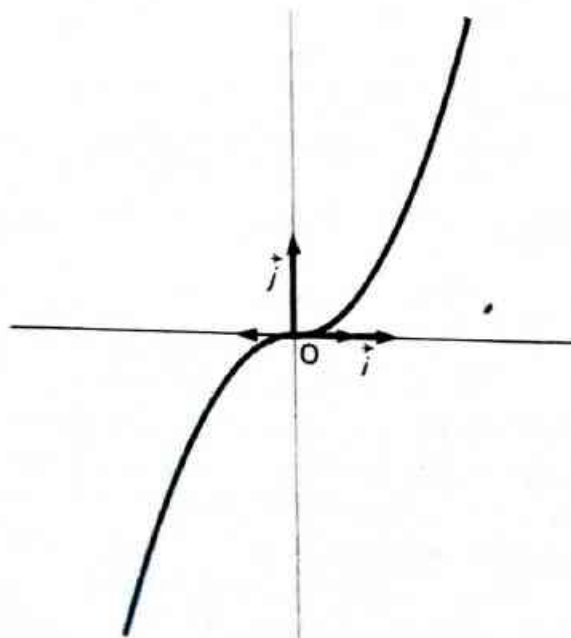
D'autre part on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

La fonction f est donc dérivable en 0, de nombre dérivé $f'(0) = 0$.

Cherchons si la fonction f' est dérivable en 0.

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x}{x} = 2 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-2x}{x} = -2.$$



La fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Mais, au point 0, la courbe représentative C de f traverse la tangente qui est l'axe Ox .
Le point 0 est donc un point d'inflexion pour C .

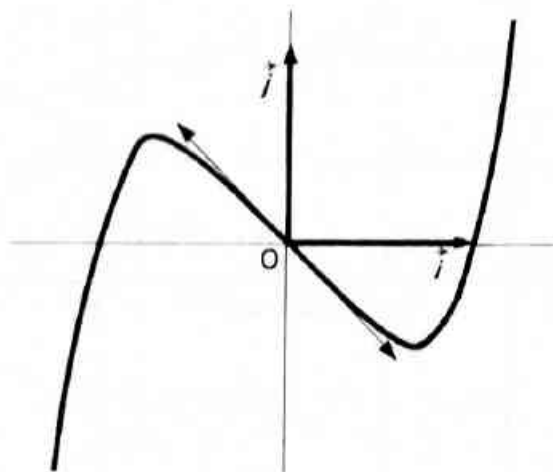
Exemple.

Soit la fonction $f: x \mapsto x^5 - x$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5x^4 - 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 20x^3.$$

La fonction f'' s'annule en 0 en changeant de signe ; le point 0 est donc un point d'inflexion pour la courbe représentative de f .



3. Branches infinies.

Dans ce paragraphe, nous considérons une fonction f ; nous désignons par D_f l'ensemble de définition de f et par C la courbe représentative de f .

- 3.1 On dit que la courbe C a une **branche infinie** dans chacun des trois cas suivants :
- l'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]\beta, +\infty[$,
 - l'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]-\infty, \beta[$,
 - la fonction f a une limite infinie en un point fini.

En classe de Première, nous avons déjà étudié certains exemples de branches infinies; nous rappelons les définitions et résultats suivants.

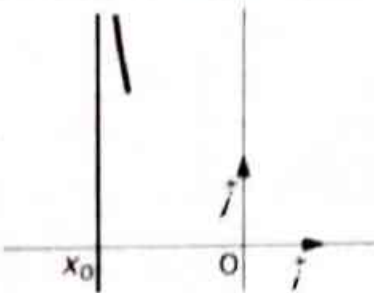
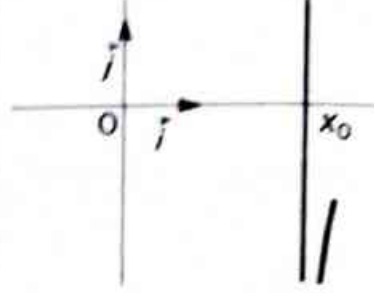
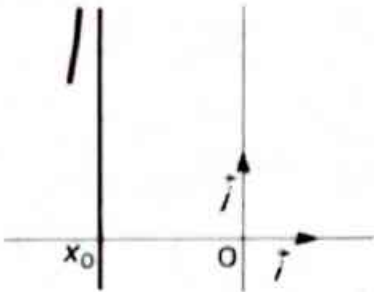
Asymptote parallèle aux axes.

Asymptote parallèle à Oy .

- 3.2 On dit que la droite d'équation : $x = x_0$ est asymptote à la courbe C si et seulement si la fonction f satisfait à l'une au moins des propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty, & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty, & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty. \end{array}$$

La position de la courbe C par rapport à l'asymptote est déterminée par la nature des familles de départ et des familles d'arrivée des limites. Nous donnons les résultats dans le tableau suivant :

famille d'arrivée famille de départ		
	$]a, +\infty[$	$] -\infty, a[$
$]x_0, x_0 + \alpha[$		
$]x_0 - \alpha, x_0[$		

Exemple.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-1)}$.

L'ensemble de définition de f est : $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Étudions la limite de f en 1.

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Des propositions : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$, il résulte que

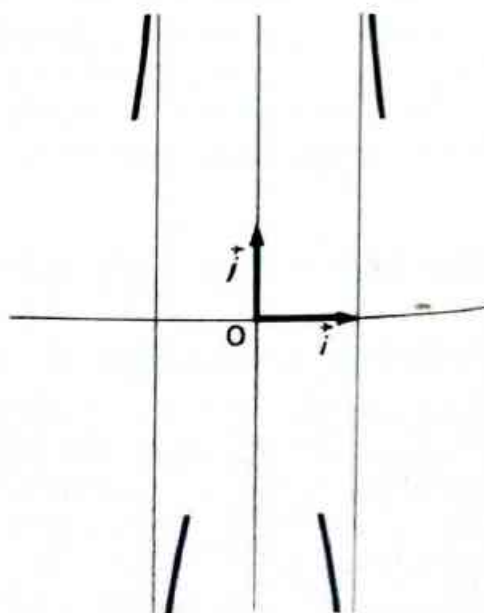
l'on a :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.

On démontre de même que l'on a :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$.

Les droites d'équations respectives :
 $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes
à la courbe représentative de f .



Asymptote parallèle à Ox .

3.3 On dit que la droite d'équation : $y = b$ est asymptote à la courbe C si et seulement si la fonction f satisfait à l'une au moins des propositions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

La position de la courbe C par rapport à l'asymptote est déterminée par la nature de la famille de départ et par le signe du réel $f(x) - b$, s'il existe un intervalle de la famille de départ sur lequel ce réel garde un signe constant. On a le tableau suivant :

il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que		
famille de départ $\mathcal{F}$	$\forall x \in I, f(x) - b > 0$	$\forall x \in I, f(x) - b < 0$
$] \beta, +\infty[$		
$] -\infty, \beta[$		

Exemples.

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} - \{-1\}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et de même : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

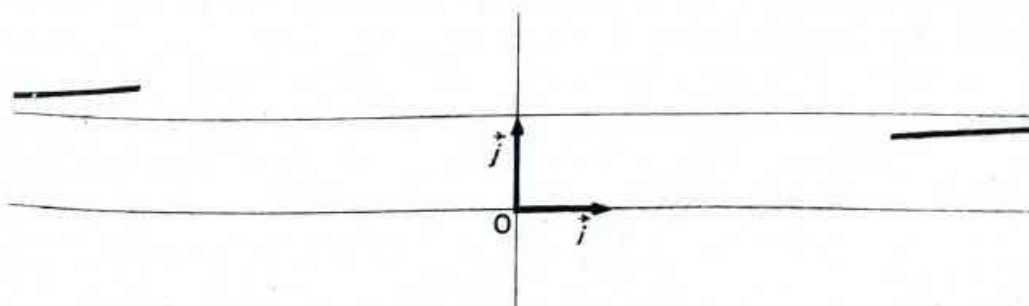
La droite d'équation : $y = 1$ est donc asymptote à la courbe représentative de f .

Étudions le signe de $f(x) - 1$. On a : $\forall x \in D_f, \frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x - (x+1)}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$,

et par suite : $\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) - 1 > 0$

$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) - 1 < 0$.

On a donc les branches infinies suivantes :



2. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$,

et par suite : $\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

De l'exercice n° 66 du chapitre 5, il résulte que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

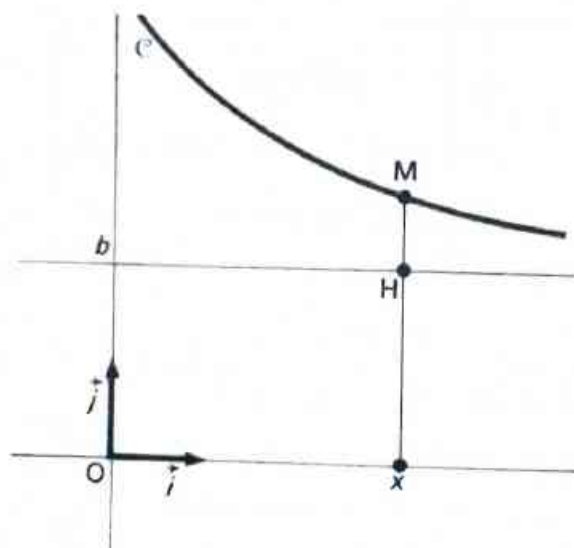
L'axe Ox est donc asymptote à la courbe représentative de f .

Mais il n'existe aucun intervalle de la forme $] \beta, +\infty[$ sur lequel le réel $\frac{\sin x}{x}$ garde un signe constant.

Remarques : 1. Supposons que l'on ait : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Soient x un élément quelconque de $]0, +\infty[\cap D_f$ et M le point de C d'abscisse x .

Soit H le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$.



On a alors : $\overline{HM} = f(x) - b$.

Quand x tend vers $+\infty$, la fonction qui à x associe le réel $\overline{HM}$ a une limite nulle. Ceci exprime le fait intuitif que la courbe C se rapproche de son asymptote.

2. La définition donnée dans le paragraphe 3.3 est équivalente à la définition suivante :

La droite d'équation : $y = b$ est asymptote à C si et seulement si la fonction f satisfait à l'une au moins des propositions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - b) = 0.$$

Nous allons généraliser la notion d'asymptote à l'aide de cette dernière définition.

Asymptote oblique.

3.4 On dit que la droite d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ si et seulement si la fonction f satisfait à l'une au moins des propositions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Remarques : 1. Si a est égal à 0, on a alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

On retrouve ainsi le cas étudié dans le paragraphe 3.3.

Dans la suite du paragraphe, nous supposons donc que l'on a : $a \neq 0$.

2. Nous avons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = +\infty$ si a est positif;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = -\infty$ si a est négatif; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

De ces propositions il résulte que la limite de f en $+\infty$ est égale soit à $+\infty$ si a est positif, soit à $-\infty$ si a est négatif.

On démontre, de même, que, si l'on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, la limite de f en $-\infty$ est infinie.

3. Puisque a est différent de 0, la droite d'équation : $y = ax + b$ n'est pas parallèle aux axes du repère; on dit que c'est une asymptote oblique.

La position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'asymptote est déterminée par la nature de la famille de départ et par le signe du réel $f(x) - (ax + b)$, s'il existe un intervalle de la famille de départ sur lequel ce réel garde un signe constant. On a le tableau :

Il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$	$\forall x \in I, f(x) - (ax + b) > 0$	$\forall x \in I, f(x) - (ax + b) < 0$
famille de départ $\mathcal{F}$		
$] \beta, +\infty[$		
$] -\infty, \beta[$		

Exemple.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{1\}$. Montrons que la droite d'équation : $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

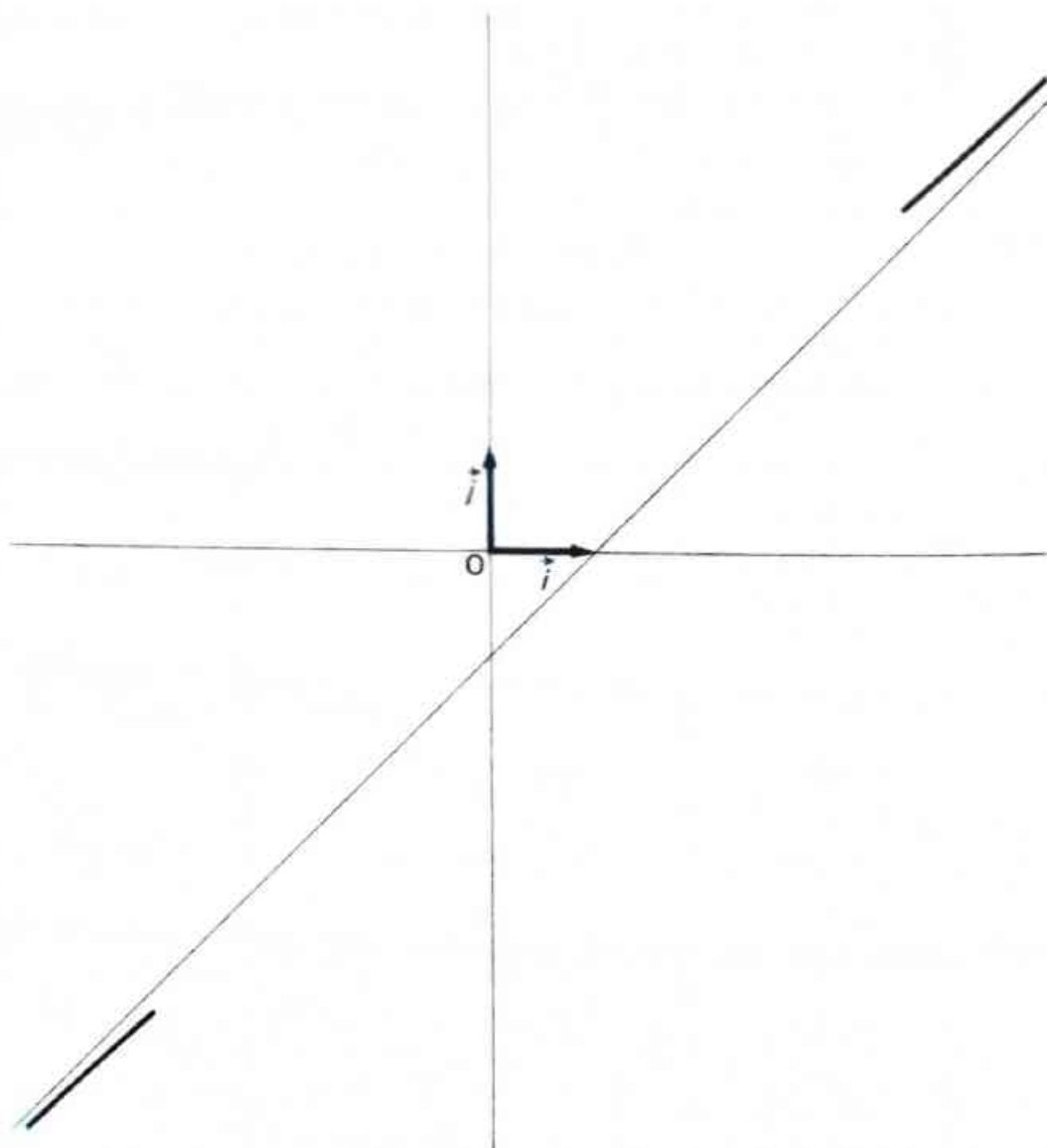
$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f(x) - (x - 1) &= \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x - 1) \\ &= \frac{x^2 - 2x + 2 - (x - 1)^2}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0.$$

$$\text{On a de même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part on a : } \forall x \in]1, +\infty[, f(x) - (x - 1) &> 0 \\ \forall x \in]-\infty, 1[, f(x) - (x - 1) &< 0. \end{aligned}$$

La position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée dans la figure suivante. Dans cet exemple l'asymptote D est donnée; mais dans la pratique il faut souvent déterminer la droite D.



Méthodes pratiques.

- 3.5 Dans ce paragraphe, nous considérons une fonction f qui admet une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$; pour alléger la rédaction, nous désignons par $\mathcal{F}$ la famille de départ considérée.

THÉORÈME : Soient (a, b) un élément de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ a pour limite 0 suivant $\mathcal{F}$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a pour limite a suivant $\mathcal{F}$ et la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ a pour limite b suivant $\mathcal{F}$.

Démonstration :

• $(1) \Rightarrow (2)$.

Puisque la fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ a pour limite 0 suivant $\mathcal{F}$, il existe un intervalle I , ne contenant pas 0, de $\mathcal{F}$ et une fonction φ tels que l'on ait :

$$\forall x \in I, f(x) - (ax + b) = \varphi(x) \text{ et } \lim_{\mathcal{F}} \varphi = 0.$$

On a alors : $\forall x \in I, f(x) - ax = b + \varphi(x)$ et, par suite, la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ a pour limite $b + 0 = b$ suivant $\mathcal{F}$.

On a aussi : $\forall x \in I, \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x}$ et, par suite, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a pour limite $a + 0 + 0 = a$ suivant $\mathcal{F}$.

• $(2) \Rightarrow (1)$.

Si la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ a pour limite b suivant $\mathcal{F}$, la fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ a pour limite 0 suivant $\mathcal{F}$. ■

Ce théorème justifie la méthode pratique suivante :

On cherche d'abord la limite éventuelle suivant $\mathcal{F}$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$; si cette limite existe et est égale à un réel non nul a , on cherche ensuite la limite éventuelle suivant $\mathcal{F}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - ax$; si cette limite existe et est égale à un réel b , alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f ; on étudie enfin le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour trouver la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Remarques : 1. Dans certains cas, il est facile de trouver directement un élément (a, b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et une fonction φ qui satisfont aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{\mathcal{F}} \varphi = 0$$

il existe un intervalle I de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) = ax + b + \varphi(x)$. La droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote à la courbe représentative de f et l'étude du signe de $\varphi(x)$ donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

2. Si la fonction f admet une limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$, il faut faire deux recherches d'asymptote oblique ; dans certains cas, on aboutit à une même droite.

Exemples.

1. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 5}{x}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Étudions si la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote oblique.

Pour cela, nous remarquons que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 2x - 3 + \frac{5}{x}$.

Des propositions : $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0 \right)$ et $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0 \right)$, il résulte que la droite D d'équation : $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe C.

Des propositions : $\left(\forall x \in]0, +\infty[, \frac{5}{x} > 0 \right)$ et $\left(\forall x \in]-\infty, 0[, \frac{5}{x} < 0 \right)$,

il résulte que, pour x positif, la courbe est au-dessus de D et que, pour x négatif, la courbe est au-dessous de D.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 7}{x - 3}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{3\}$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = 2(x + 1) + \frac{13}{x - 3}$$

et que la droite D d'équation : $y = 2(x + 1)$ est asymptote à la courbe représentative C de f.

Nous lui laissons aussi le soin de placer la courbe par rapport à la droite D.

Remarquons que la droite d'équation : $x = 3$ est aussi asymptote à C.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.

De la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$,

il résulte que l'on a : $D_f =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$.

D'autre part on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 3) = +\infty$,

et, par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} = +\infty$.

Étudions si la courbe représentative C de f admet une asymptote.

On a :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 2)^2 \left(1 - \frac{1}{(x + 2)^2} \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, +\infty[, f(x) &= \sqrt{(x + 2)^2 \left(1 - \frac{1}{(x + 2)^2} \right)} = |x + 2| \sqrt{1 - \frac{1}{(x + 2)^2}} \\ &= (x + 2) \sqrt{1 - \frac{1}{(x + 2)^2}} \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, +\infty[, f(x) - (x + 2) &= (x + 2) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{(x + 2)^2}} - 1 \right) \\ &= (x + 2) \frac{1 - \frac{1}{(x + 2)^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x + 2)^2}} + 1} = - \frac{1}{(x + 2) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{(x + 2)^2}} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Des propositions : $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) = +\infty \right)$ et $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x + 2)^2} = 0 \right)$, il résulte

que l'on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0$.

La droite D d'équation : $y = x + 2$ est donc asymptote à C. Des propositions

$\left(\forall x \in [-1, +\infty[, x + 2 > 0 \right)$ et $\left(\forall x \in [-1, +\infty[, \sqrt{1 - \frac{1}{(x + 2)^2}} + 1 > 0 \right)$

il résulte que la courbe C est au-dessous de D.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, en étudiant l'autre branche infinie que la droite D' d'équation : $y = -x - 2$ est aussi asymptote à C et que la courbe est au-dessous de D'.

4. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$; l'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.
Cherchons si la fonction f admet une limite en $+\infty$.

On a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = x \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

et par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Étudions alors la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{f(x)}{x} = x \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \frac{1}{x} = \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

et par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Étudions enfin la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x &= \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} - x = \frac{x^2 + 3 - x\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{(x^2 + 3)^2 - x^2(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 3 + x\sqrt{x^2 + 1})} = \frac{5x^2 + 9}{\sqrt{x^2 + 1}\left(x^2 + 3 + x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} \\ &= \frac{5 + \frac{9}{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}\left(1 + \frac{3}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)} \end{aligned}$$

et par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

La courbe représentative C de f admet donc la droite D d'équation : $y = x$ pour asymptote.

De la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x > 0)$, il résulte que C est au-dessus de D .
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, en étudiant l'autre branche infinie, que la droite D' d'équation : $y = -x$ est aussi asymptote à la courbe C et que C est au-dessus de D' .

Autres cas.

Dans les paragraphes 3.4 et 3.5 nous avons étudié les branches infinies de la courbe représentative C d'une fonction f qui possède en particulier les deux propriétés suivantes :

- la fonction f admet une limite infinie en $+\infty$ (resp. $-\infty$)
- la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a une limite finie non nulle en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Dans les paragraphes suivants (nos 3.6 à 3.8), nous étudions les branches infinies de la courbe représentative C d'une fonction f dont l'ensemble de définition D_f contient un intervalle de la forme $]\beta, +\infty[$ ou de la forme $]-\infty, \beta[$ mais qui ne possède pas nécessairement les deux propriétés précédentes.

Direction asymptotique.

3.6 Soit a un réel.

On dit que la courbe C admet une **direction asymptotique de coefficient directeur a** si et seulement si la fonction f satisfait à l'une au moins des propositions suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$ On dit aussi que C admet pour direction asymptotique celle de la droite d'équation : $y = ax$.

Remarques : 1. Si la courbe C admet une asymptote d'équation : $y = ax + b$, elle admet une direction asymptotique de coefficient directeur a . Mais une courbe peut admettre une direction asymptotique sans avoir d'asymptote; c'est le cas si la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ admet une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$, ou si elle n'admet de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$ (cf. exercice n° 58).

2. Il n'est pas nécessaire que la fonction f admette une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ pour que la courbe représentative admette une direction asymptotique.

Par exemple la fonction $x \mapsto \sin x$ satisfait à : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;

sa courbe représentative admet donc pour direction asymptotique la direction de Ox ; mais la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite, ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Branche parabolique.

3.7 • Soit a un réel.

On dit que la courbe C admet une **branche parabolique de coefficient directeur a** si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a pour limite a en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) (1)

la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ a une limite infinie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$). (2)

Remarques : 1. Si la courbe C admet une branche parabolique de coefficient directeur a , elle admet une direction asymptotique de coefficient directeur a .

2. Si a est nul, on dit aussi que la courbe C admet une **branche parabolique de direction Ox** . Remarquons que nous avons alors : $\forall x \in D_f, f(x) - ax = f(x)$; la fonction f a donc nécessairement une limite infinie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

3. Si a n'est pas nul, les propriétés (1) et (2) impliquent que f a une limite infinie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) : désignons par $\mathcal{F}$ la famille de départ considérée; il résulte de (2) qu'il existe un intervalle I , qui ne contient pas 0, de $\mathcal{F}$ et une fonction φ tels que l'on ait : $\forall x \in I, f(x) - ax = \varphi(x)$ et que φ ait une limite infinie suivant $\mathcal{F}$.

On a alors : $\forall x \in I, \frac{f(x)}{x} - a = \frac{\varphi(x)}{x}.$

Il résulte de (1) que la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ a pour limite 0 suivant $\mathcal{F}$.

On a d'autre part : $\forall x \in I, f(x) = x \left(a + \frac{\varphi(x)}{x} \right)$; les fonctions f et $x \mapsto ax$ ont donc la même limite suivant $\mathcal{F}$.

Exemples.

1. Soit la fonction $f: x \mapsto x - 2\sqrt{x-2}$.

L'ensemble de définition de f est $[2, +\infty[$.

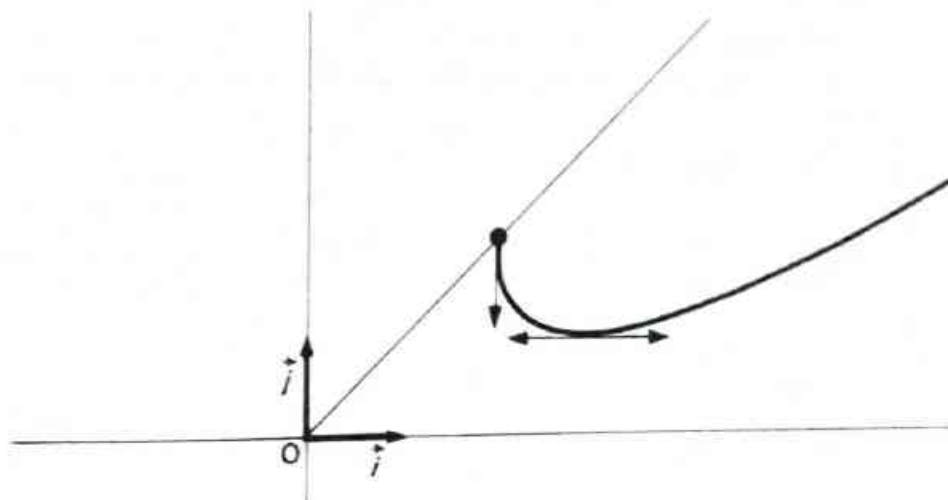
On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'autre part on a :

$$\forall x \in D_f, \frac{f(x)}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x-2}}{x} = 1 - \frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2}} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$\text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{On a alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\sqrt{x-2}) = -\infty.$$

La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de coefficient directeur 1.



2. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x-2}$.

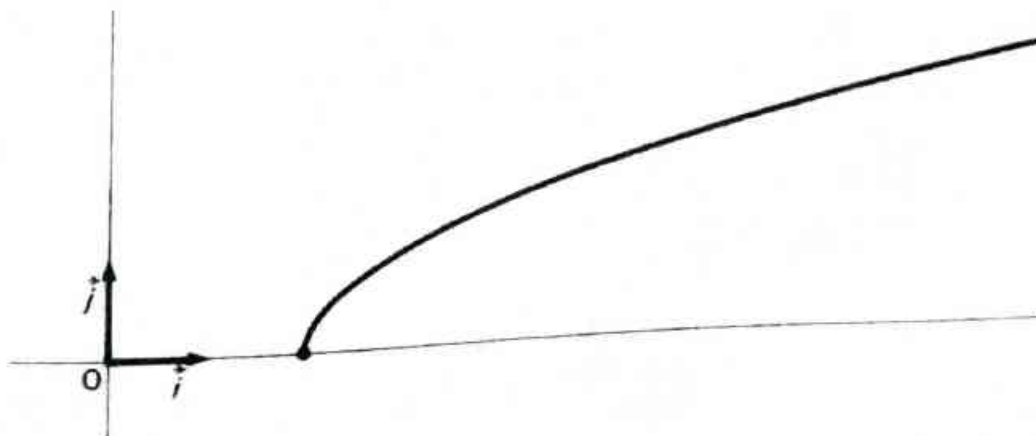
L'ensemble de définition de f est $[2, +\infty[$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{et } \forall x \in D_f, \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x-2}}{x} = \sqrt{\frac{x-2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$\text{Par suite on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction Ox.



3.8 • On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une **branche parabolique de direction** Oy si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple.

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3}{x+2}$.

L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} - \{-2\}$.

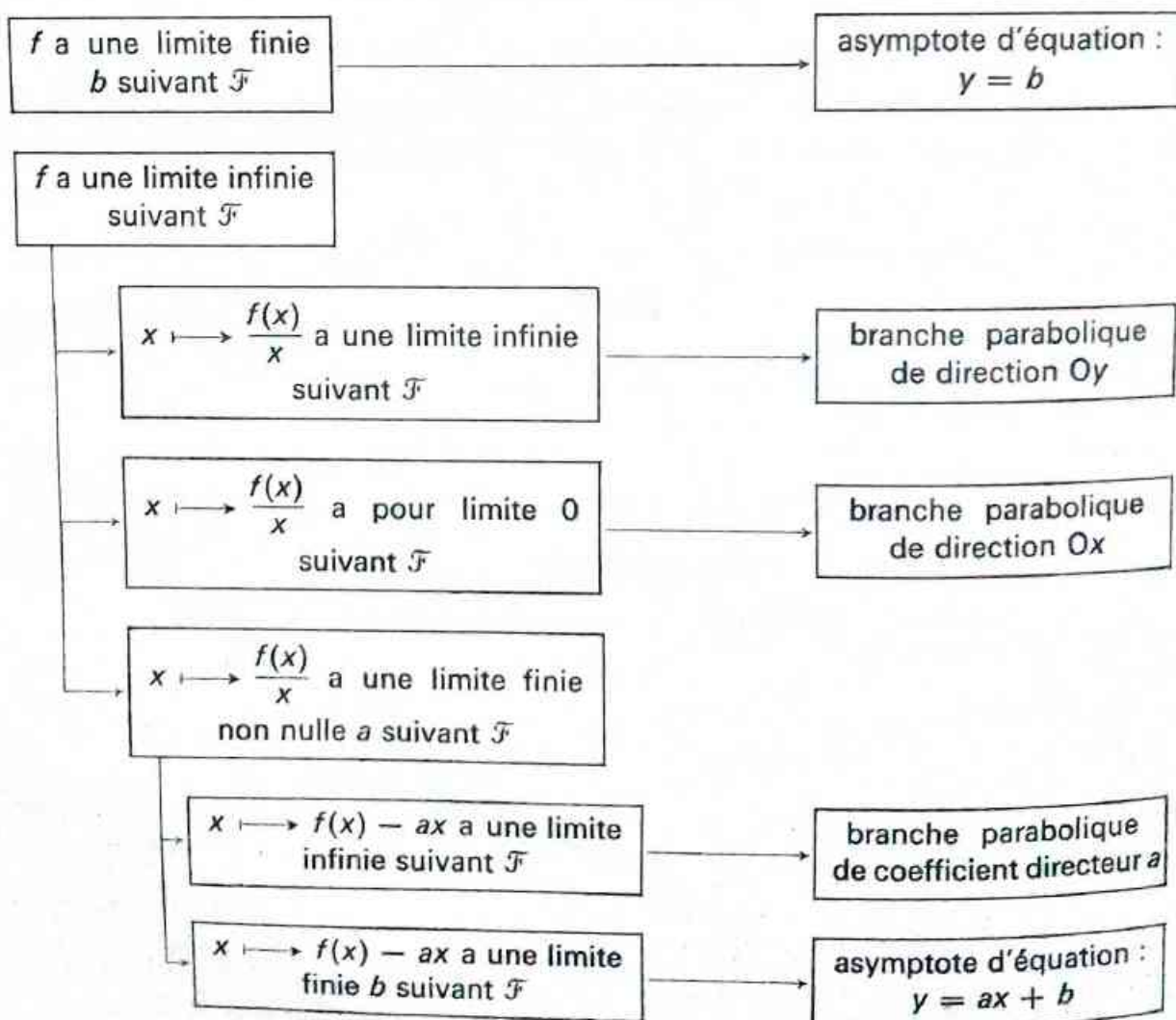
On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, et de même : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part on a : $\forall x \in D_f - \{0\}, \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x+2}$, et par suite :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$

La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction Oy .

3.9 • Nous donnons dans le schéma suivant les différentes branches infinies que l'on rencontre dans la pratique pour la courbe représentative d'une fonction f qui admet une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$; nous désignons par $\mathcal{F}$ la famille de départ considérée.



4. Récapitulation. Exemples.

Plan d'étude d'une fonction.

- 4.1 Soient f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
 Pour étudier la fonction f , on adopte généralement le plan suivant :
- simplifier l'expression du réel $f(x)$ et déterminer l'ensemble de définition D_f de f ;
 - déterminer l'ensemble d'étude E_f , en étudiant la périodicité éventuelle de f et les symétries éventuelles de $\mathcal{C}$;
 - étudier la continuité de f ;
 - étudier la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée f' ;
 - chercher les limites éventuelles de f aux bornes des intervalles qui figurent dans E_f ;
 - faire le tableau de variation;
 - étudier les branches infinies;
 - étudier les points remarquables (points d'inflexion, points d'intersection avec les axes, ...);
 - dessiner la courbe représentative de f .
- Nous donnons quelques exemples d'étude de fonctions.

Étude de la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$.

- 4.2 • De l'étude faite dans les chapitres 6 et 7, il résulte que l'on a :
 $D_f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et, que, par suite, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudions la continuité de f en 0. On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 = f(0)$.

La fonction f est donc continue à droite en 0.

Étudions la dérivabilité de f en 0.

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{-\frac{1}{4}} = +\infty.$$

La fonction n'est donc pas dérivable à droite en 0; mais $\mathcal{C}$ admet en 0 une demi-tangente verticale.

- Soit f' la fonction dérivée de f . On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{4}} = +\infty$.

- On a donc le tableau de variation :

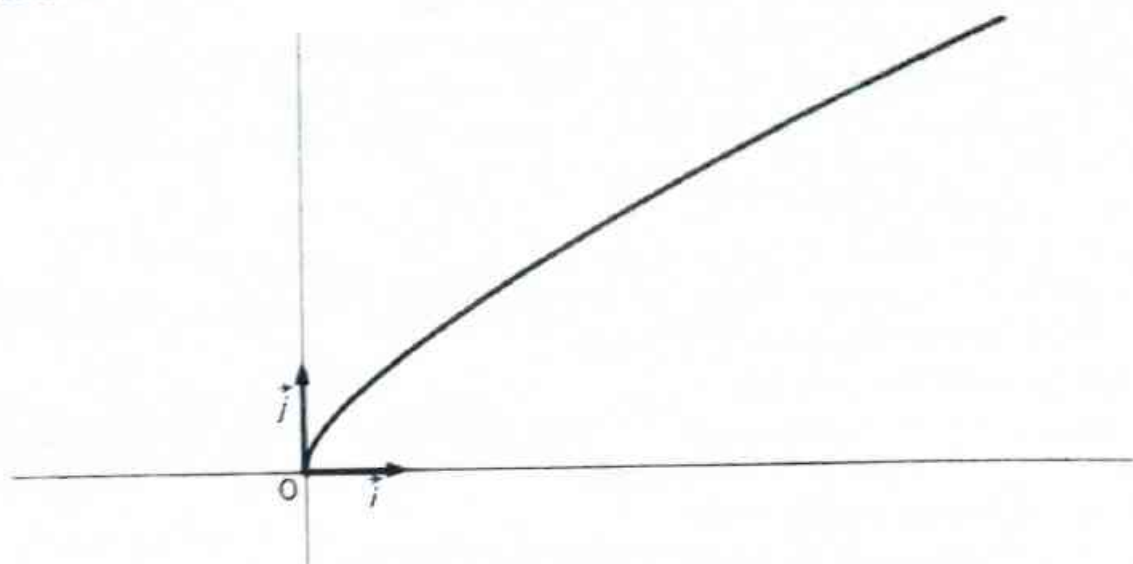
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+
$f(x)$	0	$+\infty$

- Étudions la branche infinie en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{4}} = 0$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une branche parabolique de direction Ox .

- D'où la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f .



Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2}$.

- 4.3 • L'ensemble de définition D_f est $\mathbb{R}^*$.

- On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = f(x)$.

La fonction f est paire; sa courbe représentative $\mathcal{C}$ admet donc l'axe Oy comme axe de symétrie.

Nous étudions la fonction f sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f est le quotient de deux fonctions polynômes; elle est donc dérivable, et par suite continue, sur $]0, +\infty[$.

Soit f' la fonction dérivée de f . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) &= \frac{(4x^3 + 4x)x^2 - 2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{x^4} \\ &= \frac{2x^5 + 6x}{x^4} = \frac{2x(x^4 + 3)}{x^4} \end{aligned}$$

et par suite : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$.

- Cherchons si la fonction f admet une limite en 0.

Des propositions :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + 2x^2 - 3) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0),$$

il résulte que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Cherchons de même si la fonction f admet une limite en $+\infty$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

- On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- Étudions la branche infinie en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

La courbe C admet donc une branche parabolique de direction Oy .

- Cherchons s'il existe des points d'inflexion pour la courbe C . La fonction f' est le quotient de deux fonctions polynômes; elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit f'' la fonction dérivée seconde de f . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[, \quad f''(x) &= \frac{(10x^4 + 6)x^4 - 4x^3(2x^5 + 6x)}{x^8} \\ &= \frac{2x^8 - 18x^4}{x^8} = \frac{2(x^4 - 9)}{x^4} \end{aligned}$$

f''

et par suite :

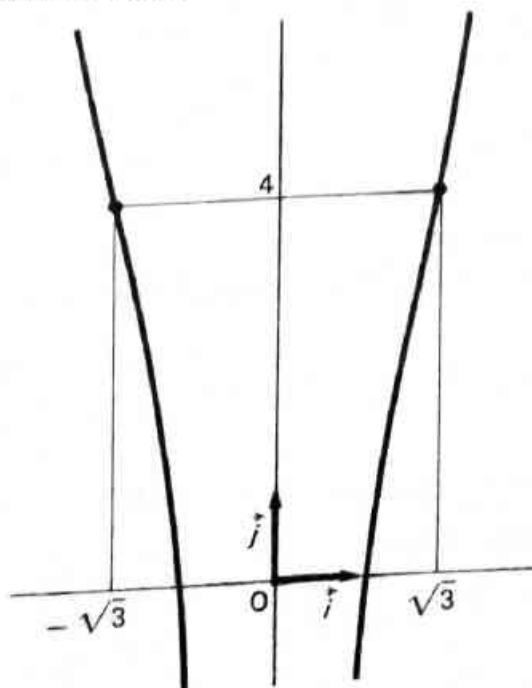
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (f''(x) = 0) \iff (x^4 = 9) \iff (x^2 = 3) \iff (x = \sqrt{3}).$$

Le point A de coordonnées $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right)$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{3}, 4\right)$ est donc un point d'inflexion pour la courbe C .

- Cherchons les points d'intersection de C et de l'axe Ox .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x \in]0, +\infty[, \quad (x^4 + 2x^2 - 3 = 0) &\iff ((x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0) \\ &\iff (x^2 - 1 = 0) \iff (x = 1). \end{aligned}$$

D'où la courbe représentative de f .



Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$

4.4 • L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}^*$.

• Il n'y a pas de symétrie évidente; on étudie donc f sur $\mathbb{R}^*$.

• La fonction f est le quotient de deux fonctions polynômes; elle est donc dérivable, et par suite continue, sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Soit f' la fonction dérivée de f . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= \frac{6x^2 \cdot 2x^2 - 4x(2x^3 + 27)}{4x^4} = \frac{4x^4 - 4 \cdot 27x}{4x^4} \\ &= \frac{4x(x^3 - 27)}{4x^4}. \end{aligned}$$

De la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, ((x^3 - 27 > 0) \iff (x > 3))$, il résulte que f' a le même signe que la fonction $x \mapsto x(x - 3)$.

On a donc : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]0, 3[, f'(x) < 0. \end{cases}$

• Cherchons si la fonction f admet une limite en 0.

Des propositions : $(\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + 27) = 27)$, $(\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0)$, $(\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0)$,

il résulte que l'on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Cherchons si la fonction f admet une limite en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 27}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

De même on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

• On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$

• Étudions les branches infinies.

De la proposition : $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, il résulte que l'axe Oy est asymptote à la courbe représentative C de f .

D'autre part on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2} = x + \frac{27}{2x^2}$.

Des propositions : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27}{x^2} = 0$, il résulte que la droite d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe représentative C de f .

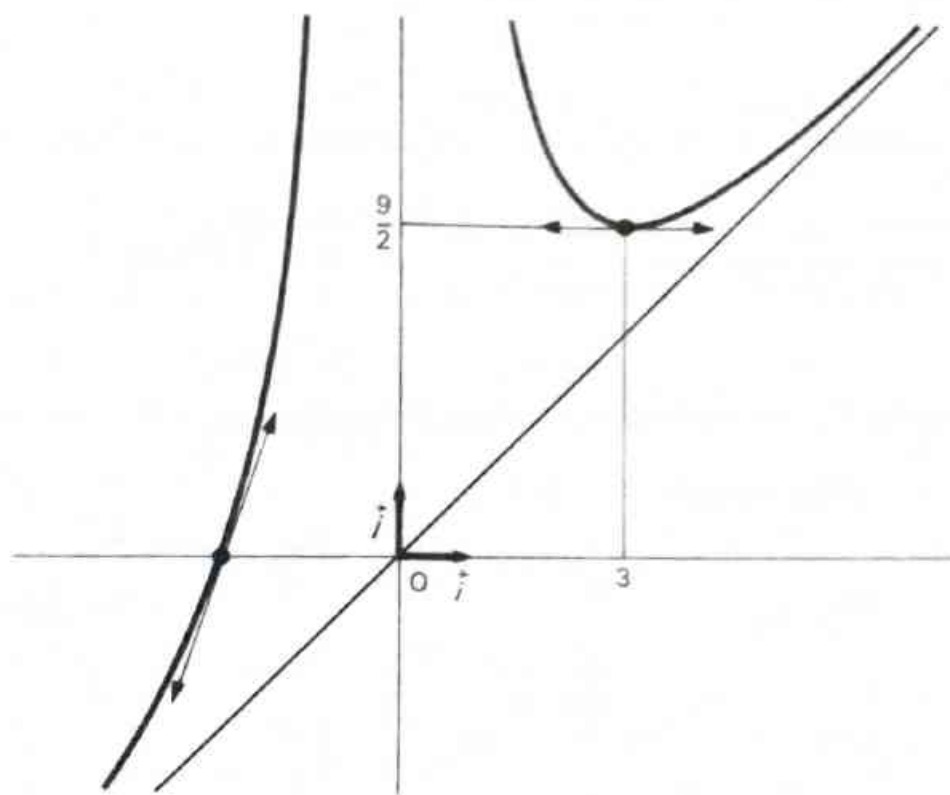
D'autre part on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{27}{2x^2} > 0$; la courbe C est donc au-dessus de l'asymptote.

- Cherchons les points d'intersection de C et de l'axe Ox .

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left((2x^3 + 27 = 0) \iff \left(x^3 = -\frac{27}{2} \right) \iff \left(x = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \right) \right)$.

Une valeur approchée de $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ à 10^{-2} près est $-2,38$.

D'où la courbe représentative de f :



Étude de la fonction $f : x \mapsto x + \operatorname{tg} x$.

4.5 L'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Nous avons démontré dans le paragraphe 1.9 que f est impaire et que l'ensemble d'étude est $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$.

- La fonction f est la somme des fonctions $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$ et tg ; elle est donc dérivable, et par suite continue, sur D_f .

Soit f' la fonction dérivée de f . On a :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = 1 + 1 + \operatorname{tg}^2 x = 2 + \operatorname{tg}^2 x, \text{ et par suite :}$$

$$\forall x \in D_f, f'(x) > 0.$$

- Cherchons si la fonction f admet une limite à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty$, et par suite : $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.

- On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$	

- Le coefficient directeur de la tangente au point O à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est égal à $f'(0) = 2$.

- Étudions si la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion.

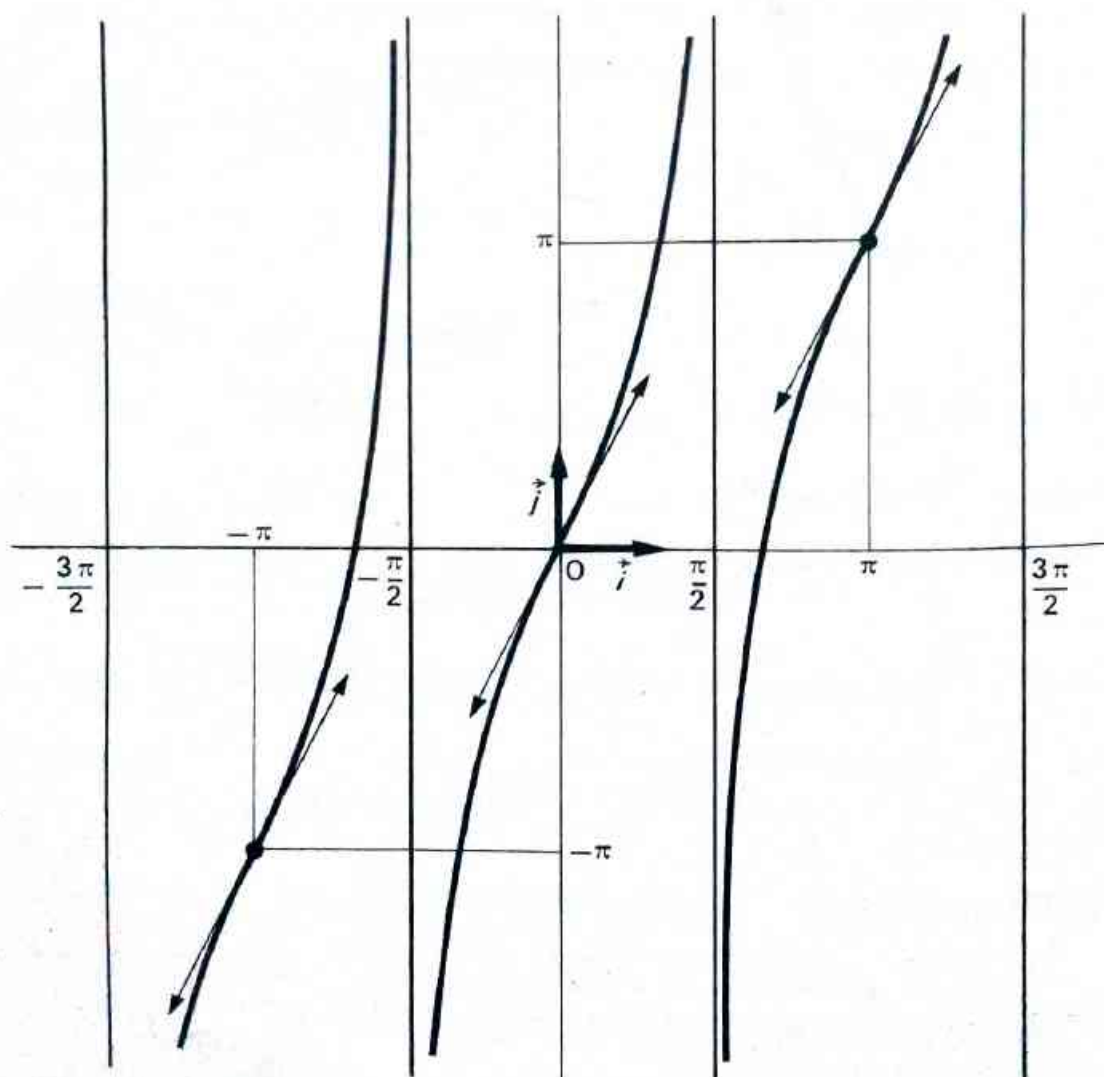
La fonction f' est dérivable sur D_f . Soit f'' la fonction dérivée de f .

On a : $\forall x \in D_f, f''(x) = 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

Il en résulte : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], ((f''(x) = 0) \iff (\operatorname{tg} x = 0) \iff (x = 0))$.

La fonction f'' s'annule en 0 en changeant de signe. Le point O est donc un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

- D'où la courbe représentative de f .



Étude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)^2} + \frac{2}{x+1}$.

4.6 On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$; par suite l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} - \{-1\}$. Nous étudions f sur D_f .

- La fonction $x \mapsto (x-1)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; par suite la fonction : $x \mapsto \sqrt{(x-1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est continue sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$.

La fonction f est donc continue sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$.

- La fonction $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est dérivable sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$.

D'autre part, de l'étude de la fonction $\sqrt{}$, il résulte que la fonction $x \mapsto \sqrt{(x-1)^2}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et sur $] -\infty, 1[$.

La fonction f est donc dérivable sur $] -\infty, -1[$, sur $] -1, 1[$, et sur $]1, +\infty[$, de fonction dérivée f' définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\forall x \in] -\infty, -1[\cup] -1, 1[, f'(x) = -1 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

Étudions la dérivabilité de f en 1 à droite.

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{x - 1 + \frac{2}{x+1} - 1}{x - 1} = 1 + \frac{2 - (x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{et par suite : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

La fonction f est donc dérivable à droite en 1, de nombre dérivé égal à $\frac{1}{2}$.

Étudions de même la dérivabilité de f en 1 à gauche.

On a :

$$\forall x \in] -1, 1[, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x-1) + \frac{2}{x+1} - 1}{x - 1} = -1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{et par suite : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

La fonction f est donc dérivable à gauche en 1, de nombre dérivé égal à $-\frac{3}{2}$.

La courbe représentative C de f admet donc au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{f(1)}\right)$,

c'est-à-dire $\left(\frac{1}{1}\right)$, deux demi-tangentes de supports distincts; le point A est un point anguleux.

- Étudions si la fonction f admet une limite en -1 .

Des propositions :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{(x-1)^2} = 2, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{2}{x+1} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2}{x+1} = -\infty,$$

il résulte que l'on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty.$$

Étudions si la fonction f admet une limite en $+\infty$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

$$\text{et par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{De même on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

- On a : $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[, f'(x) < 0$.

$$\text{D'autre part on a : } \forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2}{(x+1)^2}.$$

Pour tout x de $]1, +\infty[$, le réel $f'(x)$ est du même signe que le réel $(x+1)^2 - 2$.

$$\text{On a : } (x > 1) \implies (x+1 > 2) \implies ((x+1)^2 > 4) \implies ((x+1)^2 - 2 > 2),$$

$$\text{et par suite : } \forall x \in]1, +\infty[, f'(x) > 0.$$

- On a alors le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$- \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad +$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	1	$+\infty$

- Étudions les branches infinies.

Des propositions : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$, il résulte que la droite d'équation : $x = -1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

On a : $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$. La droite d'équation : $y = x - 1$ est donc asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f .

De la proposition : $(\forall x \in]1, +\infty[, x+1 > 0)$, il résulte que $\mathcal{C}$ est au-dessus de cette asymptote.

De même on a :

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x+1}, \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

La droite d'équation : $y = -x + 1$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$.

De la proposition : $(\forall x \in]-\infty, -1[, x+1 < 0)$, il résulte que $\mathcal{C}$ est au-dessous de cette asymptote.

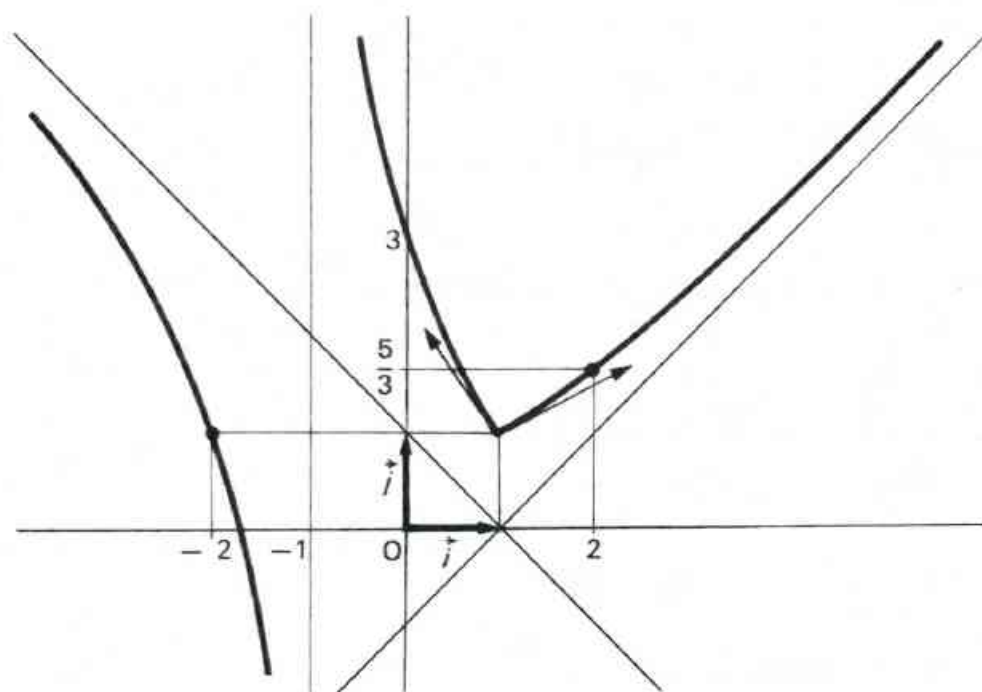
- Étudions les points d'intersection de C et de l'axe Ox .

On a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \left((f(x) = 0) \iff \left(x - 1 + \frac{2}{x+1} = 0 \right) \iff (x^2 + 1 = 0) \right)$$

$$\text{et } \forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[, \left((f(x) = 0) \iff \left(1 - x + \frac{2}{x+1} = 0 \right) \right. \\ \left. \iff (3 - x^2 = 0) \iff (x = -\sqrt{3}) \right).$$

D'où la courbe représentative C de f .



EXERCICES

Soient P un plan affine réel euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P .

Étude de fonctions.

◆ Dans les exercices suivants (nos 1 à 40), on considère une fonction f . Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 $f: x \mapsto -x^4 + 2x^2 + 1.$

2 $f: x \mapsto 4x^3 - 3x + 1.$

3 $f: x \mapsto \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2}.$

4 $f: x \mapsto \frac{2x(x^2 - 2)}{x^2 - 1}.$

5 $f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{x - 1}.$

* 6 $f: x \mapsto \frac{4x - 2}{(x + 2)(x^2 + 1)}.$

7 $f: x \mapsto \frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 1}.$

8 $f: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}.$

9 $f: x \mapsto \frac{(x + 1)^3}{x^2}.$

10 $f: x \mapsto \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)}.$

11 $f: x \mapsto \frac{2}{x(x + 1)(x + 2)}.$

12 $f: x \mapsto x - 2 + \frac{4}{(x - 1)^2}.$

13 $f: x \mapsto x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$

14 $f: x \mapsto x + 1 - \frac{x}{x^2 + 1}.$

15 $f: x \mapsto x + \frac{1}{2} + \frac{9x}{x^2 - 9}.$

16 $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{x}.$

17 $f: x \mapsto \sqrt{-\frac{1}{4}x^2 + 9}.$

18 $f: x \mapsto x\sqrt{3 - x}.$

- 19 $f: x \mapsto (x-1)\sqrt{2x}$.
- 20 $f: x \mapsto x - \sqrt{|x|}$.
- 21 $f: x \mapsto 1 + 2\sqrt{x^2 - 1}$.
- 22 $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$.
- 23 $f: x \mapsto \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4}$.
- 24 $f: x \mapsto x + \sqrt{16 - x^2}$.
- 25 $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
- 26 $f: x \mapsto \frac{\sqrt{6x^2 - 12x + 9}}{x}$.
- 27 $f: x \mapsto \sqrt{\frac{-x^3}{x+1}}$.
- 28 $f: x \mapsto \sqrt{\frac{8}{27}(x+1)^3}$.
- 29 $f: x \mapsto \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$.
- 30 $f: x \mapsto \frac{x+4+\sqrt{x^2+4}}{2}$.
- 31 $f: x \mapsto \sqrt{(2x-2)(5-x)}$.
- 32 $f: x \mapsto \cos^2 x \sin 2x$.
- 33 $f: x \mapsto \cos 2x - 2 \cos x$.
- 34 $f: x \mapsto \sin^2 \frac{x}{2}$.
- 35 $f: x \mapsto \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.
- 36 $f: x \mapsto \frac{\cos x}{1 - \cos x}$.
- 37 $f: x \mapsto \cos^2 x + \sin x \cos x$.
- 38 $f: x \mapsto \sqrt{2 + \cos x} + \sqrt{3} \sin x$.
- 39 $f: x \mapsto 3 \sin^4 x + \cos^4 x - 1$.
- 40 $f: x \mapsto 3 \sin 2x + 2 \cos 3x - 3$.
- 41 Reprendre l'exercice n° 6 du chapitre 6 et étudier la fonction
 $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - |x|} - x$.
- 42 Soit la fonction $f: x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
- 1° Étudier la fonction f et tracer la courbe représentative C de f dans P .
- 2° Préciser les tangentes à la courbe C aux points A, B, C d'abscisses respectives -1, 0, 1.

- 43** Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2x-x^2}$.
- 1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans P .
 - 2° Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie.

- 44** Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

- 1° Démontrer que f est périodique de période π .
- 2° Étudier la fonction f sur $D_f \cap \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- 3° Tracer la courbe représentative de f dans P .

- 45** Soient la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3 - x^2 + x}{1-x}}$ et la fonction

$$u: x \mapsto -2x^3 + 4x^2 - 2x + 1.$$

- 1° Étudier la fonction u et tracer sa courbe représentative Γ dans P .
- 2° Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . Démontrer que, si la fonction f est dérivable en un point x de D_f , le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est égal à :

$$f'(x) = \frac{u(x)}{2f(x)(1-x)^2}.$$

- 3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans P .

- 46** Soit (a, b) un élément de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit la fonction polynôme $Q: x \mapsto ax^3 + bx^2 + bx + a$.

- 1° Déterminer la fonction polynôme R si elle existe telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x+1)R(x).$$

- 2° Déterminer b en fonction de a pour qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = a(x-\alpha)^2.$$

On trouve ainsi deux fonctions polynômes R_1 et R_2 avec $R_2(-1) \neq 0$.

- 3° Étudier la fonction $f: x \mapsto \frac{R_2(x)}{R_1(x)}$ et tracer sa courbe représentative dans P .

- 47** Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

- 1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans P .
- 2° En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} > \frac{5-x}{2}.$$

- 48** Soit la fonction $f: x \mapsto x^3 - 3x + 1$.

- 1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans P .

- 2° En déduire que l'équation : $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions et trois seulement.

Encadrer chacune de ces trois solutions.

- 49** Soient x et y deux réels strictement positifs et f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(z) = z^3 - 3xyz + x^3 + y^3$.

- 1° Étudier la fonction f . Démontrer, en particulier, que la fonction f admet un minimum dont on déterminera le signe.

- 2° Dédire du 1° la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^*, x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

50 Soit la fonction $f: x \mapsto x\sqrt{2-x} + 1$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans P .

2° En déduire l'étude et la courbe représentative de la fonction

$$g: x \mapsto (2-x)\sqrt{x} + 1.$$

51 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{2}$.

1° Étudier la fonction f et tracer la courbe représentative C de f dans P .

2° En déduire l'ensemble Γ des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$4y^2 = |x^2 - 1|.$$

52 Soit la fonction f qui, à tout nombre réel x de l'intervalle $]-1, 0]$, associe le nombre réel $\sqrt{\frac{-x(x^2 + 1)}{x + 1}}$.

1° Étudier la fonction f .

Tracer la courbe représentative C de f dans P . (On précisera la tangente à C au point O .)

2° Déduire du 1° la courbe Γ d'équation :

$$y^2(1+x) + x(x^2 + 1) = 0.$$

53 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{(x+1)^3}{x^2}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans P .

2° Déduire du 1° l'étude et la courbe représentative Γ de la fonction :

$$g: x \mapsto \frac{x+1}{|x|} \sqrt{x+1}.$$

54 Soit la fonction $f: x \mapsto -\frac{x^2 + 4x - 3}{|x + 6|}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans P .

2° Soit k un nombre réel.

Discuter, suivant le réel k , le nombre de points d'intersection de C et de la droite d'équation : $y = k$.

Dans le cas où il n'y a que deux points d'intersection A_k et B_k , on désigne par G_k l'isobarycentre de O, A_k, B_k .

Quel est l'ensemble des points G_k de P lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

Famille de fonctions.

55 Soit m un nombre réel.

Soient la fonction $f_m: x \mapsto \frac{mx^2 + (m-6)x + 7}{mx - 2}$ et la courbe représentative

C_m de f_m dans P .

1° Déterminer m de manière que f_m admette des extrema relatifs en 1 et en 3.

2° Soit m_0 le réel obtenu dans le 1°. Étudier la fonction f_{m_0} et tracer C_{m_0} .

56 Soient a et b deux nombres réels.

Soit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a \sin x + b \sin^3 x$.

1° Démontrer que $f_{a,b}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer les fonctions $f'_{a,b}$ et $f''_{a,b}$.

2° Quelle est, parmi les fonctions données, celle dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ passe par le point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = x$?

On appelle cette fonction f .

3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans P.

57 Soient b et c deux nombres réels.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + bx + c}{x^2 - 3x + 2}$.

1° Déterminer les réels b et c pour que la fonction f admette en 0 un extremum égal à 0.

Dans la suite du problème, on considère les réels b et c ainsi trouvés.

2° Étudier alors la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans P.

3° Soit m un nombre réel. Déterminer le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation : $y = m$.

58 Soit a un nombre réel non nul.

Soient la fonction $f_a : x \mapsto x + a \cos x$ et $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative.

1° Démontrer que $\mathcal{C}_a$ admet une direction asymptotique; $\mathcal{C}_a$ admet-elle une asymptote ?

2° Étudier la fonction f_1 et tracer $\mathcal{C}_1$.

3° Étudier la fonction f_{-1} et tracer $\mathcal{C}_{-1}$.

4° Que peut-on dire des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$?

59 Soit φ un élément de $]0, \pi[$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x^2 - 1) \cos \varphi + 2x \sin \varphi}{x^2 + 1}$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans P.

60 Soit a un nombre réel non nul.

Soit la fonction $f_a : x \mapsto x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$.

1° Déterminer, suivant le réel a , l'ensemble de définition de f_a .

2° Étudier, suivant le réel a , la fonction f_a et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_a$ dans P.

3° Dédire du 2° la courbe $\mathcal{C}'_a$ d'équation : $y = -x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$.

4° En déduire l'ensemble I' des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$.

61 Soit a un nombre réel.

Soient la fonction $f_a : x \mapsto ax + 2\sqrt{1 - x^2}$ et $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative.

1° Étudier, suivant le réel a , la fonction f_a .

2° Tracer les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_{-1}$.

62 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

Soit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 - bx + b^2}$.

1° Étudier, suivant les réels a et b , la fonction $f_{a,b}$.

2° Tracer la courbe représentative C de $f_{\frac{5}{4}, \frac{3}{4}}$.

3° Tracer la courbe représentative C' de $f_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}}$.

63 Soit a un nombre réel non nul.

Soient la fonction $f_a : x \mapsto x \sqrt{\frac{a}{a+x}}$ et C_a sa courbe représentative.

1° Étudier, suivant le réel a , la fonction f_a .

2° Tracer les courbes C_1 et C_{-2} .

64 Soient a et b deux nombres réels non nuls.

Soient la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a \left(x + \frac{b}{x} \right)$ et $C_{a,b}$ sa courbe représentative.

1° Étudier, suivant les réels a et b , la fonction $f_{a,b}$.

2° Tracer les courbes $C_{1,1}$ $C_{1,-1}$ $C_{-1,1}$ $C_{-1,-1}$.

65 Soit a un nombre réel non nul. Soient la fonction $f_a : x \mapsto x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ et C_a la courbe représentative de f_a dans P .

1° Étudier, suivant le réel a , la fonction f_a .

2° Tracer les courbes $C_{\sqrt{5}}$ $C_{-\sqrt{5}}$ C_1 .

66 Mêmes questions que pour le n° 65 avec la fonction $f_a : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

67 Soit a un nombre réel strictement positif.

Soient la fonction $f_a : x \mapsto \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}$ et C_a sa courbe représentative.

1° Étudier la fonction f_a .

2° Tracer la courbe C_1 .

3° Démontrer qu'il existe une homothétie h_a de centre O et dont on déterminera le rapport, telle que l'image de C_1 par h_a soit la courbe C_a .

4° Déterminer l'ensemble des points des courbes C_a où C_a admet une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$ lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$.

* **68** Soit λ un nombre réel non nul.

Soit la fonction $f_\lambda : x \mapsto \frac{-x^4 + 4x^2 + \lambda}{x^2}$ et C_λ sa courbe représentative.

1° Étudier, suivant le réel λ , la fonction f_λ .

2° Démontrer que deux courbes C_λ distinctes n'ont aucun point commun.

3° Tracer les courbes C_3 et C_{-3} .

4° Déterminer l'ensemble E_1 des points M des courbes C_λ où C_λ admet une tangente parallèle à Ox , lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$.

5° Déterminer l'ensemble E_2 des points M des courbes C_λ , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

tels que : $f'_\lambda(x) = 0$, lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$.

6° Démontrer que E_2 se déduit de E_1 par une transformation géométrique simple.

69 Soit λ un nombre réel.

Soient la fonction $f_\lambda : x \mapsto \frac{x^2 - \lambda x}{x^2 - x - 2}$ et C_λ la courbe représentative de f_λ dans P .

1° Déterminer l'ensemble des réels λ tels que la fonction f_λ admette un maximum relatif M et un minimum relatif m .

Calculer le produit Mm et démontrer qu'il s'exprime d'une façon simple en fonction de λ .

2° La fonction f_λ peut-elle admettre un seul extremum? Si oui, pour quelles valeurs de λ ?

3° Tracer les courbes C_1 C_2 C_{-1} C_3 .

70 Soit m un nombre réel.

Soient la fonction $f_m : x \mapsto \frac{(mx - 1)(2 - x)}{x^2 - x}$ et C_m la courbe représentative de f_m dans P .

1° Démontrer que, pour tout réel m , la courbe C_m passe par un point dont les coordonnées sont indépendantes de m .

2° Étudier, suivant le réel m , la fonction f_m .

3° Tracer les courbes C_{-1} C_1 C_2 .

71 Soit r un nombre rationnel.

Soient la fonction $f_r : x \mapsto \frac{x + x^r}{2}$ et la fonction $g_r : x \mapsto \frac{x - x^r}{2}$.

Soit C_r (resp. Γ_r) la courbe représentative de la fonction f_r (resp. g_r) dans P .

1° Déterminer, suivant r , l'ensemble de définition des fonctions f_r et g_r .

2° Tracer les courbes C_0 C_1 Γ_0 Γ_1 .

3° Déterminer l'ensemble des rationnels r tels que la fonction f_r (resp. g_r) soit monotone sur son ensemble de définition.

4° Quand C_r (resp. Γ_r) passe par le point O , déterminer la tangente à C_r (resp. Γ_r) en O .

5° Démontrer que, si r est strictement négatif, il existe une droite qui passe par O et qui est asymptote à C_r et à Γ_r .

6° Tracer $C_{-\frac{1}{2}}$ $C_{\frac{1}{2}}$ C_2 $\Gamma_{-\frac{1}{2}}$ $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ Γ_2 .

72 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Soient n un entier naturel non nul et la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$.

1° Démontrer que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, (f_1(x) = 1 - f(x) \text{ et } f_2(x) = x - 1 + f(x)).$

2° Étudier la fonction f_2 et tracer sa courbe représentative C_2 dans P . La courbe C_2 admet-elle un centre de symétrie?

3° Étudier, suivant l'entier naturel n , la fonction f_n .

73 Soit a un élément de $]0, \pi[$.

Soient la fonction $f_a : x \mapsto \frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x \cos a + 1}$ et C_a la courbe représentative de f_a dans P .

1° Étudier la fonction $f_{\frac{\pi}{3}}$ et tracer la courbe $C_{\frac{\pi}{3}}$.

2° Démontrer que l'on a :

$$\forall a \in]0, \pi[. \quad \forall x \in D_{f_a}, \quad (f_a(x) + 1 \geq 0 \text{ et } -f_a(x) + 1 \geq 0),$$

$$\text{et par suite : } \forall a \in]0, \pi[. \quad \forall x \in D_{f_a}, \quad -1 \leq f_a(x) \leq 1.$$

Les réels 1 et -1 sont-ils atteints par f_a ? Si oui, pour quels réels x ?

Que peut-on en conclure pour l'intersection des courbes C_a ?

3° Étudier la fonction f_a . Donner le tableau de variation. On ne demande pas de construire la courbe C_a , mais on pourra, en quelques mots, comparer son allure à celle de la courbe $C_{\frac{\pi}{3}}$.

4° a) Soient B_a le point d'intersection de C_a et de l'axe Oy et D_a la tangente à C_a en B_a .

Démontrer que l'intersection de C_a et de D_a a deux éléments : le point B_a et un autre point, appelé M_a .

Déterminer, en fonction de a , les coordonnées de M_a .

b) Quel est l'ensemble des points M_a lorsque a décrit l'intervalle $]0, \pi[$? Le dessiner dans P .

c) Déterminer l'ensemble des points du plan P par lesquels il passe une seule droite D_a . Le dessiner dans P .

(D'après Baccalauréat 1971.)

74 A chaque entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n qui, à tout nombre réel strictement positif x , associe le nombre réel $\frac{x^n + 1}{4x^2}$. Soit C_n la courbe représentative de f_n dans P .

1° Étudier les fonctions f_1 et f_2 et tracer les courbes C_1 et C_2 .

2° Pour n strictement supérieur à 2, étudier la fonction f_n et en particulier : sa continuité; son sens de variation (on désignera par x_n le réel pour lequel f_n a un minimum); les limites éventuelles de f_n en $+\infty$ et à droite en 0; l'existence, suivant l'entier n , d'asymptotes à la courbe C_n .

Tracer C_3 .

3° Étudier l'intersection des courbes C_n et $C_{n'}$ pour deux entiers distincts n et n' .

En déduire que toutes les courbes C_n passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.

On suppose que l'on a : $n < n'$; comparer, pour tout nombre réel strictement positif x , les réels $f_n(x)$ et $f_{n'}(x)$.

En déduire la position relative des courbes C_n et $C_{n'}$.

(Baccalauréat 1972, partiel).

9. Fonction vectorielle d'une variable réelle

Dans ce chapitre, nous étudions une généralisation des fonctions numériques d'une variable réelle, puis nous appliquons les résultats obtenus à l'étude de la cinématique.

1. Fonction vectorielle d'une variable réelle.

Dans ce paragraphe, nous désignons par E un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie n . Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de E , nous notons $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ la norme de $\vec{u}$.

Définitions.

- 1.1 DÉFINITION :** Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle, définie sur D et à valeurs dans E , toute application $\vec{f}$ de D dans E .

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on dit simplement fonction vectorielle. On a :

$$\begin{aligned}\vec{f} : D &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \vec{f}(t)\end{aligned}$$

L'ensemble D est l'ensemble de définition de $\vec{f}$.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E et, pour tout réel t de D , soient $\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur $\vec{f}(t)$ dans la base $\mathcal{B}$. Les n fonctions numériques

$f_1, \dots, f_n$ sont les fonctions composantes de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\forall t \in D, \quad \vec{f}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \vec{e}_i$$

Exemples.

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de E ; l'application $\vec{f}$ définie par :

$$\vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto (t^2 + 3) \vec{v}$$

est une fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}$.

Soient $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{v}$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E . Les n fonctions composantes de $\vec{f}$ dans $\mathcal{B}$ sont les n fonctions numériques :

$$t \longmapsto (t^2 + 3)a_1$$

$$\vdots$$

$$t \longmapsto (t^2 + 3)a_n.$$

2. Supposons que E soit de dimension 3 et considérons une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E .

La fonction $\vec{f} : t \longmapsto \frac{1}{t} \vec{i} + (t-1) \vec{j} + t^3 \vec{k}$ est une fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}^*$. Ses trois fonctions composantes f_1, f_2, f_3 dans $\mathcal{B}$ sont :

$$f_1 : t \longmapsto \frac{1}{t}$$

$$f_2 : t \longmapsto t-1$$

$$f_3 : t \longmapsto t^3.$$

Nous remarquons que l'ensemble de définition de $\vec{f}$ est l'intersection des ensembles de définition respectifs de ses fonctions composantes dans la base $\mathcal{B}$.

Opérations sur les fonctions vectorielles.

1.2 Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur D .

• $\mathcal{F}$ est muni d'une addition : si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont deux éléments quelconques de $\mathcal{F}$, leur somme $\vec{f} + \vec{g}$ est définie par :

$$\vec{f} + \vec{g} : D \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$$

• $\mathcal{F}$ est muni d'une multiplication par un réel : si $\vec{f}$ est un élément quelconque de $\mathcal{F}$ et si λ est un réel quelconque, le produit $\lambda \vec{f}$ est défini par :

$$\lambda \vec{f} : D \longrightarrow E$$

$$t \longmapsto \lambda \vec{f}(t)$$

• Il résulte de la définition de ces deux lois que chacune des propriétés de l'addition et de la multiplication externe de E est vérifiée aussi par l'addition et la multiplication externe de $\mathcal{F}$. On a donc le résultat suivant :

L'ensemble des fonctions vectorielles définies sur un même sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel réel par l'addition et la multiplication externe.

• Il est commode, dans certains cas, d'introduire la fonction numérique $\vec{f} \cdot \vec{g}$ définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{g} : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) \end{aligned}}$$

Si $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$ sont les fonctions composantes respectives de $\vec{f}$ et de $\vec{g}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E , on a :

$$\boxed{\forall t \in D, (\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(t)}$$

ATTENTION : L'application qui, à tout couple $(\vec{f}, \vec{g})$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, associe $\vec{f} \cdot \vec{g}$ n'est pas un produit scalaire car $\vec{f} \cdot \vec{g}$ est une fonction numérique et non un réel.

Exemple.

Supposons que E soit de dimension 3 et considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E et deux fonctions vectorielles $\vec{f}$ et $\vec{g}$ définies respectivement par :

$$\vec{f} : t \longmapsto (t-1)\vec{i} + \frac{t+1}{t}\vec{k}$$

$$\vec{g} : t \longmapsto (t+1)\vec{i} + \frac{t^2-t+1}{t-1}\vec{j} + t\vec{k}.$$

L'intersection des ensembles de définition de $\vec{f}$ et de $\vec{g}$ est : $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, (\vec{f} + \vec{g})(t) &= \left((t-1)\vec{i} + \frac{t+1}{t}\vec{k} \right) + \left((t+1)\vec{i} + \frac{t^2-t+1}{t-1}\vec{j} + t\vec{k} \right) \\ &= 2t\vec{i} + \frac{t^2-t+1}{t-1}\vec{j} + \frac{t^2+t+1}{t}\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}, (3\vec{f})(t) &= 3 \left((t-1)\vec{i} + \frac{t+1}{t}\vec{k} \right) \\ &= 3(t-1)\vec{i} + 3 \cdot \frac{t+1}{t}\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, (\vec{f} \cdot \vec{g})(t) &= (t-1)(t+1) + 0 \cdot \frac{t^2-t+1}{t-1} + \frac{t+1}{t} \cdot t \\ &= t^2 - 1 + t + 1 \\ &= t^2 + t. \end{aligned}$$

Continuité.

Boule de centre $\vec{u}$ et de rayon r .

1.3 Soient $\vec{u}$ un vecteur de E et r un réel strictement positif.

Nous appelons **boule de centre $\vec{u}$ et de rayon r** l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E tels que l'on ait : $\|\vec{v} - \vec{u}\| < r$.

Exemple.

Supposons que E soit un plan vectoriel et considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de ce plan vectoriel.

Posons $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et appelons J la boule de centre $\vec{u}$ et de rayon 1.

Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de E , de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On a :

$$(\vec{v} \in J) \iff (\|\vec{v} - \vec{u}\| < 1) \iff (\|(x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j}\| < 1) \\ \iff (\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < 1) \iff ((x-2)^2 + (y-1)^2 < 1).$$

Par exemple, pour le vecteur $\frac{5}{2}\vec{i} + \vec{j}$, on a : $\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + (1 - 1)^2 = \frac{1}{4}$;

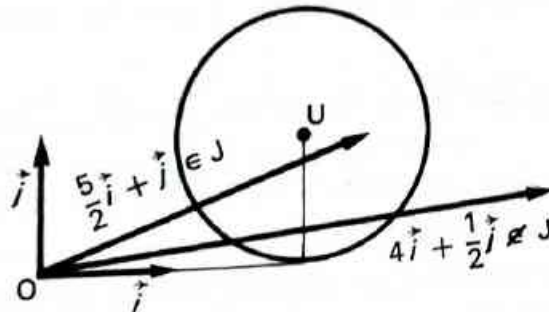
pour le vecteur $4\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, on a : $(4 - 2)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4}$.

Nous en déduisons : $\frac{5}{2}\vec{i} + \vec{j} \in J$ et $4\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \notin J$.

Soient P un plan affine associé à E et O un point de P . Appelons U le point de P défini par : $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$; les coordonnées de U , dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des points M dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ satisfont à : $(x-2)^2 + (y-1)^2 < 1$ est le disque ouvert de centre U et de rayon 1.

La boule J est donc l'ensemble des vecteurs de E tels que les extrémités des bipoints, d'origine O , qui représentent ces vecteurs, appartiennent au disque ouvert de centre U et de rayon 1.



Cette notion de boules de E généralise la notion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$; elle permet de définir la continuité d'une fonction vectorielle de façon analogue à celle d'une fonction numérique.

Continuité en un point.

1.4 DÉFINITION : Soient $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert non vide D de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E et t_0 un élément de D . $\vec{f}$ est continue en t_0 si et seulement si, pour toute boule J de centre $\vec{f}(t_0)$, il existe un intervalle I de centre t_0 tel que l'on ait : $\vec{f}(I) \subset J$, c'est-à-dire : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall t \in D, (|t - t_0| < \alpha) \implies (\|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)\| < \varepsilon)$

Exemple.

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 1.1 et démontrons que $\vec{f}$ est continue en 1. On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}(t) = (t^2 + 3)\vec{v}$ et par suite $\vec{f}(1) = 4\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{v}$ n'est pas nul; on a aussi $\|\vec{v}\| \neq 0$.

Démontrons alors la proposition suivante :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, (|t - 1| < \alpha) \implies (\|(t^2 + 3)\vec{v} - 4\vec{v}\| < \varepsilon)$.

Soient donc ε un réel strictement positif et t un réel quelconque. On a :

$$\|(t^2 + 3)\vec{v} - 4\vec{v}\| = \|(t^2 - 1)\vec{v}\| = |t^2 - 1| \|\vec{v}\| = |t - 1| \cdot |t + 1| \|\vec{v}\|.$$

Imposons la condition : $\alpha < 1$. On a alors :

$$(|t - 1| < 1) \implies (-1 < t - 1 < 1) \implies (1 < t + 1 < 3)$$

$$\implies (|t + 1| < 3)$$

$$\implies (|t - 1| \cdot |t + 1| \|\vec{v}\| < 3 |t - 1| \|\vec{v}\|).$$

Pour avoir $|t - 1| \cdot |t + 1| \|\vec{v}\| < \varepsilon$, il suffit donc d'avoir $3 \|\vec{v}\| |t - 1| < \varepsilon$,

ce qui équivaut à $|t - 1| < \frac{\varepsilon}{3 \|\vec{v}\|}$.

On peut donc prendre pour α le réel $\inf \left(1, \frac{\varepsilon}{3 \|\vec{v}\|} \right)$.

Remarques : 1. Toute fonction vectorielle continue en un point t_0 est définie sur un intervalle de centre t_0 .

2. On peut définir, de façon analogue à ce qui a été fait pour les fonctions numériques, la notion de continuité à droite (resp. à gauche) en un point pour une fonction vectorielle.

Le théorème suivant permet de ramener l'étude de la continuité d'une fonction vectorielle à celle de la continuité de ses fonctions composantes. Nous l'admettons ici, mais nous en proposons une démonstration en exercice.

1.5 THÉORÈME : Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle et soient $f_1, \dots, f_n$ ses n fonctions composantes dans une base orthonormée de E . Soit t_0 un réel de l'ensemble de définition de $\vec{f}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\vec{f}$ est continue en t_0 .

2. Les n fonctions numériques $f_1, \dots, f_n$ sont continues en t_0 .

Exemple.

Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 1.1 et démontrons que $\vec{f}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

$$\text{On a : } \forall t \in \mathbb{R}^*, \vec{f}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + (t-1)\vec{j} + t^3\vec{k}.$$

Les trois fonctions composantes f_1, f_2, f_3 de $\vec{f}$ sont respectivement définies par :

$$f_1 : t \longmapsto \frac{1}{t} \quad f_2 : t \longmapsto t - 1 \quad f_3 : t \longmapsto t^3.$$

Chacune de ces fonctions numériques est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ et par suite, il en est de même de $\vec{f}$.

Propriétés.

1.6 On a les propriétés suivantes :

P1 Soient t_0 un réel et $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux fonctions vectorielles continues en t_0 ; soit λ un réel.
Alors les fonctions vectorielles $\vec{f} + \vec{g}$ et $\lambda \vec{f}$ sont continues en t_0 .

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème 1.5 de ce chapitre et du théorème 1.5 du chapitre 5.

P2 Soient t_0 un réel, φ une fonction numérique continue en t_0 et $\vec{f}$ une fonction vectorielle continue en $\varphi(t_0)$.
Alors la fonction vectorielle $\vec{f} \circ \varphi$ est continue en t_0 .

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème 1.5 de ce chapitre et du théorème 1.7 du chapitre 5.

P3 Soient t_0 un réel et $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux fonctions vectorielles continues en t_0 .
Alors la fonction numérique $\vec{f} \cdot \vec{g}$ est continue en t_0 .

Cette propriété est une conséquence immédiate du paragraphe 1.2 de ce chapitre et du théorème 1.5. du chapitre 5.

Limites.

Dans ce paragraphe, nous généralisons l'étude faite dans le paragraphe 3.6 du chapitre 5.

Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E et soit $\vec{l}$ un vecteur de E .

Nous considérons, pour l'ensemble de départ de $\vec{f}$, les cinq familles de départ habituelles :

- celle des intervalles épointés de centre un réel t_0 de D ;
- celle des intervalles de la forme $]t_0 - \alpha, t_0[$ où t_0 appartient à D ;
- celle des intervalles de la forme $]t_0, t_0 + \alpha[$ où t_0 appartient à D ;
- celle des intervalles de la forme $]b, +\infty[$;
- celle des intervalles de la forme $] -\infty, b[$.

Soit $\mathcal{F}$ l'une de ces familles. Si D contient un intervalle de $\mathcal{F}$, on peut donner un sens à l'expression " $\vec{f}$ a pour limite $\vec{l}$ suivant la famille de départ $\mathcal{F}$ " de la façon suivante :

1.7 **DÉFINITION** : Soient $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $\vec{l}$ un vecteur de E ; soit $\mathcal{F}$ une famille de départ telle que D contienne un intervalle de cette famille.
On dit que $\vec{f}$ a pour limite $\vec{l}$ suivant la famille de départ $\mathcal{F}$ si et si seulement, pour toute boule J de E , de centre $\vec{l}$, il existe un intervalle I de la famille $\mathcal{F}$ tel que : $\vec{f}(I) \subset J$.

Si $\vec{f}$ n'est pas désignée explicitement, nous notons, de façon analogue au paragraphe 3.6 du chapitre 5 : $\lim_{\vec{f}} \vec{f} = \vec{l}$ ou même, s'il n'y a pas de confusion possible,

$$\lim \vec{f} = \vec{l}.$$

Si $\vec{f}$ est désignée explicitement, on emploiera des notations analogues à celles utilisées pour les fonctions numériques.

Ainsi, si t_0 est un point de D tel que D contienne un intervalle épointé de centre t_0 , on obtient la définition suivante :

$\vec{f}$ a pour limite $\vec{l}$ en t_0 ou $\vec{f}(t)$ tend vers $\vec{l}$ quand t tend vers t_0 si et seulement si, pour toute boule J de E , de centre $\vec{l}$, il existe un intervalle épointé I de centre t_0 tel que l'on ait : $\vec{f}(I) \subset J$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall t \in D, (0 < |t - t_0| < \alpha) \implies (\|\vec{f}(t) - \vec{l}\| < \varepsilon)$$

On note alors : $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f} = \vec{l}$ ou encore $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{l}$.

Exemples.

1. Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 1.1 et démontrons que l'on a : $\lim_0 \vec{f} = 3\vec{v}$,

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, (0 < |t| < \alpha) \implies (\|(t^2 + 3)\vec{v} - 3\vec{v}\| < \varepsilon).$$

Soient donc ε un réel strictement positif et t un réel quelconque.

On a : $\|(t^2 + 3)\vec{v} - 3\vec{v}\| = \|t^2\vec{v}\| = t^2 \|\vec{v}\|$ et par suite :

$$(t^2 \|\vec{v}\| < \varepsilon) \iff \left(t^2 < \frac{\varepsilon}{\|\vec{v}\|}\right) \iff \left(|t| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\|\vec{v}\|}}\right)$$

On peut donc prendre pour α le réel $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\|\vec{v}\|}}$.

2. Supposons que E soit de dimension 3 et considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E . La fonction $\vec{f} : t \mapsto \frac{t-2}{2t}\vec{i} + \frac{t+1}{t}\vec{j}$ est une fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}^*$. Démontrons que l'on a : $\lim_{+\infty} \vec{f} = \frac{\vec{i}}{2} + \vec{j}$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists b \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^*, (t > b) \implies \left\| \frac{t-2}{2t}\vec{i} + \frac{t+1}{t}\vec{j} - \frac{\vec{i}}{2} - \vec{j} \right\| < \varepsilon$$

Soient donc ε un réel strictement positif et t un réel quelconque non nul. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{t-2}{2t}\vec{i} + \frac{t+1}{t}\vec{j} - \frac{\vec{i}}{2} - \vec{j} \right\| &= \left\| \frac{t-2-t}{2t}\vec{i} + \frac{t+1-t}{t}\vec{j} \right\| \\ &= \left\| -\frac{1}{t}\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j} \right\| = \left\| \frac{1}{t}(\vec{j} - \vec{i}) \right\| = \left| \frac{1}{t} \right| \|\vec{j} - \vec{i}\|. \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{j} - \vec{i}$ est non nul; il en est donc de même de sa norme et par suite, on a :

$$\left(\left| \frac{1}{t} \right| \|\vec{j} - \vec{i}\| < \varepsilon \right) \iff \left(\left| \frac{1}{t} \right| < \frac{\varepsilon}{\|\vec{j} - \vec{i}\|} \right) \iff \left(|t| > \frac{\|\vec{j} - \vec{i}\|}{\varepsilon} \right)$$

On peut donc prendre pour b le réel $\frac{\|\vec{j} - \vec{i}\|}{\varepsilon}$.

Les trois fonctions composantes f_1, f_2, f_3 de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$f_1 : t \mapsto \frac{t-2}{2t} \quad f_2 : t \mapsto \frac{t+1}{t} \quad f_3 : t \mapsto 0$$

$$\text{et on a : } \lim_{+\infty} f_1 = \frac{1}{2}, \quad \lim_{+\infty} f_2 = 1, \quad \lim_{+\infty} f_3 = 0.$$

Nous remarquons que le vecteur : $\vec{l} = \frac{\vec{i}}{2} + \vec{j}$, limite de $\vec{f}$ en $+\infty$ a pour composantes les limites respectives en $+\infty$ des fonctions composantes de $\vec{f}$.

De façon générale, nous admettons le théorème suivant :

1.8 THÉORÈME : Soient $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $\vec{l}$ un vecteur de E; soient $f_1, \dots, f_n$ les n fonctions composantes de $\vec{f}$ et $\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{l}$, dans une base orthonormée de E. Soit $\mathcal{F}$ une famille de départ telle que D contienne un intervalle de cette famille.

Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \lim_{\mathcal{F}} \vec{f} = \vec{l}.$$

$$(2) \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lim_{\mathcal{F}} f_i = l_i.$$

Exemple.

Supposons que E soit de dimension 2 et considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de E. La fonction $\vec{f} : t \mapsto \frac{|t|}{t} \vec{i} + (2t^2 - 1) \vec{j}$ est une fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}^*$ et ses fonctions composantes, f_1 et f_2 , dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$f_1 : t \mapsto \frac{|t|}{t} \quad \text{et} \quad f_2 : t \mapsto 2t^2 - 1.$$

On a :

$$\lim_{0^+} f_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} f_2 = -1$$

$$\lim_{0^-} f_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{0^-} f_2 = -1$$

$$\text{et, par suite : } \lim_{0^+} \vec{f} = \vec{i} - \vec{j} \quad \text{et} \quad \lim_{0^-} \vec{f} = -\vec{i} - \vec{j}.$$

La fonction vectorielle $\vec{f}$ n'a pas de limite en 0 car la fonction numérique f_1 n'en a pas.

Remarques : 1. Il résulte du théorème 1.8 que, si l'une des fonctions composantes de $\vec{f}$, soit admet une limite infinie, soit n'admet pas de limite, suivant une famille de départ donnée, alors $\vec{f}$ n'admet pas de limite suivant cette famille.

2. Il résulte aussi du théorème 1.8 et du théorème 1.5 que, si t_0 est un réel de l'ensemble de définition de $\vec{f}$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \vec{f} \text{ est continue en } t_0$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f} = \vec{f}(t_0)$$

3. Le théorème 1.8 permet de transposer, pour les fonctions vectorielles, tous les résultats sur les opérations sur les limites énumérés dans les paragraphes 3.8 à 3.12 du chapitre 5.

Dérivée.

Dans ce paragraphe, nous généralisons l'étude faite dans le paragraphe 1.2 du chapitre 7.

1.9 DÉFINITION : Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert non vide D de $\mathbb{R}$.

Soient t_0 un point de D et $\vec{l}$ un vecteur de E .

On dit que $\vec{f}$ est dérivable en t_0 , de vecteur dérivé $\vec{l}$ si et seulement si la proposition suivante est vérifiée : $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} = \vec{l}$.

Exemple.

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 1.1 et démontrons que la fonction $\vec{f} : t \mapsto (t^2 + 3)\vec{v}$ est dérivable en 0, de vecteur dérivé le vecteur nul $\vec{0}$ de E . Cherchons pour cela la limite éventuelle en 0 de la fonction vectorielle

$$t \mapsto \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(0)}{t}.$$

Soit donc t un réel quelconque non nul.

$$\text{On a : } \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(0)}{t} = \frac{(t^2 + 3)\vec{v} - 3\vec{v}}{t} = t\vec{v}.$$

Soient $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{v}$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E . Les fonctions

composantes de $\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(0)}{t}$ sont donc : $\begin{pmatrix} t \mapsto tv_1 \\ \vdots \\ t \mapsto tv_n \end{pmatrix}$.

De la proposition : $(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lim_{t \rightarrow 0} tv_i = 0)$, il résulte que l'on a : $\lim_{t \rightarrow 0} t\vec{v} = \vec{0}$, ce qui démontre le résultat.

Remarquons encore que, chacune des fonctions composantes $f_1 \dots f_n$ de $\vec{f}$ dans $\mathcal{B}$ est dérivable en 0, de nombre dérivé égal à 0 et que le vecteur dérivé de $\vec{f}$ en 0 a pour composantes le nombre dérivé en 0 des fonctions composantes de $\vec{f}$.

De façon générale, on a le théorème suivant :

1.10 THÉORÈME : Soient $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $\vec{l}$ un vecteur de E ; soient $f_1, \dots, f_n$ les n fonctions composantes de $\vec{f}$ et $\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{l}$ dans une base orthonormée de E .

Soit t_0 un réel de D .

Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) La fonction vectorielle $\vec{f}$ est dérivable en t_0 , de vecteur dérivé $\vec{l}$.
- (2) Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, la fonction numérique f_i est dérivable en t_0 , de nombre dérivé l_i .

Démonstration :

$\vec{f}$ est dérivable en t_0 , de vecteur dérivé $\vec{f}'$, si et seulement si on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} = \vec{f}'$$

Soit t un réel quelconque de $D - \{t_0\}$.

Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$ est $\frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}$ et celle de $\vec{f}'$ est f'_i .

Il résulte donc du théorème 1.8 que l'on a :

$$\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} = \vec{f}' \right) \iff \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = f'_i \right). \blacksquare$$

Remarques : 1. Des théorèmes 1.5 et 1.10 de ce chapitre et du théorème 1.5 du chapitre 7, il résulte que toute fonction vectorielle dérivable en un point est continue en ce point; mais la réciproque est fautive.

2. Si $\vec{f}$ est dérivable en tout point de D , on définit la **fonction dérivée** $\vec{f}'$ de $\vec{f}$ sur D de façon analogue à ce qui a été fait pour les fonctions numériques.

Il résulte du théorème 1.10 que, si $f_1, \dots, f_n$ sont les fonctions composantes de $\vec{f}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E , on a :

$$\forall t \in D, \vec{f}'(t) = \sum_{i=1}^n f'_i(t) \vec{e}_i$$

3. On définit aussi, comme pour les fonctions numériques, la **fonction dérivée** $n^{\text{ème}}$, notée $\vec{f}^{(n)}$, de $\vec{f}$ sur D .

Si $\vec{f}^{(n)}$ existe, on dit que $\vec{f}$ est n fois dérivable sur D .

Exemples.

Supposons que E soit de dimension 3 et considérons une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E .

1. Soit la fonction vectorielle $\vec{f} : t \mapsto (t-1)\vec{i} + (2t^2+1)\vec{j} + t^3\vec{k}$.

La fonction $\vec{f}$ est définie et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}'(t) = \vec{i} + 4t\vec{j} + 3t^2\vec{k}.$$

On a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}''(t) = \vec{0} + 4\vec{j} + 6t\vec{k} = 4\vec{j} + 6t\vec{k}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}'''(t) = \vec{0} + 6\vec{k} = 6\vec{k}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, \forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}^{(n)}(t) = \vec{0}.$$

2. Soit la fonction vectorielle $\vec{f} : t \mapsto (\sin 2t)\vec{i} + (\cos 2t)\vec{j}$. La fonction $\vec{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}'(t) &= (2 \cos 2t)\vec{i} + (-2 \sin 2t)\vec{j} \\ &= 2 \sin \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + 2 \cos \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{et : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}^{(n)}(t) = 2^n \sin \left(2t + n \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + 2^n \cos \left(2t + n \frac{\pi}{2} \right) \vec{j}.$$

Propriétés.

1.11 On a les propriétés suivantes :

P1

Soient t_0 un réel et $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux fonctions vectorielles dérivables en t_0 , soit λ un réel.

Alors les fonctions vectorielles $\vec{f} + \vec{g}$ et $\lambda \vec{f}$ sont dérivables en t_0 et l'on a :

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t_0) = \vec{f}'(t_0) + \vec{g}'(t_0)$$

$$(\lambda \vec{f})'(t_0) = \lambda \vec{f}'(t_0)$$

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème 1.10 de ce chapitre et de la propriété P₂ du paragraphe 2.2 du chapitre 7.

P2

Soient t_0 un réel, $\vec{f}$ une fonction vectorielle et φ une fonction numérique, dérivables en t_0 .

Alors la fonction vectorielle $\varphi \vec{f} : t \mapsto \varphi(t) \vec{f}(t)$ est dérivable en t_0 et l'on a : $(\varphi \vec{f})'(t_0) = \varphi'(t_0) \vec{f}(t_0) + \varphi(t_0) \vec{f}'(t_0)$.

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème 1.10 de ce chapitre et de la propriété P₃ du paragraphe 2.2 du chapitre 7.

P3

Soient t_0 un réel, φ une fonction numérique dérivable en t_0 et $\vec{f}$ une fonction vectorielle dérivable en $\varphi(t_0)$.

Alors la fonction vectorielle $\vec{f} \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et l'on a :

$$(\vec{f} \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0) \vec{f}'(\varphi(t_0)).$$

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème 1.10 de ce chapitre et du théorème 2.4 du chapitre 7.

P4

Soient t_0 un réel et $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux fonctions vectorielles dérivables en t_0 .

Alors la fonction numérique $\vec{f} \cdot \vec{g}$ est dérivable en t_0 et l'on a :

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t_0) = \vec{f}'(t_0) \cdot \vec{g}(t_0) + \vec{f}(t_0) \cdot \vec{g}'(t_0).$$

Cette propriété est une conséquence immédiate du paragraphe 1.2 de ce chapitre et de la propriété P₃ du paragraphe 2.2 du chapitre 7.

Application à la recherche de tangentes.

Dans les paragraphes suivants (nos 1.12 à 1.18), nous supposons que l'espace vectoriel E est de dimension 2 ou 3 et qu'il est orienté; nous désignons par $\mathcal{B}$ une base directe de E , par $\mathcal{E}$ un espace affine associé à E , par O un point de $\mathcal{E}$ et par $\mathcal{R}$ le repère $(O, \mathcal{B})$. Toutes les coordonnées (resp. les composantes) des points de $\mathcal{E}$ (resp. des vecteurs de E) sont données dans ce repère (resp. cette base).

1.12 Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ appartienne à l'image $\vec{f}(D)$ de D par $\vec{f}$.

$$C = \{M \in E \mid \exists t \in D, \overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)\}$$

L'ensemble C est appelé l'**indicatrice** de la fonction vectorielle $\vec{f}$ relative à O .
Si E est de dimension 3, soient f_1, f_2, f_3 les fonctions composantes de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit alors M un point quelconque de E , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a :

$$(M \in C) \iff \left(\exists t \in D, \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \right)$$

On dit que l'on a une **représentation paramétrique** de l'indicatrice C dans le repère $\mathcal{R}$; le réel t est le **paramètre** et le point M est le **point de paramètre t** .
On donne une définition analogue si E est de dimension 2.

Remarque : Dans les exemples que nous rencontrerons, l'ensemble C correspond en général à la notion intuitive de courbe du plan ou de l'espace.

Exemples.

1. Supposons que E soit de dimension 3.

Soient a, b, c trois réels. L'ensemble C dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \text{ est réduit au point de coordonnées } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. Supposons que E soit de dimension 2.

L'ensemble C dont une représentation paramétrique, de paramètre t , est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \text{ est l'ensemble des points de } E \text{ dont les coordonnées } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ satisfont à :}$$

$y = x^2$, cet ensemble est une parabole.

Remarquons que : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{cases}$ est une autre représentation paramétrique, de paramètre t de la même courbe.

3. Supposons que E soit de dimension 2.

L'ensemble C dont une représentation paramétrique, de paramètre t est :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \text{ est l'ensemble des points de } E \text{ dont les coordonnées } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ satisfont à :}$$

$x^2 + y^2 = 1$; cet ensemble est le cercle de centre O et de rayon 1.

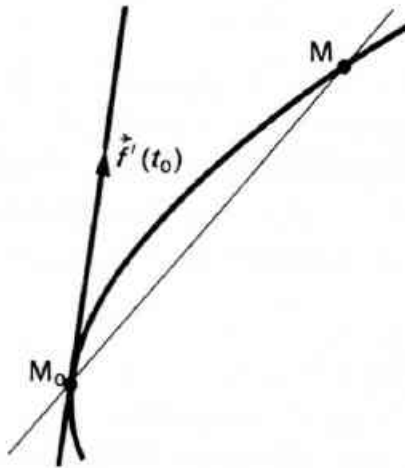
On a aussi la définition suivante :

1.13 **DÉFINITION :** Soient $\vec{f}$ une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et C l'ensemble défini par : $C = \{M \in E \mid \exists t \in D, \overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)\}$.

Soit t_0 un point de D tel que $\vec{f}'(t_0)$ existe et ne soit pas égal au vecteur nul de E ; soit M_0 le point de C de paramètre t_0 .

On dit que la droite D , passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{f}'(t_0)$, est tangente en M_0 à C .

Remarques : 1. Soient t un réel de D , distinct de t_0 et M le point de C de paramètre t . La fonction $\vec{f}$ est dérivable en t_0 et par suite, elle est continue en t_0 . Les coordonnées du point M tendent donc vers celles de M_0 quand t tend vers t_0 . D'autre part, il résulte de l'égalité : $\overrightarrow{M_0M} = \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)$ que le vecteur $\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$ est un vecteur directeur de la droite (M_0M) . Les coordonnées de ce vecteur tendent vers celles du vecteur $\vec{f}'(t_0)$, vecteur directeur de la tangente en M_0 à C , quand t tend vers t_0 . Il résulte du paragraphe 1.6 du chapitre 7 que la tangente en M_0 à C est la position limite de la sécante M_0M quand t tend vers t_0 .



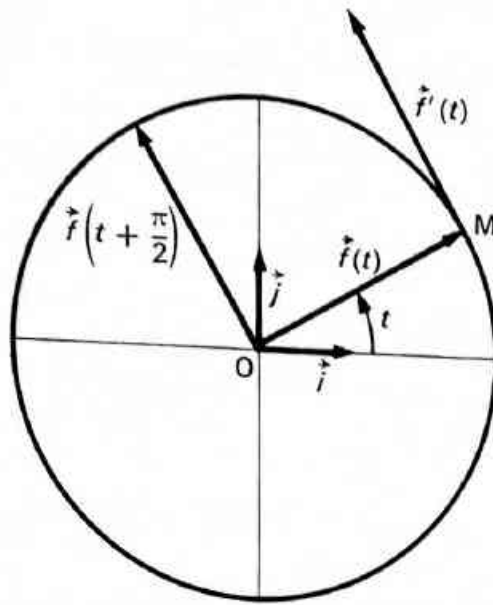
2. Supposons que E soit de dimension 2. Dans le paragraphe 1.7 du chapitre 7, nous avons introduit la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point M_0 d'abscisse x_0 tel que $f'(x_0)$ existe. Une telle courbe peut être considérée comme l'ensemble C dont une représentation paramétrique, de paramètre x , est : $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$, c'est-à-dire l'indicatrice C de la fonction vectorielle $\vec{g} : x \mapsto x\vec{i} + f(x)\vec{j}$. Si f est dérivable en x_0 , il en est de même de $\vec{g}$ et on a : $\vec{g}'(x_0) = \vec{i} + f'(x_0)\vec{j}$. Le vecteur $\vec{g}'(x_0)$ est donc non nul; l'ensemble C admet, par suite, une tangente au point M_0 , qui est la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{g}'(x_0)$, c'est-à-dire la droite d'équation : $\begin{vmatrix} x - x_0 & 1 \\ y - y_0 & f'(x_0) \end{vmatrix} = 0$, ce qui équivaut à : $y = y_0 + (x - x_0)f'(x_0)$. On retrouve donc l'équation de la tangente obtenue dans le chapitre 7. Nous allons étudier avec plus de précision, trois exemples.

Cercle.

1.14 Supposons que E soit de dimension 2.

- Soit R un réel strictement positif. L'ensemble C des points de E dont une représentation paramétrique, de paramètre t , est : $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$ est l'ensemble des points de E dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $x^2 + y^2 = R^2$; c'est donc le cercle de centre O et de rayon R .

- Si t est un réel quelconque et si M est le point de C de paramètre t , on a alors :
angle $(\vec{i}, \vec{OM}) = t \pmod{2\pi}$. Le réel t est appelé l'angle polaire de M , de pôle O .



- Soit $\vec{f}$ la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans E , définie par la représentation paramétrique de C . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}(t) = (R \cos t) \vec{i} + (R \sin t) \vec{j}$$

$$\text{et : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}(t) = \left(R \cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right) \vec{i} + \left(R \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right) \vec{j} = \vec{f} \left(t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{et : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\vec{f}(t)\| = R \sqrt{\cos^2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin^2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} = R$$

$$\text{et, par suite : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}'(t) \neq \vec{0}.$$

En chacun de ses points M , le cercle C admet une tangente qui est la droite passant par M et perpendiculaire à la droite (OM) .

Ellipse.

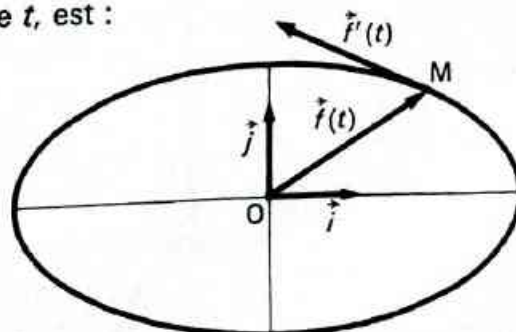
1.15 Supposons que E soit de dimension 2.

- Soient a et b deux réels strictement positifs. L'ensemble C des points de E dont une représentation paramétrique, de paramètre t , est :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \text{ est l'ensemble des points}$$

de E dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \text{ c'est donc, d'après le paragraphe 1.2 du chapitre 11 du tome 1, une ellipse de centre } O.$$



• Soit $\vec{f}$ la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans E , définie par la représentation paramétrique de C . On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}(t) = (a \cos t) \vec{i} + (b \sin t) \vec{j}$
 et : $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{f}'(t) = (-a \sin t) \vec{i} + (b \cos t) \vec{j}$.
 Le système $\begin{cases} \sin t = 0 \\ \cos t = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et par suite, le vecteur $\vec{f}'(t)$ n'est pas nul. Nous énonçons :

En chacun de ses points M , l'ellipse C admet une tangente qui est la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{f}'(t)$.

• L'équation de cette tangente est : $\begin{vmatrix} x - a \cos t & -a \sin t \\ y - b \sin t & b \cos t \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire :
 $(x - a \cos t) b \cos t + (y - b \sin t) a \sin t = xb \cos t - ya \sin t - ab = 0$,
 ce qui équivaut à : $\frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} - 1 = \frac{xa \cos t}{a^2} + \frac{yb \sin t}{b^2} - 1 = 0$.

L'équation de la tangente est donc : $\frac{xa \cos t}{a^2} + \frac{yb \sin t}{b^2} - 1 = 0$.

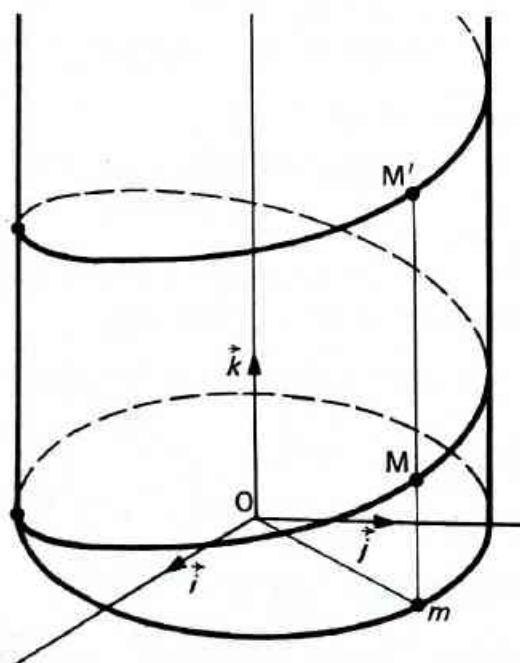
On retrouve l'équation de la tangente au point M de coordonnées $\begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ à l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, (paragraphe 1.4, chapitre 11, tome 1).

Hélice circulaire droite.

Supposons que E soit de dimension 3.

Définition.

1.16 • Soient R un réel strictement positif et h un réel non nul. L'ensemble C des points de E , dont une représentation paramétrique, de paramètre t , est : $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = ht \end{cases}$
 est appelé une **hélice circulaire droite**, d'axe Oz .



• Soient t un réel, M le point de C de paramètre t et m la projection orthogonale de M sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées de m sont $\begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ et, par suite, le point m appartient au cercle de centre O et de rayon R du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et satisfait à :
 $\widehat{\text{angle}}(\vec{i}, \overrightarrow{Om}) = t \quad (2\pi)$.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ et donc : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + ht\vec{k}}$

• Soit maintenant M' le point de C , de paramètre $t + 2\pi$. Les coordonnées respectives de M et de M' sont :

$$M \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ ht \end{pmatrix} \quad M' \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h(t + 2\pi) \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = 2\pi h\vec{k}$.

La distance MM' , égale à $2\pi|h|$, ne dépend pas du paramètre t du point M . Cette distance est appelée **le pas de l'hélice**. Si l'on désigne ce pas par p , on a

l'égalité : $\boxed{p = 2\pi|h|}$

Si h est positif, on dit que l'hélice a **le pas à droite** ; si h est négatif, on dit que l'hélice a **le pas à gauche**.

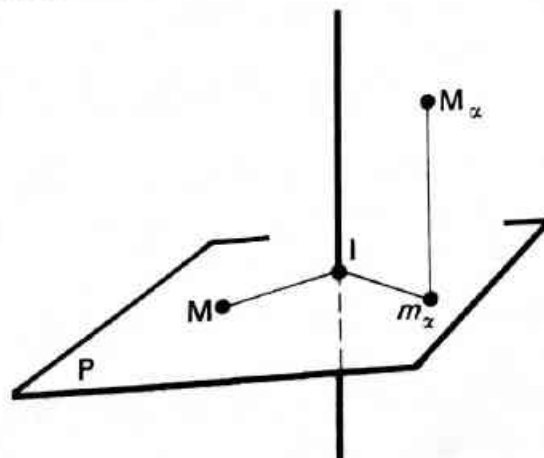
Déplacements qui laissent une hélice globalement invariante.

1.17 • Il résulte de l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = 2\pi h\vec{k}$ que le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $2\pi h\vec{k}$. L'hélice est globalement invariante par cette translation : l'image d'un point quelconque de C , de paramètre t , par cette translation, est le point de C de paramètre $t + 2\pi$.

• Plus généralement, soient α un réel quelconque, r_α la rotation d'axe Oz orienté par le vecteur $\vec{k}$, d'angle $\alpha \quad (2\pi)$ et t_α la translation de vecteur $\alpha h\vec{k}$. Soit f_α le vissage égal à $r_\alpha \circ t_\alpha$.

Remarquons que $f_{2\pi}$ est la translation de vecteur $2\pi h\vec{k}$ étudiée ci-dessus et que f_0 est l'identité de $\mathcal{E}$.

Soient M un point quelconque de C , de paramètre t et M_α son image par f_α . Soit m_α la projection orthogonale de M_α sur le plan P , passant par M et perpendiculaire à l'axe Oz et soit I l'intersection de ce plan avec l'axe Oz .



Le point m_α est l'image de M par la rotation de centre I et d'angle α dans le plan P orienté par le vecteur $\vec{k}$ de l'axe Oz .

Les coordonnées de M sont : $\begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ ht \end{pmatrix}$ et par suite, celles de m_α sont :

$\begin{pmatrix} R \cos(t + \alpha) \\ R \sin(t + \alpha) \\ ht \end{pmatrix}$. On a, enfin : $\overrightarrow{m_\alpha M_\alpha} = \alpha h \vec{k}$. Les coordonnées du point M_α sont

alors : $\begin{pmatrix} R \cos(t + \alpha) \\ R \sin(t + \alpha) \\ ht + h\alpha \end{pmatrix}$.

Le point M_α est donc le point de C de paramètre $t + \alpha$.

L'hélice est globalement invariante par tous les déplacements tels que f_α .

C'est une des raisons pour lesquelles ces déplacements ont été appelés déplacements hélicoïdaux.

Tangentes à une hélice.

1.18 • Soit $\vec{f}$ la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans E définie par la représentation paramétrique de C . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}(t) = (R \cos t) \vec{i} + (R \sin t) \vec{j} + ht \vec{k}$$

$$\text{et : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}'(t) = (-R \sin t) \vec{i} + (R \cos t) \vec{j} + h \vec{k}$$

$$\text{et : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2}$$

et par suite : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}'(t) \neq \vec{0}$. Nous pouvons donc énoncer :

En chacun de ses points M , l'hélice C admet une tangente qui est la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{f}'(t)$.

Remarque : La projection orthogonale, sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la tangente à l'hélice en un point M de paramètre t est la droite qui passe par le point m de coordonnées $\begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $-R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}$, c'est-à-dire la tangente en m au cercle de centre O et de rayon R du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

• Soient α un réel non nul et f_α le déplacement hélicoïdal défini dans le paragraphe 1.17.

Désignons par φ_α l'application linéaire associée à f_α , par M un point quelconque de l'hélice, de paramètre t et par D_t la tangente en M à l'hélice.

L'image de D_t par f_α est la droite passant par le point $f_\alpha(M)$ et de vecteur directeur $\varphi_\alpha(\vec{f}'(t))$. Il résulte du paragraphe 1.17 que le point $f_\alpha(M)$ est le point M_α de l'hélice de paramètre $t + \alpha$.

L'application linéaire φ_α est la rotation vectorielle d'axe la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{k}$ et d'angle α (2π); on a donc :

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(\vec{k}) = \vec{k} \\ \varphi_\alpha(\vec{i}) = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \\ \varphi_\alpha(\vec{j}) = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \end{cases}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\vec{r}(t)) &= -R \sin t (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + R \cos t (-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}) + h \vec{k} \\ &= -R \sin(t + \alpha) \vec{i} + R \cos(t + \alpha) \vec{j} + h \vec{k} \\ &= \vec{r}(t + \alpha). \end{aligned}$$

L'image de D_t par f_α est donc la tangente $D_{t+\alpha}$ en M_α à l'hélice.

D'autre part, il est immédiat que l'axe Oz est invariant par f_α . Lorsque t varie, le couple (Oz, D_t) reste donc isométrique à lui-même. On exprime cette propriété en disant que lorsque t varie la tangente D_t fait "un angle constant" avec l'axe Oz.

2. Cinématique.

Définitions.

2.1 La cinématique est l'étude "des points matériels en mouvement dans le temps".

- Le temps est représenté par une droite affine réelle, munie d'un repère. Si t est un réel, l'instant ou la date t est le point de la droite affine d'abscisse t dans le repère choisi. Un intervalle de temps I est un intervalle de la droite affine.

- Un point matériel M est représenté par un point d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de dimension 1, 2 ou 3, associé à un espace vectoriel réel orienté E ; l'espace vectoriel E est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et l'espace affine, du repère $\mathcal{R}$ constitué d'un point O de $\mathcal{E}$ et de la base $\mathcal{B}$. Toutes les composantes (resp. les coordonnées) de tous les vecteurs de E (resp. de tous les points de $\mathcal{E}$) sont données, sauf mention expresse, dans cette base (resp. ce repère).

- Soit I un intervalle de temps. Le mouvement du point matériel M pendant l'intervalle de temps I est représenté par une application $\vec{f}$ de I dans E , deux fois dérivable sur I .

- Nous ne considérerons que des intervalles de temps de la forme $[t_0, +\infty[$ ou $[t_0, t_1]$ où t_0 et t_1 sont deux réels. L'instant t_0 est l'instant initial et l'instant t_1 l'instant final du mouvement; le réel $t_1 - t_0$ est la durée du mouvement.

- Si t est un instant quelconque de I , le point M_t de $\mathcal{E}$, défini par : $\overrightarrow{OM_t} = \vec{f}(t)$ est la position de M à l'instant t .

Le point M_{t_0} est la position initiale et le point M_{t_1} la position finale de M .

- Si la fonction vectorielle $\vec{f}$ est constante sur I , le point M est fixe pendant l'intervalle de temps I .

- Si la fonction vectorielle $\vec{f}$ n'est pas constante sur I , la **trajectoire** $\mathcal{C}$ de M est l'ensemble des positions de M pour tout instant de l'intervalle de temps I .
 $\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{E} \mid \exists t \in I, P = M_t\}$.
- Le point M a un **mouvement rectiligne** si et seulement si sa trajectoire est incluse dans une droite de $\mathcal{E}$.
- Le point M a un **mouvement circulaire** si et seulement si sa trajectoire est incluse dans un cercle de $\mathcal{E}$.

Exemple.

Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension 2 et considérons un point matériel M en mouvement dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $[0, 1]$ est donnée par :

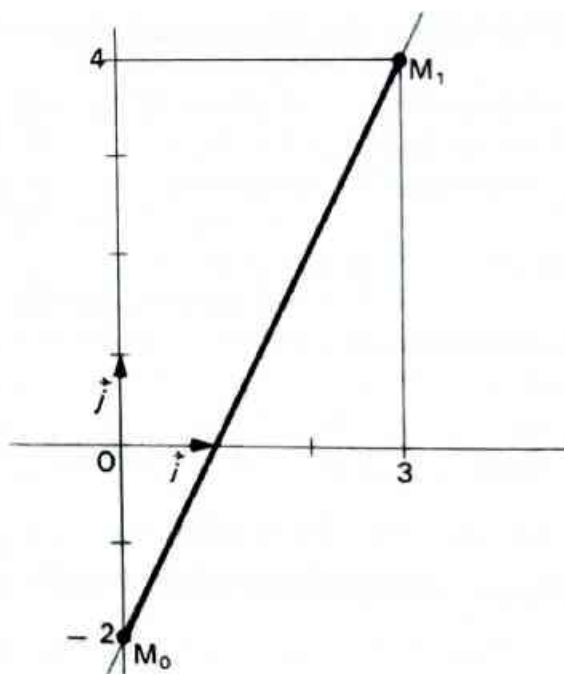
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - 2. \end{cases}$$

La position initiale de M est le point M_0 de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et sa position finale

est le point M_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La trajectoire de M est incluse dans la droite d'équation : $y = 2x - 2$; cette droite passe par les points M_0 et M_1 et tout point du segment $[M_0, M_1]$ est atteint par le point M à un instant de $[0, 1]$.

Le mouvement de M est donc rectiligne et sa trajectoire est le segment $[M_0, M_1]$.



Vecteur-vitesse.

2.2 DÉFINITION : Soit M un point matériel dont le mouvement, pendant un intervalle de temps I , est représenté par la fonction vectorielle $\vec{f}$. Soit t un instant quelconque de I .

On appelle **vecteur-vitesse** de M à l'instant t , et on note $\vec{V}(t)$, le vecteur $\vec{f}'(t)$.

La **vitesse arithmétique** de M à l'instant t est le réel $\|\vec{V}(t)\|$.

Remarque : Il résulte du paragraphe 1.13 que, si pour un instant t de I , le vecteur $\vec{V}(t)$ n'est pas nul, ce vecteur est un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire de M au point M_t , position de M à l'instant t .

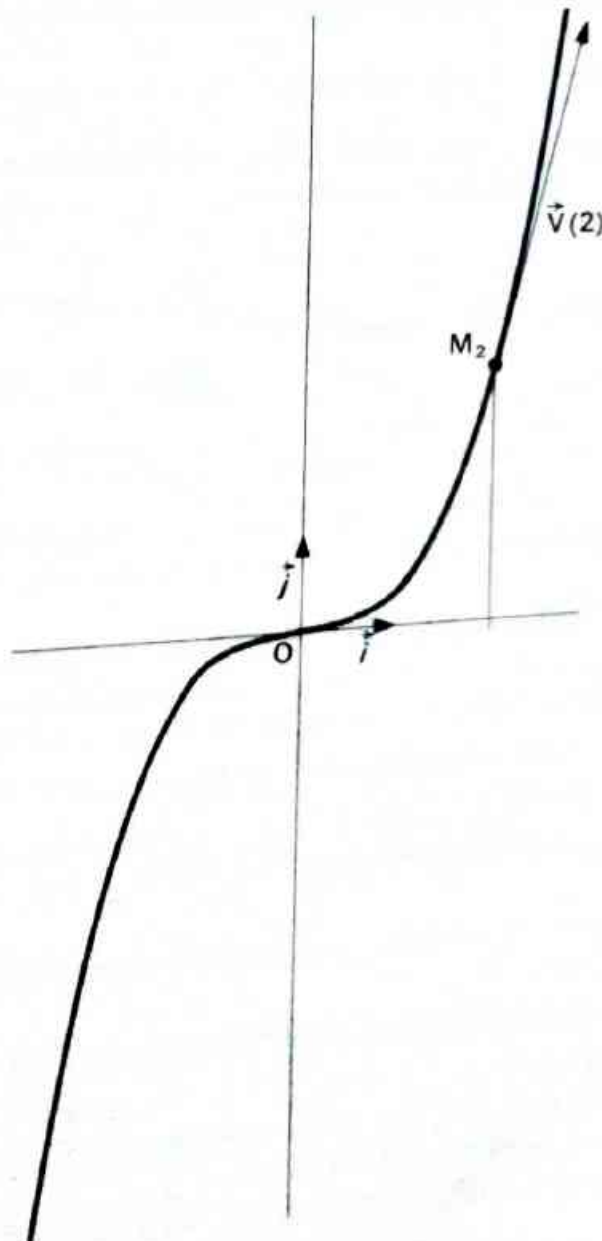
Exemples.

1. Supposons que E soit de dimension 2 et considérons un point matériel M en mouvement, dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $[0, 9]$ est donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^3}{3} \end{cases}$$

Soit t un instant quelconque de $[0, 9]$. Le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ de M à cet instant a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$; il n'est pas nul et c'est donc un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire de M au point M_t , position de M à l'instant t .

La vitesse arithmétique de M à cet instant est égale à $\sqrt{1 + t^4}$. Remarquons que la trajectoire de M est incluse dans la courbe d'équation : $y = \frac{x^3}{3}$.



2. Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension 3 et considérons un point matériel M en mouvement, dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$ est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2(t+1) \\ y = t+1 \\ z = -t-1. \end{cases}$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a alors : $\forall t \in I, \quad \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM_t} = (t+1) \vec{u}$

et : $\forall t \in I, \quad \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \vec{u}.$

Pour tout instant t de I , le vecteur-vitesse de M est un vecteur fixe non nul.

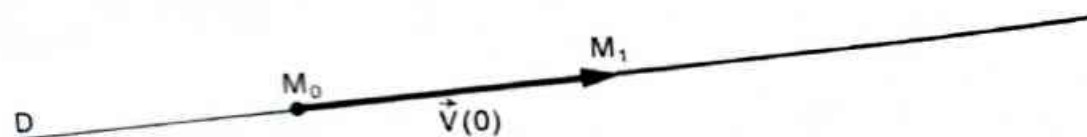
La vitesse arithmétique de M est constante sur I et égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$.

La trajectoire de M est incluse dans la droite D d'équations : $x = 2y = -2z$, c'est-à-dire la droite qui passe par O et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$.

La position initiale de M est le point M_0 de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; ce point appartient

à D ; d'autre part, tout point de la demi-droite d'origine M_0 et qui contient le point M_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est atteint par le point M à un instant de I . La trajectoire

de M est donc cette demi-droite. On retrouve qu'en tout point de la trajectoire rectiligne, la tangente existe et est confondue avec la trajectoire.



Vecteur-accélération.

2.3 DÉFINITION : Soit M un point matériel dont le mouvement, pendant un intervalle de temps I , est représenté par la fonction vectorielle $\vec{r}$. Soit t un instant quelconque de I .

On appelle vecteur-accélération de M à l'instant t , et on note $\vec{\Gamma}(t)$, le vecteur $\vec{r}''(t)$.

On a aussi : $\forall t \in I, \quad \vec{\Gamma}(t) = \vec{v}'(t).$ (1)

Soit S un point de $\mathcal{E}$. On appelle **hodographe du mouvement relatif à S** l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ défini par : $\{m \in \mathcal{E} \mid \exists t \in I, \overrightarrow{Sm} = \vec{v}(t)\}$.

On exprime souvent l'égalité (1) par : "le vecteur-accélération à l'instant t est le vecteur-vitesse au même instant sur l'hodographe".

Dans la pratique, on considère l'hodographe par rapport à l'origine O du repère.

Exemples.

Reprenons les exemples 1 et 2 du paragraphe 2.2.

1. A l'instant t , le vecteur-accélération de M a pour composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}$; on a donc :

$$\forall t \in I, \quad \vec{\Gamma}(t) = 2t\vec{j}.$$

L'hodographe relatif à O est l'ensemble des points de E , de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles qu'il existe un réel t de I pour lequel on a :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t^2. \end{cases}$$

L'hodographe est donc inclus dans la droite d'équation : $x = 1$.

2. A l'instant t , le vecteur-accélération est nul. L'hodographe relatif à O est l'ensemble des points m de E tels que l'on ait : $\vec{Om} = \vec{u}$; l'hodographe est donc un singleton.

Remarque : Cherchons la dérivée, si elle existe, de la fonction numérique

$$g : t \mapsto \|\vec{V}(t)\|. \quad \text{On a : } \forall t \in I, \quad \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{\vec{V}(t) \cdot \vec{V}(t)}.$$

Des paragraphes 2.3 et 2.4 du chapitre 7 et de la propriété P_4 du paragraphe 1.11 de ce chapitre, il résulte que, pour tout réel t de I tel que $\|\vec{V}(t)\|$ soit non nul, la fonction g est dérivable et que l'on a :

$$g'(t) = 2(\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)) \frac{1}{2\|\vec{V}(t)\|} = \frac{\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)}{\|\vec{V}(t)\|}.$$

Allure d'un mouvement.

2.4 DÉFINITION : Soit M un point matériel en mouvement pendant un intervalle de temps I . Désignons par g la fonction numérique $t \mapsto \|\vec{V}(t)\|$.

• M a un mouvement uniforme sur I si et seulement si la fonction g est constante sur I .

• M a un mouvement accéléré sur I si et seulement si la fonction g est strictement croissante sur I .

• M a un mouvement retardé sur I si et seulement si la fonction g est strictement décroissante sur I .

De la remarque du paragraphe 2.3, il résulte que le sens de variation de la fonction :

$t \mapsto \|\vec{V}(t)\|$ est donné par le signe de $\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$. D'où le résultat :

• M a un mouvement uniforme sur I si et seulement si on a :

$$\forall t \in I, \quad \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = 0.$$

• M a un mouvement accéléré sur I si et seulement si on a :

$$\forall t \in I, \quad \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) > 0.$$

• M a un mouvement retardé sur I si et seulement si on a :

$$\forall t \in I, \quad \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) < 0.$$

Exemples.

Reprenons les exemples 1 et 2 des paragraphes 2.2 et 2.3.

1. A un instant t quelconque de I , le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de M ont pour coordonnées respectives :

$$\vec{V}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \vec{\Gamma}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

On a donc : $\forall t \in]0, 9], \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = 2t^3 > 0$.

M a donc un mouvement accéléré sur I .

2. A un instant t quelconque de I , le vecteur-accélération de M est nul. On a :

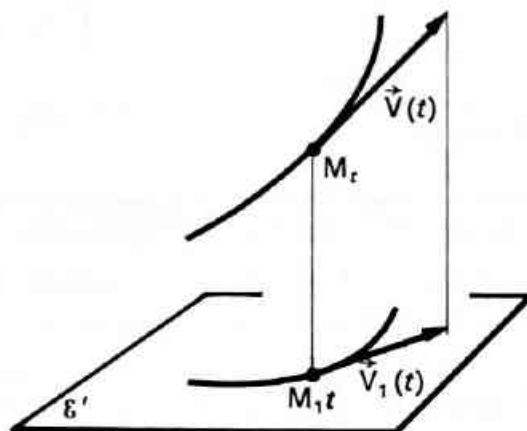
$$\forall t \in I, \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = 0.$$

M a donc un mouvement uniforme sur I .

Mouvements projetés.

2.5 Soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction un sous-espace vectoriel E' de E ; soient p la projection orthogonale sur $\mathcal{E}'$ et π la projection vectorielle associée à p . Nous supposons ici que l'on a choisi pour origine O du repère de $\mathcal{E}$ un point de $\mathcal{E}'$. Soit M un point matériel en mouvement pendant un intervalle de temps I .

- On appelle **mouvement projeté de M sur $\mathcal{E}'$** , le mouvement d'un point matériel M_1 dont la position $M_{1,t}$ à tout instant t de I est la projection sur $\mathcal{E}'$ de la position M_t de M à cet instant.



Si le mouvement de M est représenté par une fonction vectorielle $\vec{f}$ définie sur I et à valeurs dans E , celui de M_1 est représenté par la fonction vectorielle $\vec{g} = \pi \circ \vec{f}$

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow E \longrightarrow E' \\ t &\longmapsto \vec{f}(t) \longmapsto \pi(\vec{f}(t)). \end{aligned}$$

- Pour tout instant t de I , soient $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M à l'instant t et soient $\vec{V}_1(t)$ et $\vec{\Gamma}_1(t)$ ceux de M_1 au même instant. Par définition on a :

$$\begin{cases} \vec{V}(t) = \vec{f}'(t) \\ \vec{\Gamma}(t) = \vec{f}''(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{V}_1(t) = \vec{g}'(t) \\ \vec{\Gamma}_1(t) = \vec{g}''(t). \end{cases}$$

Cherchons à exprimer $\vec{V}_1(t)$ (resp. $\vec{\Gamma}_1(t)$) en fonction de $\vec{V}(t)$ (resp. $\vec{\Gamma}(t)$).

Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension 2 et notons $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de l'application linéaire π dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et f_1 et f_2 (resp. g_1 et g_2) les fonctions composantes de $\vec{f}$ (resp. $\vec{g}$) dans cette base. On a :

$$(\pi \circ \vec{f} = \vec{g}) \iff (\forall t \in I, \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af_1(t) + cf_2(t) \\ bf_1(t) + df_2(t) \end{pmatrix})$$

et par suite :

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af'_1(t) + cf'_2(t) \\ bf'_1(t) + df'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ f'_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} g''_1(t) \\ g''_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af''_1(t) + cf''_2(t) \\ bf''_1(t) + df''_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_1(t) \\ f''_2(t) \end{pmatrix}$$

On a donc : $\vec{g}' = \pi \circ \vec{f}'$ et $\vec{g}'' = \pi \circ \vec{f}''$

et par suite : $\boxed{\forall t \in I, \vec{V}_1(t) = \pi(\vec{V}(t)) \text{ et } \vec{\Gamma}_1(t) = \pi(\vec{\Gamma}(t))}$

Remarques : 1. La démonstration est analogue lorsqu'on a : $\dim \mathcal{E} = 3$.

2. Le fait que l'application linéaire π soit une projection vectorielle n'intervient pas dans la démonstration précédente. On a donc, pour toute application linéaire φ de E dans E et pour toute fonction vectorielle $\vec{f}$ de I dans E , deux fois dérivable sur I :

$$(\varphi \circ \vec{f})' = \varphi \circ \vec{f}' \text{ et } (\varphi \circ \vec{f})'' = \varphi \circ \vec{f}''.$$

Exemple.

Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension 2 et considérons un point matériel M en mouvement, dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $[0, 2\pi]$, est donnée

$$\text{par : } \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Le point matériel M a un mouvement circulaire; le mouvement projeté de M sur l'axe des x est le mouvement d'un point matériel M_1 dont la position, à tout instant t de $[0, 2\pi]$ est donnée par : $x = R \cos t$.

M_1 a un mouvement rectiligne et sa trajectoire est le segment limité par les points d'abscisses respectives $-R$ et R .

$$\text{On a : } \forall t \in I, \vec{V}_1(t) = -R \sin t \vec{i} \text{ et } \vec{\Gamma}_1(t) = -R \cos t \vec{i}.$$

Mouvement donné par une loi horaire.

- 2.6 • Dans certains problèmes, la trajectoire d'un point matériel en mouvement pendant un intervalle de temps I est imposée : cette trajectoire est incluse dans un ensemble C de points, souvent défini à l'aide d'une fonction vectorielle $\vec{F}$ à valeurs dans E : le point P de C de paramètre le réel h est le point de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait : $\vec{OP} = \vec{F}(h)$. Le mouvement est alors parfaitement déterminé par la donnée d'une application φ de I dans $\mathbb{R}$ qui, à tout instant t de I , associe une valeur du paramètre h . L'application φ est appelée la **loi horaire du mouvement** et, par abus de langage, l'égalité : $h = \varphi(t)$ est appelée l'**équation horaire du mouvement**.

• Soit t un instant quelconque de I . La position M_t de M à l'instant t est donnée par l'application $\vec{r} = \vec{F} \circ \varphi$ de I dans E et on a : $\boxed{\overrightarrow{OM_t} = \vec{F}(\varphi(t))}$

L'application $\vec{r}$ doit être deux fois dérivable sur I ; il suffit pour cela que φ soit deux fois dérivable sur I et $\vec{F}$ deux fois dérivable sur $\varphi(I)$. Nous supposons toujours qu'il en est ainsi.

Des propriétés P_2 et P_3 du paragraphe 1.11, il résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad \vec{r}'(t) &= \varphi'(t) \vec{F}'(\varphi(t)) \\ \forall t \in I, \quad \vec{r}''(t) &= \varphi''(t) \vec{F}'(\varphi(t)) + \varphi'^2(t) \vec{F}''(\varphi(t)). \end{aligned}$$

• Soit maintenant P un point quelconque de C , de paramètre h . Si le vecteur $\vec{F}'(h)$ n'est pas nul, l'ensemble C admet au point P une tangente qui est la droite passant par P et de vecteur directeur $\vec{F}'(h)$. Nous supposons toujours que, pour toute valeur de h , le vecteur $\vec{F}'(h)$ n'est pas nul.

Posons alors : $\boxed{\vec{\tau} = \frac{\vec{F}'(h)}{\|\vec{F}'(h)\|}}$

Le vecteur $\vec{\tau}$ est l'un des vecteurs directeurs unitaires de la tangente à C en P .

Orientons cette tangente par le vecteur $\vec{\tau}$. Nous disons que **la tangente est orientée dans le sens des h croissants**.

Soient t un instant quelconque de I et h le réel égal à $\varphi(t)$. La position M_t de M à l'instant t est donc le point P de C de paramètre h . On a alors :

$$\vec{V}(t) = \varphi'(t) \vec{F}'(\varphi(t)) = \varphi'(t) \vec{F}'(h) = \varphi'(t) \|\vec{F}'(h)\| \vec{\tau} = \varphi'(t) \|\vec{F}'(\varphi(t))\| \vec{\tau}.$$

Le réel $v(t) = \varphi'(t) \|\vec{F}'(\varphi(t))\|$ est la **vitesse algébrique de M à l'instant t** .

Nous avons alors l'égalité : $\boxed{\vec{V}(t) = v(t) \vec{\tau}}$

Nous remarquons que la valeur absolue de la vitesse algébrique de M à l'instant t est égale à $\|\vec{V}(t)\|$ c'est-à-dire à la vitesse arithmétique de M au même instant.

Si $v(t)$ est positif (resp. négatif), le point M se déplace, à l'instant t , dans le sens des h croissants (resp. décroissants).

Nous verrons des exemples de mouvements donnés par une loi horaire dans les paragraphes suivants.

Mouvements rectilignes.

Dans les paragraphes suivants (nos 2.7 à 2.11), nous considérons une droite D de $\mathcal{E}$, de direction $\vec{D}$. Nous supposons que l'on a choisi pour origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}$ un point O de D et pour vecteur $\vec{j}$ un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ de D .

Généralités.

- 2.7 Un point matériel M se déplace sur la droite D pendant un intervalle de temps I . Pour tout point P de D , il existe un réel h tel que l'on ait : $\overrightarrow{OP} = h\vec{u} = \vec{F}(h)$.

L'équation horaire : $h = \varphi(t)$ permet alors de déterminer, à tout instant t de I , la position M_t de M . Le vecteur $\vec{u}$ ne dépend pas de t et nous supposons que la fonction numérique φ est deux fois dérivable sur I . On a donc, pour tout instant t de I :

$\vec{OM}_t = \varphi(t) \vec{u}$	$\vec{r} = \vec{u}$
$\vec{V}(t) = \varphi'(t) \vec{u}$	$v(t) = \varphi'(t)$
$\vec{\Gamma}(t) = \varphi''(t) \vec{u}$	$\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = \varphi'(t) \varphi''(t)$

Nous notons, pour tout instant t de I , par $x(t)$ le réel $\varphi(t)$ et par $\gamma(t)$ le réel $\varphi''(t)$. Si I est un intervalle de temps $[t_0, t_1]$, on appelle **vitesse moyenne entre t_0 et t_1** , le réel $\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$.

Nous allons étudier, dans les paragraphes suivants, trois cas particuliers de mouvements rectilignes.

Mouvements rectilignes uniformes.

2.8 Soit I un intervalle de temps.

Cherchons les équations horaires qui correspondent à un mouvement uniforme sur I . Des paragraphes 2.4 et 2.7, il résulte qu'il suffit de chercher les applications φ de I dans $\mathbb{R}$, non constantes sur I , deux fois dérivables sur I et telles que la fonction $t \mapsto |\varphi'(t)|$ soit constante sur I .

• Soit φ une telle application, s'il en existe.

La fonction φ n'est pas constante sur I . Des équivalences :

$$(\forall t \in I, |\varphi'(t)| = 0) \iff (\forall t \in I, \varphi'(t) = 0) \iff (\exists k \in \mathbb{R}, (\forall t \in I, \varphi(t) = k)),$$

il résulte que la valeur constante de $|\varphi'(t)|$ n'est pas nulle.

Soit donc α le réel strictement positif tel que l'on ait : $\forall t \in I, |\varphi'(t)| = \alpha$.

On a alors : $\forall t \in I, (\varphi'(t) = \alpha \text{ ou } \varphi'(t) = -\alpha)$, ce qui équivaut à : $\varphi'(I) \subset \{-\alpha, \alpha\}$.

Nous allons démontrer par l'absurde que l'on a, soit $\varphi'(I) = \{\alpha\}$, soit $\varphi'(I) = \{-\alpha\}$.

Pour cela, supposons qu'il existe deux réels t_1 et t_2 de I (avec $t_1 < t_2$) tels que l'on

ait, par exemple : $\varphi'(t_1) = -\alpha$ et $\varphi'(t_2) = \alpha$.

La fonction φ' est dérivable sur I et, par suite, continue sur I ; elle est donc, en particulier, continue sur $[t_1, t_2]$.

D'après le théorème 2.3 du chapitre 5, l'image $\varphi'([t_1, t_2])$ de $[t_1, t_2]$ par φ' est un

intervalle fermé borné. On aurait alors :

$$(-\alpha \in \varphi'([t_1, t_2]) \text{ et } \alpha \in \varphi'([t_1, t_2])) \implies ([-\alpha, \alpha] \subset \varphi'([t_1, t_2]) \subset \varphi'(I))$$

et par suite : $[-\alpha, \alpha] \subset \{-\alpha, \alpha\}$, ce qui est impossible.

Il existe donc un réel non nul a , égal soit à α , soit à $-\alpha$, tel que : $\forall t \in I, \varphi'(t) = a$.

et, par suite, il existe un réel b tel que : $\forall t \in I, \varphi(t) = at + b$.

• Soient maintenant (a, b) un élément de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et φ l'application définie par :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto at + b$$

Le réel a n'est pas nul; l'application φ n'est donc pas constante sur I . D'autre part,

φ est deux fois dérivable sur I et on a : $\forall t \in I, |\varphi'(t)| = |a|$.

La fonction φ est donc solution du problème posé. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant.

Le mouvement rectiligne d'un point matériel M est uniforme sur un intervalle de temps I si et seulement s'il existe un élément (a, b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que la loi horaire du mouvement sur I soit la fonction $t \mapsto at + b$.

Mouvements rectilignes uniformément variés.

2.9 • Soit (a, b, c) un élément de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Étudions le mouvement rectiligne dont la loi horaire sur un intervalle de temps I est donnée par la fonction :

$$\varphi: t \mapsto at^2 + bt + c.$$

Appliquons les résultats du paragraphe 2.7 à ce cas particulier.

Nous obtenons :

$\overrightarrow{OM}_t = (at^2 + bt + c)\vec{u}$	$\vec{\tau} = \vec{u}$
$\vec{V}(t) = (2at + b)\vec{u}$	$v(t) = 2at + b$
$\vec{\Gamma}(t) = 2a\vec{u}$	$\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = 4a^2t + 2ab$

• Soit t un instant quelconque de I.

On a :

$$\left(\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = 0 \right) \iff \left(t = -\frac{b}{2a} \right) \quad \text{et} \quad \left(\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) > 0 \right) \iff \left(t > -\frac{b}{2a} \right).$$

Sur $I \cap]-\infty, -\frac{b}{2a}[$, le mouvement de M est retardé et sur $I \cap]-\frac{b}{2a}, +\infty[$, il est accéléré.

Si le réel $-\frac{b}{2a}$ appartient à I, à l'instant $t = -\frac{b}{2a}$, la vitesse algébrique de M s'annule en changeant de signe. Le point matériel M change donc de sens de parcours à cet instant.

• Remarquons enfin que le vecteur-accélération de M est constant sur I.

On dit que M a un **mouvement uniformément varié** sur I : **uniformément retardé** sur $I \cap]-\infty, -\frac{b}{2a}[$ et **uniformément accéléré** sur $I \cap]-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

Exemple.

Étudions le cas où I est l'intervalle de temps $[0, 3]$ et où φ est donnée par :

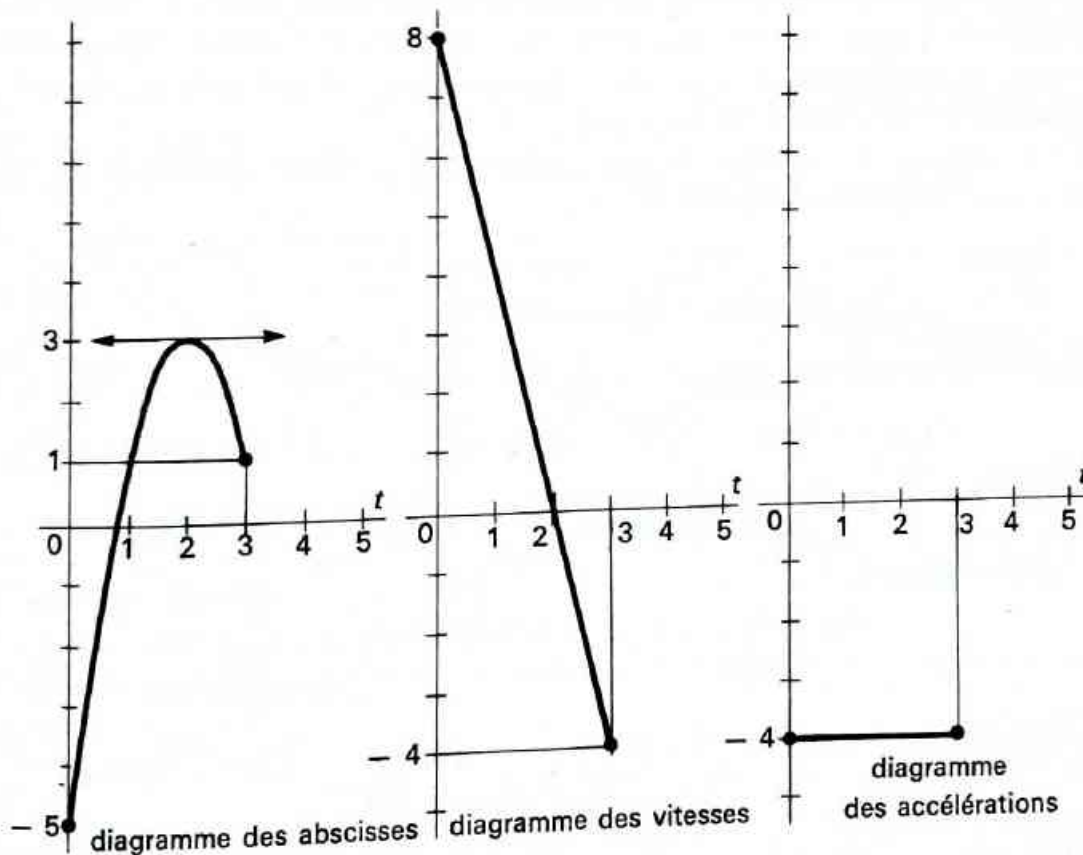
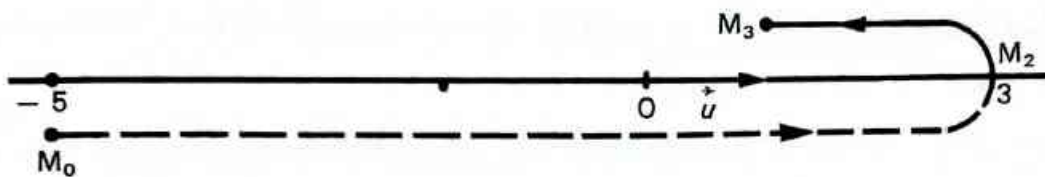
$$t \mapsto -2t^2 + 8t - 5.$$

La position initiale de M est le point M_0 d'abscisse -5 dans le repère $(O, \vec{u})$ de D et la vitesse algébrique initiale de M est $v(0) = 8$. Le point M se déplace donc initialement dans le sens positif.

La vitesse algébrique s'annule à l'instant $t = \frac{-8}{-4} = 2$; le point M coïncide alors avec le point M_2 d'abscisse : $-2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - 5 = 3$. A cet instant, M change de sens de parcours. Il se déplace donc dans le sens négatif jusqu'à sa position finale qui est le point M_3 d'abscisse : $-2 \cdot 9 + 8 \cdot 3 - 5 = 1$; sa vitesse algébrique finale est égale à $-4 \cdot 3 + 8 = -4$.

Le vecteur-accélération de M est constant sur $[0, 3]$, égal à $-4\vec{u}$; le mouvement de M est uniformément retardé sur $[0, 2]$ et uniformément accéléré sur $[2, 3]$. Nous illustrons ces résultats par le tableau, le schéma et les diagrammes suivants :

t	0	2	3
$x(t)$	-5	3	1
$v(t)$	8	0	-4
allure du mouvement	uniformément retardé		uniformément accéléré



Mouvements vibratoires simples.

Mouvements rectilignes dont la loi horaire est $t \mapsto A \cos \omega t$.

- 2.10 • Soient A et ω deux réels strictement positifs. Étudions le mouvement rectiligne dont la loi horaire, pendant un intervalle de temps I , est donnée par la fonction :
- $\varphi : t \mapsto A \cos \omega t$.
- Appliquons les résultats du paragraphe 2.7 à ce cas particulier.

Nous obtenons :

$\vec{OM}_t = (A \cos \omega t) \vec{u}$	$\vec{\dot{r}} = \vec{u}$
$\vec{V}(t) = (-A \omega \sin \omega t) \vec{u}$	$v(t) = -A \omega \sin \omega t$
$\vec{\Gamma}(t) = (-A \omega^2 \cos \omega t) \vec{u}$	$\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = \frac{A^2}{2} \omega^3 \sin 2 \omega t$

- Les fonctions $t \mapsto \cos \omega t$ et $t \mapsto \sin \omega t$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pour tout instant t de I , tel que le réel $t + \frac{2\pi}{\omega}$ appartienne à I , on a : $M_t = M_{t+\frac{2\pi}{\omega}}$ $\vec{V}(t) = \vec{V}(t + \frac{2\pi}{\omega})$ $\vec{\Gamma}(t) = \vec{\Gamma}(t + \frac{2\pi}{\omega})$.

Aux instants t et $t + \frac{2\pi}{\omega}$ le point M a la même position, le même vecteur-vitesse et le même vecteur-accelération.

On dit que le mouvement de M est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

De l'étude du mouvement sur un intervalle de temps de durée T , on déduit aisément l'étude du mouvement sur tout intervalle de temps I . Quitte à changer l'origine des temps, nous supposons que l'instant initial est l'instant zéro et nous étudions le mouvement sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

- Le tableau, le schéma et les diagrammes suivants décrivent le mouvement pendant l'intervalle de temps $[0, T]$.

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x(t) = A \cos \omega t$	A	0	-A	0	A
$v(t) = -A \omega \sin \omega t$	0	-A ω	0	A ω	0
$\gamma(t) = -A \omega^2 \cos \omega t$	-A ω^2	0	A ω^2	0	-A ω^2
$\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = \frac{A^2}{2} \omega \sin 2 \omega t$	0	+	0	-	0
allure du mouvement		accéléré	retardé	accéléré	retardé

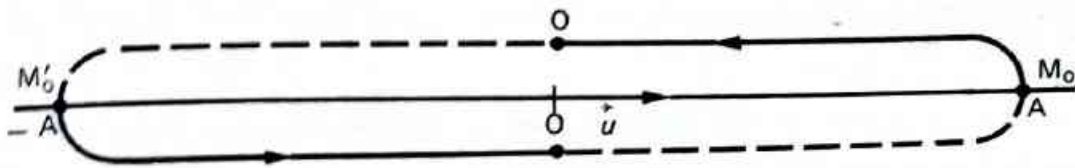
A l'instant 0, le point matériel M a pour position le point M_0 d'abscisse A et sa vitesse algébrique est nulle.

Entre les instants 0 et $\frac{T}{4}$, il se déplace de M_0 à O d'un mouvement accéléré.

Entre les instants $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$, il se déplace de O au point M'_0 d'abscisse $-A$, d'un mouvement retardé; sa vitesse algébrique s'annule à l'instant $\frac{T}{2}$.

Entre les instants $\frac{T}{2}$ et $\frac{3T}{4}$, il se déplace de M'_0 à O d'un mouvement accéléré.

Entre les instants $\frac{3T}{4}$ et T, il se déplace de O à M_0 d'un mouvement retardé.



Le point O s'appelle le **centre du mouvement**, le réel strictement positif A l'**amplitude** et le réel strictement positif ω la **pulsation**.

On dit que M a un **mouvement vibratoire simple**.

• Soit t un instant quelconque de I.

Des égalités : $\overrightarrow{OM}_t = (A \cos \omega t) \vec{u}$ et $\vec{\Gamma}(t) = (-A\omega^2 \cos \omega t) \vec{u}$,

il résulte que l'on a : $\boxed{\vec{\Gamma}(t) = -\omega^2 \overrightarrow{OM}_t}$

Des égalités : $\cos \omega t = \frac{x(t)}{A}$ et $\sin \omega t = -\frac{v(t)}{A\omega}$, il résulte que l'on a :

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = \frac{x(t)^2}{A^2} + \frac{v(t)^2}{A^2 \omega^2} = 1, \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$x(t)^2 \omega^2 + v(t)^2 = A^2 \omega^2.$$

Remarque : La donnée de la droite, des réels A et ω et du centre du mouvement déterminent parfaitement ce dernier.

Exemple.

Étudions le cas où I est l'intervalle de temps $[1, 4]$ et où φ est définie par :

$$t \longmapsto 4 \cos \frac{\pi}{2} t.$$

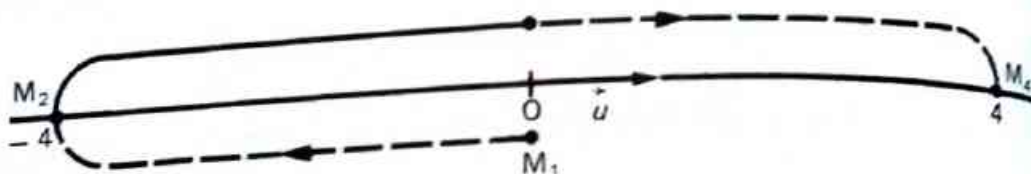
L'amplitude du mouvement est 4 et sa pulsation $\frac{\pi}{2}$; la période est donc :

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

$$\text{On a : } \forall t \in I, x(t) = 4 \cos \frac{\pi}{2} t \text{ et } v(t) = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} t$$

A l'instant initial, le point matériel M a pour position le point M_1 d'abscisse 0, c'est-à-dire l'origine O, et sa vitesse algébrique est $v(0) = -2\pi$.

Entre les instants 1 et 2, le point matériel M se déplace de M_1 au point M_2 d'abscisse -4 d'un mouvement retardé; à l'instant 2, sa vitesse algébrique est nulle.
Entre les instants 2 et 3, il se déplace de M_2 à M_1 d'un mouvement accéléré.
Entre les instants 3 et 4, il se déplace de M_1 au point M_4 d'abscisse 4, où il arrive avec une vitesse algébrique nulle.



Mouvements dont la loi horaire est $t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$.

- 2.11 Soient a, b, c, ω des réels tels que l'on ait : $|a| + |b| \neq 0$ et $\omega > 0$. Étudions le mouvement rectiligne dont la loi horaire, pendant un intervalle de temps I , est donné par la fonction $\varphi : t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$.

En classe de Première, nous avons vu qu'il existe au moins un élément (A, α) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que l'on ait : $a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t - \alpha)$: le réel A est égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$ et α est l'un des réels définis par :

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pour tout instant t de I , la position M_t de M est le point dont l'abscisse dans le repère $(O, \vec{u})$ de la droite D est : $x(t) = A \cos(\omega t - \alpha) + c$.

Soit C le point de D d'abscisse c dans le repère $(O, \vec{u})$; l'abscisse $x_1(t)$ du point M_t dans le repère $(C, \vec{u})$, satisfait à :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \overline{CM_t} = \overline{OM_t} - \overline{OC} = A \cos(\omega t - \alpha) + c - c \\ &= A \cos(\omega t - \alpha) = A \cos \omega \left(t - \frac{\alpha}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Posons $t_1 = t - \frac{\alpha}{\omega}$, c'est-à-dire prenons comme nouvelle origine des temps

l'instant $\frac{\alpha}{\omega}$. Pour tout instant t_1 de I , la position M_{t_1} de M est le point d'abscisse

$x_1(t_1) = A \cos \omega t_1$, dans le repère $(C, \vec{u})$. Il résulte du paragraphe 2.10 que le point matériel M a un mouvement vibratoire simple, de centre le point C , d'amplitude A et de pulsation ω .

Nous énonçons le résultat :

Soient a, b, c, ω des réels tels que : $|a| + |b| \neq 0$ et $\omega > 0$

Tout mouvement rectiligne dont la loi horaire est la fonction

$$\varphi : t \mapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$$

est un mouvement vibratoire simple de centre le point C tel que : $\overline{OC} = c \vec{u}$, d'amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$ et de pulsation ω .

Exemples.

1. Étudions le cas où I est l'intervalle de temps $[0, +\infty[$ et où φ est définie par :

$$t \longmapsto \cos \frac{\pi}{4} t + \sin \frac{\pi}{4} t + 1.$$

Le mouvement est donc un mouvement vibratoire simple d'amplitude $\sqrt{2}$, de pulsation : $\omega = \frac{\pi}{4}$ et de centre le point C tel que : $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$; la période T du mouvement est : $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ et on a : $\forall t \in I, \varphi(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

Prenons comme nouveau repère, le repère $(C, \vec{u})$. A tout instant t de I , l'abscisse $x_1(t)$, dans ce repère, de la position M_t de M est : $x_1(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

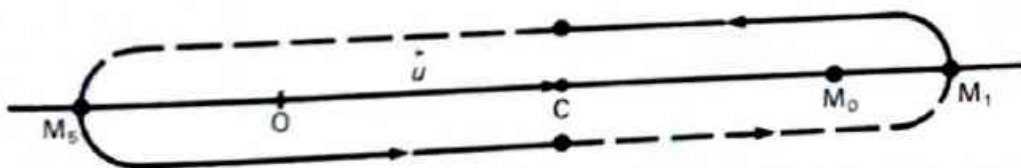
Étudions le mouvement sur l'intervalle de temps $[0, 8]$, de durée une période. La position initiale du point matériel M est le point M_0 d'abscisse $x_1(0) = 1$ et sa vitesse algébrique initiale est : $v(0) = -\sqrt{2} \frac{\pi}{4} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$; on a aussi :

$$\gamma(0) = -\omega^2 x_1(0) = -\frac{\pi^2}{16}$$

Le produit $v(0) \cdot \gamma(0)$ est négatif; le mouvement est donc retardé à cet instant; le réel $v(0)$ est positif; le mouvement a donc lieu dans le sens positif, à cet instant.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall t \in [0, 8], \quad & \left((v(t) = 0) \iff \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \right) \right. \\ & \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4}(t-1) = k\pi \right) \\ & \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, t = 1 + 4k \right). \end{aligned}$$

La vitesse algébrique s'annule sur $[0, 8]$ aux instants 1 et 5; à ces instants, M a pour position les points d'abscisses respectives $x_1(1) = \sqrt{2}$ et $x_1(5) = -\sqrt{2}$. Le mouvement de M est décrit par le schéma suivant :



2. Déterminons la loi horaire du mouvement vibratoire simple d'un point matériel M , pendant l'intervalle de temps $[0, +\infty[$. On donne la pulsation ω , l'abscisse x_0 du point M_0 , position initiale de M et la vitesse algébrique initiale v_0 ; on suppose que le centre du mouvement est le point O .

La loi horaire cherchée est donc une fonction $\varphi : t \longmapsto a \cos \omega t + b \sin \omega t$ où a et b sont deux réels, non tous les deux nuls, qu'il faut déterminer.

On a : $x_0 = \varphi(0) = a$ et $v_0 = \varphi'(0) = b\omega$.

On a donc : $a = x_0$ et $b = \frac{v_0}{\omega}$.

La loi horaire cherchée ne peut être que $t \longmapsto x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$.

On vérifie aisément qu'elle répond bien à la question.

Mouvements circulaires.

Dans les paragraphes suivants (nos 2.12, 2.13), nous supposons que $\mathcal{E}$ est de dimension 2 et nous considérons un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R ; nous choisissons pour origine O du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}$ le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Généralités.

2.12 • Un point matériel M se déplace sur le cercle $\mathcal{C}$ pendant un intervalle de temps I .

Pour tout point P de $\mathcal{C}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, il existe au moins un réel α tel que :

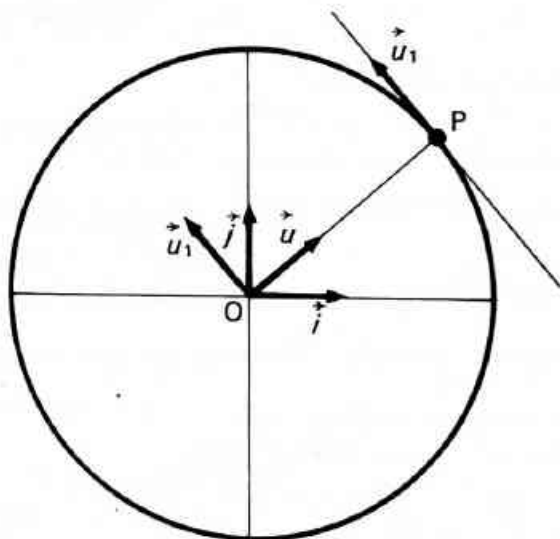
$$\begin{cases} x = R \cos \alpha \\ y = R \sin \alpha \end{cases}; \text{ le réel } \alpha \text{ est l'angle polaire de } P, \text{ de pôle } O \text{ (cf. paragraphe 1.14).}$$

• Si $\vec{F}$ est la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans E qui donne la représentation paramétrique de $\mathcal{C}$, on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{F}(\alpha) = R((\cos \alpha)\vec{i} + (\sin \alpha)\vec{j})$

et par suite : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{F}'(\alpha) = R(-\sin \alpha)\vec{i} + (\cos \alpha)\vec{j}$.

Posons : $\vec{u} = \frac{\vec{F}(\alpha)}{\|\vec{F}(\alpha)\|}$ et $\vec{u}_1 = \frac{\vec{F}'(\alpha)}{\|\vec{F}'(\alpha)\|}$.

On a : $\|\vec{F}(\alpha)\| = R = \|\vec{F}'(\alpha)\|$; d'autre part, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_1$ sont unitaires et leurs composantes respectives sont : $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$



La famille $(\vec{u}, \vec{u}_1)$ est donc une base orthonormée directe de E ; le vecteur $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de la tangente au cercle au point P ; nous orienterons toujours cette tangente par ce vecteur, c'est-à-dire, dans le sens des α croissants.

Enfin, on a : $\frac{\vec{F}''(\alpha)}{\|\vec{F}''(\alpha)\|} = \frac{-R((\cos \alpha)\vec{i} + (\sin \alpha)\vec{j})}{R} = -\vec{u}$.

• L'équation horaire, couramment désignée par : $\alpha = \theta(t)$ permet de déterminer, à tout instant t de I , la position M_t de M . Nous supposons que la fonction numérique θ est deux fois dérivable sur I .

Si t est un instant quelconque de I et si α est le réel $\theta(t)$, on a :

$$\begin{aligned}\vec{OM}_t &= \vec{F}(\theta(t)) = \vec{F}(\alpha) = R\vec{u} \\ \vec{V}(t) &= \theta'(t) \vec{F}'(\theta(t)) = \theta'(t) \vec{F}'(\alpha) = R\theta'(t) \vec{u}_1 \\ \vec{\Gamma}(t) &= \theta''(t) \vec{F}(\theta(t)) + \theta'^2(t) \vec{F}''(\theta(t)) \\ &= \theta''(t) \vec{F}(\alpha) + \theta'^2(t) \vec{F}''(\alpha) \\ &= R\theta''(t) \vec{u}_1 - R\theta'^2(t) \vec{u}.\end{aligned}$$

Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant :

$\vec{OM}_t = R\vec{u}$	$\vec{\tau} = \vec{u}_1$
$\vec{V}(t) = R\theta'(t)\vec{u}_1$	$v(t) = R\theta'(t)$
$\vec{\Gamma}(t) = -R\theta'^2(t)\vec{u} + R\theta''(t)\vec{u}_1$	$\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) = R^2\theta'(t)\theta''(t)$

Le réel $\theta'(t)$ est la **vitesse angulaire** de M à l'instant t .

Le réel : $\gamma_T(t) = R\theta''(t)$ est l'**accélération tangentielle** de M à l'instant t .

Le réel : $\gamma_N(t) = R\theta'^2(t)$ est l'**accélération normale** de M à l'instant t .

On a donc : $\gamma_T(t) = R\theta''(t)$ et $\gamma_N(t) = R\theta'^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}$

Exemple.

Étudions le cas où I est l'intervalle de temps $[0, +\infty[$ et où θ est la fonction

$t \mapsto \frac{\pi}{4}t^2 - \frac{\pi}{2}t$. Si t est un instant quelconque de I , on a les égalités :

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{\pi}{4}t^2 - \frac{\pi}{2}t & v(t) &= R\frac{\pi}{2}(t-1) & \gamma_N(t) &= R\frac{\pi^2}{4}(t-1)^2 \\ \theta'(t) &= \frac{\pi}{2}(t-1) & \gamma_T(t) &= R\frac{\pi}{2} & \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t) &= R^2\frac{\pi^2}{2}(t-1).\end{aligned}$$

La position initiale de M est le point M_0 , d'angle polaire 0; la vitesse algébrique initiale de M est $v(0) = -R\frac{\pi}{2}$; le point M se déplace donc à l'instant initial dans

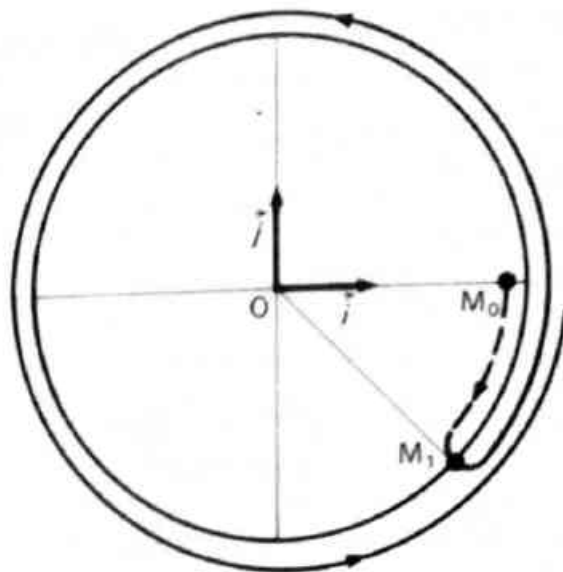
le sens négatif.

La vitesse algébrique s'annule à l'instant $t = 1$; le point matériel M coïncide alors avec le point M_1 , d'angle polaire $\theta(1) = -\frac{\pi}{4}$. A cet instant, M change de sens de

parcours.

$\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$ s'annule en changeant de signe pour $t = 1$; le mouvement de M est retardé sur $[0, 1]$ et accéléré sur $[1, +\infty[$. Nous illustrons ces résultats par le tableau, et le schéma suivants :

t	0	1	$+\infty$
$\theta(t)$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$+\infty$
$v(t)$	$-R\frac{\pi}{2}$	0	$+\infty$
allure du mouvement	retardé		accéléré



Mouvements circulaires uniformes.

2.13 Soit I un intervalle de temps. Cherchons les équations horaires qui correspondent à un mouvement circulaire uniforme sur I .

Des paragraphes 2.4 et 2.7, il résulte qu'il suffit de chercher les applications θ de I dans $\mathbb{R}$, non constantes sur I , deux fois dérivables sur I et telles que la fonction $t \mapsto |\theta'(t)|$ soit constante sur I .

Dans le paragraphe 2.8, nous avons montré que les seules fonctions qui satisfont à ces conditions sont les fonctions telles qu'il existe un élément (ω, ω_0) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que l'on ait : $\forall t \in I, \theta(t) = \omega t + \omega_0$. Nous énonçons :

Le mouvement circulaire d'un point matériel M est uniforme sur un intervalle de temps I si et seulement s'il existe un élément (ω, ω_0) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que la loi horaire du mouvement sur I soit la fonction $t \mapsto \omega t + \omega_0$.

On a alors pour tout instant t de I :

$\theta(t) = \omega t + \omega_0$	$\gamma_T(t) = 0$
$\theta'(t) = \omega$	$\gamma_N(t) = R\omega^2 = \frac{v(t)^2}{R}$
$v(t) = R\omega$	$\vec{\Gamma}(t) = -\omega^2 \overrightarrow{OM_t}$

Il résulte de la proposition : $\forall t \in I, \overrightarrow{OM_t} = R(\cos(\omega t + \omega_0)\vec{i} + \sin(\omega t + \omega_0)\vec{j})$, que le mouvement de M est périodique, de période $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Remarque : Le mouvement projeté de M sur Ox est un mouvement rectiligne dont la loi horaire est la fonction $t \mapsto R \cos(\omega t + \omega_0)$. Si l'on a : $\omega < 0$, on peut écrire : $\cos(\omega t + \omega_0) = \cos(-\omega t - \omega_0)$; on peut donc toujours supposer $\omega > 0$. Ce mouvement est donc un mouvement vibratoire simple, de pulsation ω , de centre O et d'amplitude R .

EXERCICES

Fonctions vectorielles d'une variable réelle.

1 Soient E un plan vectoriel réel euclidien et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E . Démontrer, en revenant à la définition, que la fonction vectorielle :

$$t \longmapsto |t-1|\vec{i} + |t^2-1|\vec{j} \text{ est continue en } 1.$$

2 Soient E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E . Démontrer, en revenant à la définition, que la fonction vectorielle :

$$t \longmapsto \frac{t}{t-1}(\vec{i} + \vec{j}) + t^2\vec{k} \text{ est continue en } 0.$$

3 Démonstration du théorème 1.5; les notations sont les mêmes que dans le cours. On désigne, de plus, par D l'ensemble de définition de $\vec{f}$ et par $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base orthonormée de E dont il est question dans le cours.

1° On suppose que les n fonctions numériques $f_1, \dots, f_n$ sont continues en t_0 .

a) Démontrer, en utilisant la définition des fonctions composantes et les propriétés de la norme euclidienne, la proposition suivante :

$$\forall t \in D, \quad \|\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)\| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(t) - f_i(t_0)|.$$

b) Démontrer que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel α strictement positif tel que l'on ait :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall t \in D, \quad (|t - t_0| < \alpha) \implies \left(|f_i(t) - f_i(t_0)| < \frac{\varepsilon}{n} \right).$$

c) En déduire que $\vec{f}$ est continue en t_0 .

2° On suppose que $\vec{f}$ est continue en t_0 .

a) Démontrer la proposition suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall t \in D, \quad |f_i(t) - f_i(t_0)| = |(\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)) \cdot \vec{e}_i|.$$

b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, la fonction numérique f_i est continue en t_0 .

4 Procéder comme dans l'exercice n° 3 pour démontrer le théorème 1.8.

◆ Dans les exercices suivants (nos 5 à 9), on désigne par E un plan vectoriel réel euclidien et par $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E . Toutes les composantes des vecteurs de E sont données dans cette base.

5 Démontrer, en revenant à la définition, que la fonction vectorielle :

$$t \longmapsto \frac{t}{|t|}(\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ a pour limite à gauche en } 0 \text{ le vecteur } 2\vec{j} - \vec{i}.$$

6 Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction vectorielle $\vec{f}$ qui, à tout réel t , associe l'image du vecteur $\vec{i} - 3\vec{j}$ par la rotation vectorielle de E d'angle t (2π).

7 Mêmes questions que pour le n° 6 dans le cas où $\vec{f}$ est la fonction vectorielle qui, à tout réel t , associe l'image du vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ par la projection vectorielle orthogonale de E sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

8 Mêmes questions que pour le n° 6 dans le cas où $\vec{f}$ est la fonction vectorielle qui, à tout réel t , associe l'image du vecteur $t\vec{i} + (t+1)\vec{j}$ par la symétrie vectorielle orthogonale de E par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{i}$.

9 Pour tout réel t , on désigne par $\vec{D}_t$ et $\vec{D}_t'$ les droites vectorielles engendrées respectivement par les vecteurs de composantes $\begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$.

1° Déterminer le sous-ensemble E_1 de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout réel t de E_1 , les droites $\vec{D}_t$ et $\vec{D}_t'$ soient distinctes.

2° Pour tout réel t de E_1 , on désigne par σ_t la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{D}_t$ de direction $\vec{D}_t'$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction vectorielle $t \mapsto \sigma_t(\vec{i})$.

◆ Dans les exercices suivants (nos 10 à 12), on désigne par $\mathcal{E}$ un plan affine réel euclidien orienté associé à un espace vectoriel E et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

10 L'ensemble $\mathcal{C}$ des points de $\mathcal{E}$, dont une représentation paramétrique, de paramètre t , est :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases}$$

admet-il une tangente en chacun de ses points ?

11 Même question que pour le n° 10 avec :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{t} \\ y = \frac{t}{t(t+1)} \end{cases}$$

* 12 1° Soit a un réel strictement positif. Même question que pour le n° 10 avec :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

2° Que peut-on dire, pour tout réel t , des points de paramètres respectifs t et $t + 2\pi$? En déduire qu'il suffit de déterminer la partie $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ qui correspond aux points dont le paramètre t appartient à $[0, 2\pi]$.

3° Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe Ox ; étudier le sens de variation sur $[0, 2\pi]$ de chacune des fonctions numériques :

$t \mapsto a(t - \sin t)$ et $t \mapsto a(1 - \cos t)$. En déduire l'allure de $\mathcal{C}_1$.

4° Soit t un réel différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); on désigne par I, J, Ω les points de $\mathcal{C}$, d'abscisse at et d'ordonnées respectives $0, 2a, a$. Démontrer que le point M de $\mathcal{C}$, de paramètre t , appartient au cercle de diamètre IJ , et que la tangente en M à $\mathcal{C}$ est la droite MJ . Trouver une détermination de la mesure de l'angle des vecteurs $\vec{\Omega M}$ et $\vec{\Omega I}$.

◆ Dans les exercices suivants (nos 13 à 19), on désigne par $\mathcal{E}$ un espace affine réel euclidien orienté de dimension 3 associé à un espace vectoriel E et par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

13 Soit la fonction vectorielle

$$\vec{f}: t \mapsto \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{2t}{t-1}\vec{j} + \left(\frac{t}{t-1}\right)^2\vec{k}.$$

1° Quel est l'ensemble de définition D de $\vec{f}$? Démontrer que $\vec{f}$ est dérivable sur D et déterminer $\vec{f}'$. Calculer $\vec{f}'(\frac{1}{2})$ et $\vec{f}(\frac{1}{2})$.

2° Soit C l'indicatrice de $\vec{f}$ par rapport à O .

a) Soit λ un réel; discuter le nombre de points d'intersection de C et du plan d'équation : $z = \lambda$.

b) Soient C_1 et C_2 les projections orthogonales respectives de C sur les plans d'équations respectives : $z = 0$ et $x = 0$.

Déterminer une équation cartésienne : $y = f_1(x)$ de C_1 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et une équation cartésienne : $z = f_2(y)$ de C_2 dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$. En déduire les natures respectives des courbes C_1 et C_2 . Soient A le point de C de paramètre $\frac{1}{2}$ et A_1 et A_2 ses projections orthogonales respectives sur les deux plans considérés. Que peut-on dire de la tangente à C_1 (resp. à C_2) au point A_1 (resp. A_2) ?

14 Démontrer que l'ensemble C des points de $\mathcal{E}$ dont une représentation paramétrique, de paramètre t , est :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t + \sin t \\ y = \cos t - \sin t \\ z = 2t \end{cases}$$

est une hélice circulaire droite dont on déterminera l'axe, le rayon et le pas.

15 Mêmes questions que pour le n° 14 avec :

$$\begin{cases} x = \cos t + \sqrt{3} \sin t \\ y = \sin t - \sqrt{3} \cos t \\ z = t. \end{cases}$$

16 Mêmes questions que pour le n° 14 avec :

$$\begin{cases} x = \sin t \cos t \\ y = \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ z = -t. \end{cases}$$

17 Soient D une droite de $\mathcal{E}$ et A un point de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à D . Déterminer les hélices circulaires droites, d'axe D , qui passent par A .

18 1° Soient A et B les points de coordonnées respectives :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les hélices circulaires droites d'axe Oz qui passent par A et par B .

2° Soient D une droite de $\mathcal{E}$ et A' et B' deux points distincts de $\mathcal{E}$, situés à une même distance non nulle de D .

Déterminer les hélices, s'il en existe, qui passent par A' et par B' . On discutera suivant les positions respectives de ces points.

* 19 Soient D une droite de $\mathcal{E}$ et A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts, situés à une même distance non nulle de D . Étudier l'existence et le nombre des hélices qui passent par A , par B et par C . On discutera suivant les positions respectives de ces points.

Cinématique.

◆ Dans les exercices suivants (nos 20 à 35), on désigne par $\mathcal{E}$ un plan affine réel euclidien orienté, associé à un espace vectoriel E et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère ortho-normé direct de $\mathcal{E}$.

20 Soit M un point matériel en mouvement, dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $I = [0, \pi]$, est le point de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \sin t \\ y = \frac{1}{2} \cos 2t. \end{cases}$$

1° Donner une équation cartésienne de la trajectoire de M et construire cette trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ et celles du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de M à tout instant t de I .

3° A l'aide du signe de la fonction $t \mapsto \vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$, étudier l'allure du mouvement de M sur I .

21 Mêmes questions que pour le n° 20 avec :

$$\begin{cases} x = 5 - 8 \sin^2 t \\ y = 1 + 2 \sin 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad I = [0, \pi].$$

22 Mêmes questions que pour le n° 20 avec :

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos^2 t \\ y = 4 \sin t \cos t \end{cases} \quad \text{et} \quad I = [0, \pi].$$

23 Mêmes questions que pour le n° 20 avec :

$$\begin{cases} x = 2(1 + \sin t) \\ y = 1 + \cos t \end{cases} \quad \text{et} \quad I = [0, 2\pi].$$

24 Mêmes questions que pour le n° 20 avec :

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -2 - \cos 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad I = [0, 2\pi].$$

25 Mêmes questions que pour le n° 20 avec :

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{t}{2} - \frac{2}{t} \\ y = \frac{t}{2} + \frac{2}{t} \end{cases} \quad \text{et} \quad I = [2, +\infty[.$$

26 1° Soit d un réel strictement positif. Mêmes questions que pour le n° 20 avec :

$$\begin{cases} x = \frac{d\sqrt{2}}{2} \sin t \\ y = \frac{d}{2}(1 + \cos t) \end{cases} \quad \text{et} \quad I = [0, 2\pi].$$

2° Déterminer l'hodographe du mouvement par rapport à O .

27 Soit M un point matériel en mouvement, dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$ est le point de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 3t - 1. \end{cases}$$

1° Donner une équation cartésienne de la trajectoire de M et construire cette trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° A quelles dates le mobile passe-t-il pour la première fois aux points M_1 et M_2 d'abscisses respectives $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}$?

Construire, pour chacun de ces deux points, le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération.

28 Soient p un réel strictement positif et M un point matériel en mouvement dont la position M_t , à tout instant t de $I = [0, +\infty[$ est le point de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$\begin{cases} x = p \frac{\cos t}{1 - \cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \end{cases}$$

1° Quelle est la trajectoire de M ?

2° Pour tout instant t de I , on désigne par N_t le point $M_{t+\pi}$. Démontrer que, pour tout instant t de I , les points O, M_t , N_t sont alignés. Quelle est la trajectoire, pendant l'intervalle de temps I , d'un point matériel dont la position, pour tout instant t de I , est le milieu de (M_t, N_t) ?

29 Un mobile se déplace dans le plan $\mathcal{E}$. Sa position M_t , à l'instant t , est définie par ses coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 1 + \sin t \end{cases}$$

1° Quelle est la trajectoire du mobile ?

2° A quelles dates le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération du mobile sont-ils orthogonaux ?

3° Soit O' le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{M_t O'}$?

4° Déterminer l'hodographe du mouvement relatif à O.

30 Soit M un point matériel en mouvement, dont la position, à tout instant t de l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$ est donnée par :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t^2 \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$$

1° Démontrer que la trajectoire de M admet une tangente en chacun de ses points.

2° Calculer les composantes du vecteur-accélération de M à tout instant t de I .

3° Indiquer l'allure du mouvement de M sur I .

4° Soit M_0 un point de $\mathcal{E}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un instant t de I pour lequel la position de M est le point M_0 ? On discutera suivant les réels x_0 et y_0 .

31 Soient R un réel strictement positif et M un mobile dont la position, à l'instant t , est donnée par ses coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

1° Que peut-on dire des vecteurs-vitesse et des vecteurs-accélération de M à deux dates t_1 et t_2 telles que : $t_2 - t_1 = 2\pi$?
Quelle simplification peut-on en déduire pour l'étude du mouvement de M et pour la construction de la trajectoire de M ? On ne demande de faire ni cette étude ni cette construction.

2° Soit M' un mobile dont la position M'_t à l'instant t est telle que le vecteur $\overrightarrow{OM'_t}$ soit égal au vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ du mobile M à l'instant t . Quelle est la trajectoire de M' ? Montrer que M' est animé d'un mouvement uniforme.

32 Soit a un nombre réel strictement positif.

Trois mobiles M , N , P se déplacent pendant un même intervalle de temps I ; pour tout instant t de I , leurs positions respectives M_t , N_t , P_t sont les points de $\mathcal{E}$ définis par :

- M_t a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$.
- N_t a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \cos 2t \\ -a \sin 2t \end{pmatrix}$.
- P_t est le barycentre des points M_t et N_t affectés des coefficients 2 et 1.

1° Déterminer les trajectoires respectives de M et de N .

2° A quelles dates, les mobiles M et N ont-ils la même position ? Où le mobile P se trouve-t-il alors ?

3° Pour tout instant t de I , soit $\vec{V}(t)$ le vecteur-vitesse de P .

Démontrer que ce vecteur est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{M_t N_t}$. Construire, pour un instant t donné, les points M_t , N_t , P_t et le vecteur $\vec{V}(t)$.

33 Soit M un point matériel en mouvement pendant l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$. On désigne, pour tout instant t de I , par M_t la position, par $\vec{V}(t)$ le vecteur-vitesse, par $\vec{\Gamma}(t)$ le vecteur-accélération de M à l'instant t . On suppose que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in I, \quad \vec{\Gamma}(t) = (-12 \cos 2t) \vec{i} - (8 \sin 2t) \vec{j} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}(0) = 4 \vec{j} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OM_0} = 8 \vec{i}. \end{array} \right. \quad (3)$$

1° Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \vec{V}(t) = (-6 \sin 2t) \vec{i} + (4 \cos 2t) \vec{j} + a \vec{i} + b \vec{j}.$$

Déterminer a et b à l'aide de (2).

2° Démontrer qu'il existe deux réels c et d tels que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{OM_t} = (3 \cos 2t) \vec{i} + (2 \sin 2t) \vec{j} + c \vec{i} + d \vec{j}.$$

Déterminer c et d à l'aide de (3).

3° Démontrer que le mouvement de M est périodique et que la trajectoire de M est incluse dans une courbe Γ dont l'équation est de la forme : $y^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ et dont on précisera la nature.

34 Soit C une ellipse de $\mathcal{E}$ dont la représentation paramétrique, de paramètre u , est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = \sin u. \end{cases}$$

Un point matériel M se déplace sur C pendant un intervalle de temps I avec la loi horaire $\varphi : t \mapsto (t+1)^2$. Déterminer :

- a) le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de M à tout instant t de I ;
- b) la vitesse algébrique $v(t)$ de M à tout instant t de I ;
- c) On suppose que l'on a $I = [0, +\infty[$; donner l'allure du mouvement de M sur I .

35 Mêmes questions que pour le n° 34 lorsque le point matériel M se déplace, pendant l'intervalle de temps I sur la courbe C de $\mathcal{E}$ d'équation $y = \sqrt{x}$ avec la loi horaire $\varphi : t \mapsto 2t + 1$.

◆ Dans les exercices suivants (n°s 36 à 44), on désigne par $\mathcal{E}$ un espace affine réel euclidien orienté de dimension 3, associé à un espace vectoriel E et par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

36 1° Déterminer la trajectoire C d'un point matériel M en mouvement dont la position, à tout instant t de $I = [0, +\infty[$ est le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x = 1 + \sin 2t \\ y = \sin t \\ z = \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

2° Soit B la position de M à l'instant $\frac{\pi}{3}$. Déterminer les équations de la tangente en B à la trajectoire C .

3° Pour tout instant t de $[0, 2\pi]$, déterminer le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de M . Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ du produit scalaire $\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$; en déduire l'allure du mouvement de M sur $[0, 2\pi]$, puis sur $[0, +\infty[$.

37 Le mouvement d'un point matériel M pendant un intervalle de temps I est donné par :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{4} - \sin t \\ y = \sqrt{2} \cos t \\ z = \frac{\sqrt{2}}{4} + \sin t. \end{cases}$$

1° Montrer que la trajectoire C de M est incluse dans un plan P de $\mathcal{E}$ et qu'elle est tracée sur une sphère S de centre O . Donner les équations de P et de S . Quelle est la nature de C ?

2° Déterminer, à tout instant t de I , le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$ et le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de M . En déduire l'allure du mouvement de M sur l'intervalle I .

38 Le mouvement d'un point matériel M , pendant un intervalle de temps I , est donné par :

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos t \\ y = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos t \\ z = 4 + 3 \sin t. \end{cases}$$

1° Montrer que la trajectoire de M est incluse dans le plan P d'équation : $x + y = 8$. Calculer la distance de la position M_t de M , à un instant t quelconque de I , au point Ω

de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. En déduire la nature de la trajectoire de M .

2° Démontrer que le mouvement de M est uniforme sur l'intervalle I .

39 Soit ω un réel strictement positif. Soit M un point matériel en mouvement, dont la position à tout instant t de l'intervalle de temps I est le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x = \cos(\omega t^2) \\ y = \sin(\omega t^2) \\ z = \frac{5}{2} \omega t^2. \end{cases}$$

1° Dans quelle courbe de $\mathcal{E}$ la trajectoire de M est-elle incluse?

2° Déterminer, pour tout instant t de I , le produit scalaire $\vec{V}(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$ du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération de M . En déduire l'allure du mouvement de M sur l'intervalle I .

40 Soient α un réel strictement positif, h, p, q trois réels quelconques. Soit A la droite de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes : $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ et D la droite de $\mathcal{E}$ d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = h \end{cases}$$

Un mobile μ se déplace sur Δ ; sa position μ_t à l'instant t est le point de Δ d'abscisse : $x(t) = \alpha t$. Un mobile M se déplace sur D ; sa position M_t à l'instant t est le point de D d'abscisse : $x(t) = p \sin t + q \cos t + \frac{2}{5} \alpha t$.

1° Démontrer que le vecteur-accélération de M à l'instant t est la projection vectorielle orthogonale du vecteur $\overrightarrow{M_t \mu_t}$ sur la direction $\vec{D}$ de D .

2° Déterminer les réels p et q pour que, à l'instant $t = 0$, la position de M soit le point d'intersection de D et de Oz et que le vecteur-vitesse de M soit le vecteur nul; décrire alors le mouvement de M .

41 Soit M un point matériel en mouvement pendant l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$. On désigne, pour tout instant t de I , par M_t la position, par $\vec{V}(t)$ le vecteur-vitesse, par $\vec{I}(t)$ le vecteur-accélération de M à l'instant t .

On suppose que l'on a :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \vec{I}(t) = 2\vec{j} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \vec{V}(0) = \vec{i} - \vec{k} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} = \vec{j} \end{cases} \quad (3)$$

De façon analogue à l'exercice n° 33, déterminer, pour tout instant t de I , le vecteur $\vec{V}(t)$ et le point M_t . Démontrer que M se déplace dans un plan et donner l'allure de son mouvement sur l'intervalle I .

42 Soit M un point matériel en mouvement, dont la position, à tout instant t d'un intervalle de temps I , est le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = (t - 2)^3 \\ z = -2t - 2. \end{cases}$$

Étudier le mouvement projeté de M :

a) sur le plan $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ d'équation : $-2x + z = 0$;

b) sur le plan $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ d'équation : $x + z = 0$.

43 Même question que pour le n° 42 avec :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{t+1} \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \text{ et la droite } \mathcal{E}' \text{ de } \mathcal{E} \text{ d'équations : } y + 1 = 2z = x.$$

44 Soient a et h deux réels strictement positifs.

Soit C une hélice de $\mathcal{E}$ dont une représentation paramétrique, de paramètre u , est donnée par :

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \sin u \\ z = hu \end{cases}$$

Un point matériel M se déplace sur C pendant un intervalle de temps I avec la loi horaire $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$.

1° Déterminer, pour tout instant t de I , le vecteur-vitesse $\vec{V}(t)$, le vecteur-accélération $\vec{I}(t)$ et la vitesse algébrique $v(t)$ de M à l'instant t .

2° De façon analogue aux paragraphes 2.8 et 2.13, déterminer toutes les lois horaires pour lesquelles M a un mouvement uniforme sur I .

◆ Dans les exercices suivants (n°s 45 à 52), on désigne par D une droite d'un espace affine réel euclidien orienté et par $(O, \vec{u})$ un repère orthonormé direct de D .

45 Un point matériel M se déplace sur D pendant un intervalle de temps $I = [t_0, t_1]$ d'un mouvement uniformément varié. Pour tout instant t de I , on désigne par $x(t)$ l'abscisse de la position de M à l'instant t et par $v(t)$ la vitesse algébrique de M à l'instant t .

1° Démontrer que la donnée des réels $t_0, t_1, v(t_0), x(t_1), x\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right)$ permet, dans tous les cas, de déterminer la loi horaire du mouvement.

2° Application : $t_0 = 0, t_1 = 2, v(t_0) = 0, x(t_1) = 10, x\left(\frac{t_0 + t_1}{2}\right) = 5$.

Déterminer la loi horaire du mouvement. En déduire les réels $x(t_0)$ et $v(t_1)$.

46 Soient t_0, t_1, t_2 trois réels tels que l'on ait : $t_0 < t_1 < t_2$. Un mobile M se déplace sur D d'un mouvement uniformément accéléré sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et uniformément retardé sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On suppose que la vitesse algébrique de M aux instants t_0 et t_2 est nulle et que $x(t_2) - x(t_0)$ est égale à un réel strictement positif d .

1° On suppose, de plus, que sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ l'accélération de M est égale à un réel strictement positif γ , que sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, elle est égale à un réel strictement négatif γ' , et que sur l'intervalle $[t_0, t_2]$, la vitesse algébrique est une fonction continue. Déterminer, en fonction de d, γ, γ', t_0 , les réels t_1 et t_2 .

2° Étudier le cas particulier où l'on a : $\gamma' = -\gamma$.

47 Soient t_1, t_2, t_3 trois réels tels que l'on ait : $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Un point matériel M se déplace sur D , pendant l'intervalle de temps $[0, t_3]$, de la façon suivante :

- à l'instant 0, le point M est à l'origine O et sa vitesse algébrique est nulle;
- entre les instants 0 et t_1 , le point M a un mouvement uniformément accéléré, d'accélération constante γ ;
- entre les instants t_1 et t_2 , le point M a un mouvement uniforme de vitesse algébrique constante v ;
- entre les instants t_2 et t_3 , le point M a un mouvement uniformément retardé, d'accélération constante γ' ;
- à l'instant t_3 , sa vitesse algébrique est nulle et sa position a pour abscisse le réel d ;
- entre les instants 0 et t_3 , la vitesse algébrique est une fonction continue.

1° Discuter suivant le signe de d les signes respectifs de v, γ, γ' .

2° Déterminer en fonction de v, γ, γ', t_3 les équations du mouvement de M sur chacun des trois intervalles de temps considérés, ainsi que les réels t_1 et t_2 .

3° Application : $v = 34, \gamma = 1, \gamma' = -3, d = 10^4$. Déterminer t_1 et t_2 .

48 Une voiture M part d'un point A à l'instant $t = 0$ et atteint un point B deux heures plus tard, à l'instant $t = 2$, après avoir parcouru 160 kilomètres.

On désigne par f la fonction qui associe à tout instant t de $[0, 2]$, la distance x , exprimée en kilomètres, parcourue par M sur la route, entre les instants 0 et t . Le mouvement de M n'est pas nécessairement uniforme; on suppose seulement que f est continue sur $[0, 2]$.

1° Démontrer qu'il existe, sur la route suivie par M , au moins un couple (A', B') de points distants de 80 kilomètres (A' pouvant éventuellement être en A , ou B' éventuellement en B) et tels que la voiture mette exactement une heure pour aller de A' à B' .

On considérera pour cela la fonction φ , définie sur $[0, 1]$ par :

$$t \mapsto f(t+1) - f(t)$$

et l'on appliquera à cette fonction φ le théorème des valeurs intermédiaires en posant :

$f(1) = a$ et en distinguant les trois cas suivants : $a = 80, a < 80, a > 80$.

2° Montrer que, si le mouvement est uniforme, la fonction φ a une propriété remarquable et qu'il existe alors une infinité de couples (A', B') . Plus généralement, on pose $f(t) = 80t + p(t)$; caractériser les fonctions p telles que la fonction φ correspondante possède la propriété précédente. (Bacc. 1972, série E.)

49 Soit M un mobile animé, pendant un intervalle de temps I , d'un mouvement rectiligne de support la droite D et défini par la loi horaire :

$$t \mapsto \cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t.$$

1° Déterminer trois réels a , ω , φ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t = a \cos(\omega t + \varphi) \\ \omega > 0 \quad \text{et} \quad -\pi < \varphi < \pi. \end{cases}$$

2° Déterminer la période du mouvement; étudier, sur une période, le mouvement du point M (allure et diagrammes des abscisses, des vitesses, des accélérations).

50 Mêmes questions que pour le n° 49 avec la loi horaire :

$$t \mapsto \cos 2t + \sin 2t + 2. \text{ On pourra faire un changement de repère.}$$

51 Étudier le mouvement rectiligne dont la loi horaire est $t \mapsto t^3 + 2t + 3$.

On donnera l'allure du mouvement sur $[0, +\infty[$ et on tracera les diagrammes respectifs des abscisses, des vitesses et des accélérations.

52 Étudier le mouvement rectiligne dont la loi horaire est $t \mapsto \frac{t}{t+1}$.

On donnera l'allure du mouvement sur $[0, +\infty[$, on tracera les diagrammes des abscisses, des vitesses et des accélérations et on précisera les limites de la trajectoire.

◆ Dans les exercices suivants (nos 53 à 56), on désigne par $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine réel euclidien orienté $\mathcal{E}$, par O le centre de ce cercle, par R son rayon et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

53 Un mobile M se déplace sur $\mathcal{C}$ pendant l'intervalle de temps $[0, +\infty[$ avec la loi horaire $\theta : t \mapsto 2t^2 + 3t + 1$.

1° Pour quelles valeurs de t , la vitesse algébrique $v(t)$ de M est-elle nulle ?

2° Pour quelles valeurs de t , l'accélération tangentielle $\gamma_T(t)$ de M est-elle nulle ?

3° Soit A la position de M à l'instant 0. A quel instant, le mobile M repasse-t-il pour la première fois en A ? Quelles sont alors sa vitesse angulaire et son accélération normale ?

54 Soit M un point matériel qui se déplace sur $\mathcal{C}$ pendant l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$, avec la loi horaire $\theta : t \mapsto \theta(t)$. On suppose :

- que l'on a : $\theta'(0) > 0$ et $\forall t \in I, \theta''(t) = 2$
- que le vecteur-vitesse $\vec{V}(0)$ de M à l'instant 0 est égal à $\vec{i} + \vec{j}$
- que le rayon R du cercle $\mathcal{C}$ est égal à 1.

1° Soit M_0 la position de M à l'instant 0; déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$.

2° De façon analogue à l'exercice n° 33, déterminer, pour tout instant t de I , le réel $\theta'(t)$, puis le réel $\theta(t)$. Étudier l'allure du mouvement de M sur I .

55 Soit M un point matériel qui se déplace sur $\mathcal{C}$ d'un mouvement uniforme.

On suppose que la période T du mouvement est égale à 4 et que l'accélération normale γ_N est égale à 8. Déterminer le rayon R du cercle $\mathcal{C}$ et la vitesse angulaire ω .

56 Soit M un point matériel qui se déplace sur $\mathcal{C}$ d'un mouvement uniforme.

Soit D une droite de $\mathcal{E}$, passant par O . On désigne par $\vec{u}$ un vecteur unitaire de D et par α une détermination de la mesure en radians de l'angle du vecteur $\vec{i}$ et du vecteur $\vec{u}$. Étudier le mouvement projeté de M sur la droite D .

10. Calcul intégral

1. Intégrale de Riemann.

1.1 Considérons un point matériel M animé d'un mouvement rectiligne pendant un intervalle de temps borné $I = [t_0, t_1]$.

Si l'on connaît l'équation horaire du mouvement pendant l'intervalle I , c'est-à-dire si l'on connaît l'abscisse $x(t)$ de la position de M à tout instant t de I , on sait trouver la vitesse $v(t)$ à tout instant t de I :

$$\forall t \in I, \quad v(t) = x'(t).$$

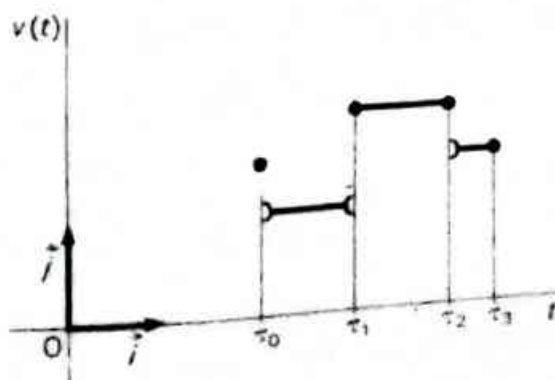
Étudions le problème réciproque suivant : on connaît la vitesse $v(t)$ à tout instant t de I ; que peut-on en déduire pour l'abscisse $x(t)$ de la position de M à tout instant t de I ?

Si la fonction $t \mapsto v(t)$ est constante sur I , il existe un réel v_0 égal à $v(t_0)$ tel que : $\forall t \in I, \quad v(t) = v(t_0) = v_0$. Du paragraphe 2.8 du chapitre 9, nous déduisons l'existence d'un réel b tel que l'on ait : $\forall t \in I, \quad x(t) = v_0 t + b$. La connaissance de la fonction $t \mapsto v(t)$ ne permet pas de déterminer b .

On a toutefois : $x(t_1) - x(t_0) = (v_0 t_1 + b) - (v_0 t_0 + b) = v_0(t_1 - t_0)$

La connaissance de la fonction $t \mapsto v(t)$ permet donc, dans ce cas, de calculer le réel $x(t_1) - x(t_0)$.

Il en est de même, de façon plus générale, lorsque la fonction $t \mapsto v(t)$ est une fonction en escalier sur I , appelée aussi fonction constante par morceaux sur I



Si l'intervalle $[t_0, t_1]$ est la réunion de n intervalles $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ lorsque i varie de 1 à n avec $\tau_0 = t_0$ et $\tau_n = t_1$ et si l'on a :

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists v_i \in \mathbb{R}, (\forall t \in]\tau_{i-1}, \tau_i[, v(t) = v_i)$, on a alors :

$$x(t_1) - x(t_0) = \sum_{i=1}^n (x(\tau_i) - x(\tau_{i-1})) = \sum_{i=1}^n v_i (\tau_i - \tau_{i-1}).$$

Ces considérations nous conduisent aux définitions et propriétés suivantes :

Fonctions en escalier sur un segment.

Dans les paragraphes suivants (nos 1.2 à 1.13), nous désignons par a et b deux réels tels que : $a < b$.

Subdivisions de $[a, b]$.

- 1.2** • On appelle **subdivision de $[a, b]$** toute partie finie de $[a, b]$ qui comprend a et b . Si S est une subdivision de $[a, b]$ qui possède $(n + 1)$ points, nous ordonnons ces points par la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ et nous notons : $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ avec :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_{i-1} < x_i. \end{cases}$$

• L'ensemble $\mathcal{S}$ des subdivisions de $[a, b]$ est inclus dans $\mathcal{P}([a, b])$; il est donc ordonné par l'inclusion. Si S et S' sont deux subdivisions de $[a, b]$, la réunion $S \cup S'$ est encore une subdivision de $[a, b]$: c'est la borne supérieure de $\{S, S'\}$ pour la relation d'inclusion.

• On appelle **pas de la subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$** le plus grand des n réels strictement positifs $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}$.

Exemple.

$(0, 3, 5)$ et $(0, 1, \frac{5}{2}, 5)$ sont deux subdivisions de $[0, 5]$ de pas respectifs 3 et $\frac{5}{2}$.

Fonctions en escalier sur $[a, b]$.

- 1.3** • Soient une subdivision $S = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et une fonction f définie sur $[a, b]$. Nous disons que f est **étagée sur S** si et seulement si f est constante sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$, c'est-à-dire :

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, (\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, f(x) = \lambda_i)$.

• Nous disons que la fonction f définie sur $[a, b]$ est une **fonction en escalier sur $[a, b]$** si et seulement s'il existe une subdivision S de $[a, b]$ telle que f soit étagée sur S .

• Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ sur lesquelles f est étagée, admet un plus petit élément qui est la subdivision S dont les points sont, outre a et b , les réels de $]a, b[$ pour lesquels f est discontinue. Nous disons que S est la **subdivision associée à f** . La fonction f est alors étagée sur toute subdivision S' qui contient S .

• Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, nous appelons **pas de la fonction f** , le pas de la subdivision de $[a, b]$ qui lui est associée.

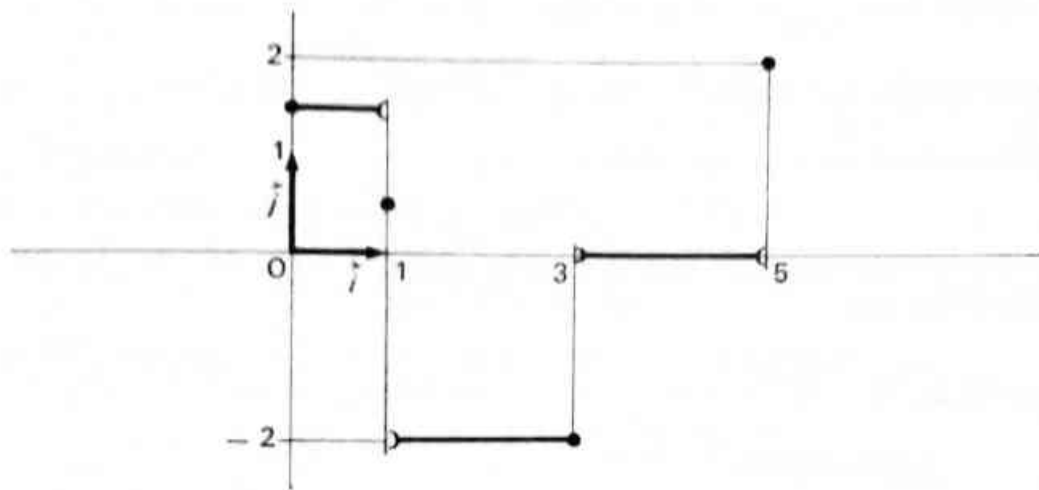
Exemples.

1. La fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1[& f(x) = \frac{3}{2} \\ f(1) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in]1, 3] & f(x) = -2 \\ \forall x \in]3, 5[& f(x) = 0 \\ f(5) = 2 \end{cases}$$

est une fonction en escalier sur $[0, 5]$.

Nous donnons la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



L'ensemble des points de $]0, 5[$ pour lesquels f est discontinue est $\{1, 3\}$. La subdivision de $[0, 5]$ associée à f est donc : $S = (0, 1, 3, 5)$; le pas de f est égal à 2.

2. Toute fonction constante sur $]a, b[$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$; la subdivision de $[a, b]$ associée à une telle fonction ne contient que les points a et b ; le pas d'une telle fonction est donc égal à $b - a$.

Ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1.4 THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Utilisons le théorème 3.3 du chapitre 1 du tome 1.

- Il résulte de l'exemple 2 du paragraphe 1.3 que $\mathcal{E}$ n'est pas vide.
- Soient α un réel quelconque, f une fonction en escalier quelconque sur $[a, b]$ et S la subdivision de $[a, b]$ associée à f . La fonction f est donc étagée sur S . De la proposition : $\forall x \in [a, b], (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, il résulte que la fonction αf est, elle aussi, étagée sur S ; elle appartient donc à $\mathcal{E}$.
- Soient f et g deux fonctions en escalier quelconques sur $[a, b]$ et S_1 et S_2 les subdivisions de $[a, b]$ qui leur sont respectivement associées. On a : $S_1 \subset S_1 \cup S_2$ et $S_2 \subset S_1 \cup S_2$. Les fonctions f et g qui sont respectivement étagées sur S_1 et sur S_2 , sont toutes deux étagées sur $S_1 \cup S_2 = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Désignons alors par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (resp. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$) les valeurs respectives de f (resp. g) sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$.

De la proposition :

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \lambda_i + \mu_i$,
il résulte que la fonction $f+g$ est elle aussi étagée sur $S_1 \cup S_2$; elle appartient donc à $\mathcal{E}$. ■

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.

1.5 DÉFINITION : Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $S = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision de $[a, b]$ qui lui est associée. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$.

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le réel $\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1})$.

On note cette intégrale : $\int_a^b f(x) dx$ et on lit : somme de a à b de $f(x) dx$. Dans cette notation conventionnelle, la lettre x joue le même rôle que dans l'expression : soit la fonction $f : x \mapsto f(x)$.

Remarque : L'intégrale de f sur $[a, b]$ ne dépend pas des valeurs de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Exemples.

Reprenons les exemples du paragraphe 1.3.

1. On a : $S = (0, 1, 3, 5)$ et $\begin{cases} \forall x \in]0, 1[, f(x) = \frac{3}{2} \\ \forall x \in]1, 3[, f(x) = -2 \\ \forall x \in]3, 5[, f(x) = 0 \end{cases}$

et par suite : $\int_0^5 f(x) dx = \frac{3}{2} \cdot (1 - 0) + (-2) \cdot (3 - 1) + 0 \cdot (5 - 3)$
 $= \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$.

2. Soit λ la valeur constante de f sur $]a, b[$.

On a : $\int_a^b f(x) dx = \lambda(b - a)$.

1.6 On a la propriété suivante :

Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $S' = (y_0, \dots, y_n)$ une subdivision de $[a, b]$ sur laquelle f est étagée. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des n intervalles $]y_0, y_1[, \dots,]y_{n-1}, y_n[$.

Alors on a : $\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j - y_{j-1})$. (1)

Démonstration :

Soit S la subdivision de $[a, b]$ associée à f ; on a : $S \subset S'$.

Posons : $p = \text{card}(S' - S) = \text{card } S' - \text{card } S$ et raisonnons par récurrence sur p .

• Si p est nul, S' est alors égale à S et l'égalité (1) traduit la définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$.

• Soit k un entier quelconque. Supposons que l'égalité (1) soit vraie pour toute subdivision S'' contenant S et telle que : $\text{card}(S'' - S) = k$.

Considérons maintenant une subdivision : $S' = (y_0, \dots, y_n)$ contenant S et telle que : $\text{card}(S' - S) = k + 1$.

Il existe alors au moins un point y_q de S' qui n'appartient pas à S ; les valeurs de f sur $]y_{q-1}, y_q[$ et sur $]y_q, y_{q+1}[$ sont respectivement λ_q et λ_{q+1} et on a :
 $\lim_{y \rightarrow y_q^-} f = \lambda_q$ et $\lim_{y \rightarrow y_q^+} f = \lambda_{q+1}$.

De la définition de S , il résulte que f est continue en y_q ; on a : $\lambda_q = \lambda_{q+1} = f(y_q)$.

Posons alors $S'' = (y_0, \dots, y_{q-1}, y_{q+1}, \dots, y_n)$; la subdivision S'' contient S et satisfait à : $\text{card}(S'' - S) = k$.

La valeur constante de f sur $]y_{q-1}, y_{q+1}[$ est égale à λ_q . On a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^{q-1} \lambda_j (y_j - y_{j-1}) + \lambda_q (y_{q+1} - y_{q-1}) + \sum_{j=q+2}^n \lambda_j (y_j - y_{j-1}).$$

$$\begin{aligned} \text{On a d'autre part : } \lambda_q (y_{q+1} - y_{q-1}) &= \lambda_q ((y_{q+1} - y_q) + (y_q - y_{q-1})) \\ &= \lambda_{q+1} (y_{q+1} - y_q) + \lambda_q (y_q - y_{q-1}) \end{aligned}$$

$$\text{et, par suite : } \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j - y_{j-1}).$$

• L'égalité (1) est donc vraie pour toute subdivision de $[a, b]$ contenant S , c'est-à-dire pour toute subdivision de $[a, b]$ sur laquelle f est étagée. ■

Remarque : L'intégrale de la fonction f en escalier sur $[a, b]$ est donc indépendante du choix de la subdivision de $[a, b]$ sur laquelle f est étagée.

Propriétés.

1.7 Nous admettons les propriétés suivantes et nous en proposons la démonstration en exercices.

P1 Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.
L'application J définie par :

$$\begin{aligned} J : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{E}$.

P2 Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.
Si l'on a : $(\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0)$, alors on a : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

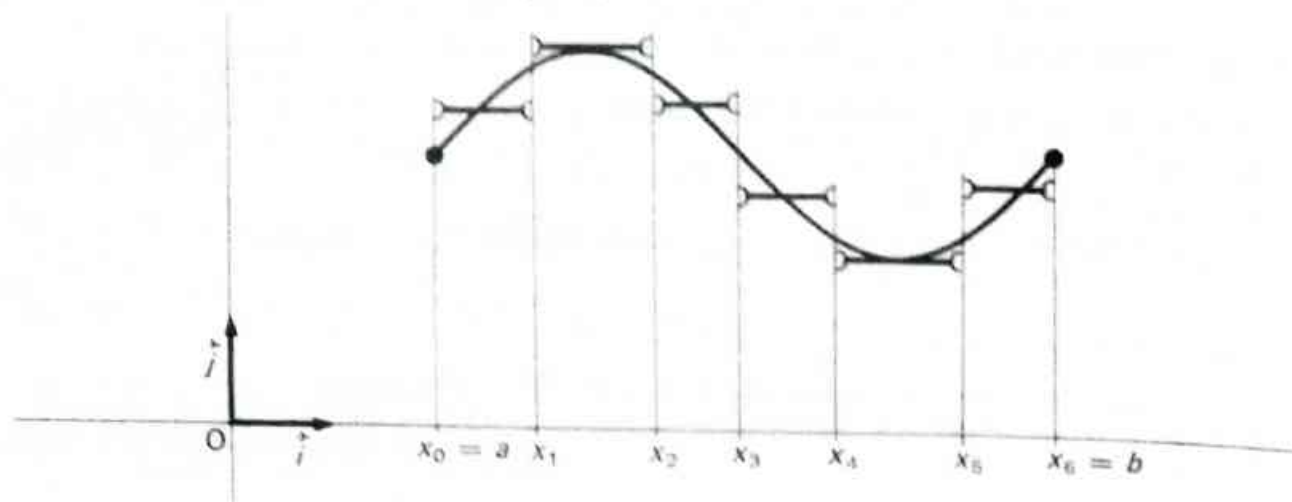
Si l'on a : $(\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x))$,
alors on a : $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

P3 Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$.
 $|f|$ est aussi une fonction en escalier sur $[a, b]$ et on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx.$$

Fonctions intégrables au sens de Riemann.*

- 1.8 Soit une fonction f définie sur $[a, b]$. Cherchons à étendre à f la définition 1.5. Supposons, par exemple, que f soit continue sur $[a, b]$ et essayons d'approximer f par des fonctions en escalier sur $[a, b]$.



Une méthode consiste à se donner une subdivision : $S = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, à choisir, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, un réel ξ_i de $]x_{i-1}, x_i[$ et à considérer une fonction en escalier φ , étagée sur S , dont la valeur sur tout intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ est égale à $f(\xi_i)$; les réels $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_n)$ sont arbitraires.

Ces considérations nous conduisent aux définitions suivantes :

- 1.9 Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

• Nous appelons **fonction de Riemann relative à f** , toute fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que, si $S = (x_0, \dots, x_n)$ est la subdivision associée à φ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs respectives de φ sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$, on ait : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, (\exists \xi_i \in]x_{i-1}, x_i[, \lambda_i = f(\xi_i))$.

• Nous appelons **somme de Riemann relative à f** , l'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction de Riemann relative à f .

Avec les notations précédentes, si s est l'intégrale sur $[a, b]$ de φ , on a :

$$s = \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}).$$

• Nous appelons pas d'une somme de Riemann relative à f , le pas de la fonction en escalier sur $[a, b]$ dont cette somme est l'intégrale.

Exemple.

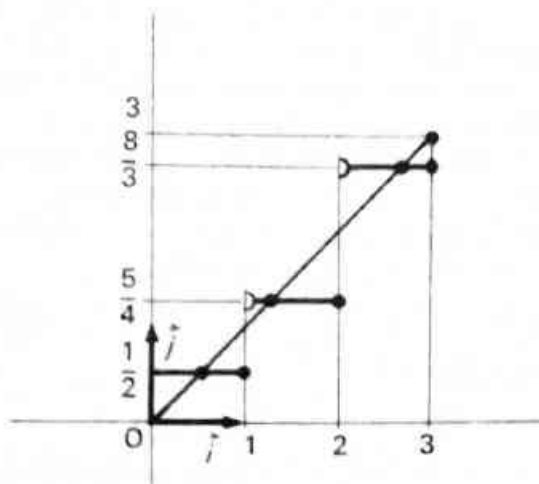
Considérons la fonction $f : x \mapsto x$, définie sur $[0, 3]$.

$S = (0, 1, 2, 3)$ est une subdivision de $[0, 3]$ et la fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], & \varphi(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in]1, 2], & \varphi(x) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} \\ \forall x \in]2, 3], & \varphi(x) = f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

* Riemann : célèbre mathématicien allemand (1826-1866).

est une fonction de Riemann relative à f , de pas 1. La somme de Riemann correspondante s est

$$\int_0^3 \varphi(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{8}{3} = \frac{53}{12}$$


On a alors la définition suivante :

- 1.10 DÉFINITION :** Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe un unique réel $I(f)$ qui satisfait à la proposition suivante : pour tout réel strictement positif ε , il existe un réel strictement positif α tel que, pour toute fonction de Riemann relative à f , de pas strictement inférieur à α , la somme de Riemann correspondante diffère de $I(f)$ de moins de ε .

Comme pour la limite d'une fonction, l'unicité du réel $I(f)$ est déduite de l'existence de ce réel.

On dit que $I(f)$ est l'intégrale au sens de Riemann de f sur $[a, b]$, ou simplement, l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Cette définition sera justifiée si, dans le cas où f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, l'intégrale au sens de Riemann de f sur $[a, b]$ est le réel défini dans le paragraphe 1.5. Cette propriété est l'objet du théorème suivant :

- 1.11 THÉORÈME :** Toute fonction f en escalier sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et l'on a : $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.

Démonstration :

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$; démontrons que le réel $\int_a^b f(x) dx$ satisfait

à la définition 1.10.

Désignons par $S = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision associée à f , par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[$, $\dots$, $]x_{n-1}, x_n[$ et par M la borne supérieure de l'ensemble fini :

$\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|, |f(x_0)|, \dots, |f(x_n)|\}$.

On a : $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$.

Considérons maintenant une fonction de Riemann φ relative à f et désignons par $S' = (y_0, \dots, y_m)$ la subdivision de $[a, b]$ associée à φ et par d le pas de S' .

La fonction $f - \varphi$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit j un entier quelconque de $\{1, \dots, m\}$; étudions l'image de $]y_{j-1}, y_j[$ par $f - \varphi$.

On a : $\forall x \in]y_{j-1}, y_j[, |f(x)| \leq M$ et $|\varphi(x)| \leq M$ et par suite :

$$\forall x \in]y_{j-1}, y_j[, |(f - \varphi)(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x)| + |\varphi(x)| \leq 2M.$$

D'autre part, si l'intervalle $]y_{j-1}, y_j[$ ne contient aucun des points de discontinuité de f sur $]a, b[$, il existe un entier i de $\{1, \dots, n\}$, tel que : $]y_{j-1}, y_j[\subset]x_{i-1}, x_i[$ et,

on a donc : $\forall x \in]y_{j-1}, y_j[, f(x) - \varphi(x) = \lambda_i - \lambda_i = 0$.

Soit J le sous-ensemble de $\{1, \dots, m\}$ constitué des entiers j pour lesquels l'intervalle $]y_{j-1}, y_j[$ contient au moins un point de discontinuité de f sur $]a, b[$; le nombre d'éléments de J est inférieur ou égal à $(n - 1)$, nombre des points de discontinuité de f sur $]a, b[$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f - \varphi)(x) dx \right| \leq \int_a^b |f - \varphi|(x) dx \\ &= \sum_{j \in J} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f - \varphi|(x) dx \leq \sum_{j \in J} 2M(y_j - y_{j-1}) \leq 2M(n - 1)d < 2Mnd. \end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif quelconque.

Pour avoir : $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| < \varepsilon$, il suffit d'avoir : $2Mnd < \varepsilon$ ce qui

équivalait à : $d < \frac{\varepsilon}{2Mn}$. On peut donc prendre pour α le réel $\frac{\varepsilon}{2Mn}$. ■

Notation : Si f est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, on note aussi $\int_a^b f(x) dx$ l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Conformément au programme, nous admettons le théorème suivant :

1.12 THÉORÈME : Toutes les fonctions continues ou monotones par intervalles sur $[a, b]$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Propriétés.

- 1.13** Les propriétés suivantes généralisent celles du paragraphe 1.7; nous admettons les quatre premières de ces propriétés; nous proposons en exercice une démonstration de P_4 pour les fonctions en escalier.

P1

L'ensemble $\mathcal{J}$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et l'application I de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$I : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \int_a^b f(x) dx$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{J}$.

Remarque : Du théorème 1.11, il résulte que l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est inclus dans $\mathcal{J}$ et que l'application J définie dans la propriété P_1 du paragraphe 1.7 est la restriction de I à $\mathcal{E}$.

P2 Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Si l'on a : $(\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0)$, alors on a : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Si l'on a : $(\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x))$, alors on a :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

P3 Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

$|f|$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et l'on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx.$$

P4 Soient f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et c un point de $]a, b[$.

Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et l'on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Conventions : Si a est supérieur à b , on pose : $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

On pose aussi : $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, pour tout triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ et pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann sur $[\inf\{a, b, c\}, \sup\{a, b, c\}]$,

on a : $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Cette propriété est connue sous le nom de **relation de Chasles**.

P5 Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann et bornée sur $[a, b]$. Soient m et M les deux réels tels que l'on ait : $(\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M)$.

On a : $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

Démonstration :

Soient g et h les fonctions en escalier sur $[a, b]$ définies par :

$g : x \mapsto m$ $h : x \mapsto M$.

On a : $\int_a^b g(x) dx = m(b - a)$ et $\int_a^b h(x) dx = M(b - a)$

et, d'après la propriété P_2 : $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$. ■

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** le réel $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$.

Soit f une fonction en escalier étagée sur la subdivision $S = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ définie par : $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, x_i = a + i \frac{b - a}{n}$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$.

On a :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{n}$$

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est, dans ce cas, la moyenne arithmétique des valeurs de f sur chacun des intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$.

P6 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Il existe un réel c de $[a, b]$ tel que l'on ait : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$.

Démonstration :

Il résulte du théorème 1.12 que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et du théorème 2.3 du chapitre 5 qu'il existe deux réels m et M tels que l'on ait : $f([a, b]) = [m, M]$.

On a alors : $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ et par suite, d'après la propriété P_5 :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ ce qui équivaut à : } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ appartient à $[m, M]$, c'est-à-dire à $f([a, b])$. Il existe donc

un réel c de $[a, b]$ tel que l'on ait : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$. ■

P7 Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann et bornée sur $[a, b]$. Soit A un réel tel que l'on ait : $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq A$.

$$\text{On a : } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq A(b-a).$$

Démonstration :

On a : $\forall x \in [a, b], -A \leq f(x) \leq A$,

Par suite, d'après la propriété P_5 , on a : $-A(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq A(b-a)$,

ce qui équivaut à : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq A(b-a)$. ■

P8 Soient f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et (s_n) la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \frac{b-a}{n} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right).$$

La suite (s_n) converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

Démonstration :

Soient n un entier strictement positif et $S = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision de $[a, b]$

définie par : $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, x_i = a + i \frac{b-a}{n}$.

On a alors : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

Le pas de S est donc $\frac{b-a}{n}$.

Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, posons $\xi_i = x_{i-1}$; on a alors,
 $f(\xi_i) = f(x_{i-1}) = f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)$.

Le réel s_n est donc une somme de Riemann relative à f , de pas $\frac{b-a}{n}$.

Démontrons que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b f(x) dx$,
 c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left((n > p) \implies \left| s_n - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \right)$$

Soit donc ε un réel strictement positif quelconque; il résulte de la définition 1.10 qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour toutes les fonctions de Riemann relatives à f , de pas strictement inférieur à α , la somme de Riemann correspondante diffère de $\int_a^b f(x) dx$ de moins de ε .

Soit alors p un entier naturel tel que l'on ait : $\frac{b-a}{p} < \alpha$.

Pour tout entier n strictement supérieur à p , on a alors : $\frac{b-a}{n} < \frac{b-a}{p} < \alpha$

et, par suite : $\left| s_n - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$. ■

Nous verrons, dans la suite de ce chapitre, des exemples d'utilisation de cette propriété.

2. Primitives.

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques méthodes pour calculer l'intégrale de certaines fonctions intégrables sur un segment.

2.1 THÉORÈME : Soient K un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur K ; soit a un point de K . Alors, la fonction
 $F: x \longmapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur K et sa fonction dérivée est égale à f .

Démonstration :

F est définie sur K .

- On a : $\int_a^a f(t) dt = 0$ et, par suite, $F(a) = 0$.
- Soit x un réel quelconque de K , distinct de a . Si l'on a : $x > a$ (resp. $x < a$), le segment $[a, x]$ (resp. $[x, a]$) est inclus dans K ; la fonction f est donc continue sur $[a, x]$ (resp. $[x, a]$) et par suite intégrable sur $[a, x]$ (resp. $[x, a]$). La fonction F est donc définie en tout point x de K .

F est dérivable sur K de fonction dérivée égale à f.

L'intervalle K n'est pas réduit à un point; il suffit donc de démontrer que F admet, en tout point x de K qui n'est pas une borne un nombre dérivé à droite et un nombre dérivé à gauche égaux à $f(x)$, et en la borne supérieure (resp. inférieure) de K, un nombre dérivé à gauche (resp. à droite) égal à la valeur de f en ce point.

• Soit x_0 un point de K distinct de la borne supérieure de K; démontrons que

$$\text{l'on a : } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Soit J un intervalle quelconque de centre $f(x_0)$; puisque x_0 n'est pas la borne supérieure de K, la fonction f est continue à droite en x_0 ; il existe donc un intervalle $I' = [x_0, x_0 + \alpha[$ inclus dans K et tel que l'on ait : $f(I') \subset J$.

Posons : $I = I' - \{x_0\}$ et considérons un réel quelconque x de I.

$$\text{On a alors : } \varphi(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

La fonction f est continue sur $[a, b]$ et donc, en particulier, sur $[x_0, x]$. De la propriété P_6 du paragraphe 1.13, il résulte qu'il existe un réel x_1 tel que l'on ait :

$$x_0 \leq x_1 \leq x \quad \text{et} \quad \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x_1)$$

Des inégalités : $x_0 \leq x_1 \leq x < x_0 + \alpha$, il résulte que x_1 appartient à I' et que, par suite, le réel $\varphi(x)$ égal à $f(x_1)$ appartient à J.

On a donc bien : $\varphi(I) \subset J$ et par suite : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \varphi(x) = f(x_0).$

• Soit x_0 un point de K distinct de la borne inférieure de K. Démontrons que F est dérivable à gauche en x_0 , de nombre dérivé à gauche $f(x_0)$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Soit J un intervalle quelconque de centre $f(x_0)$. Puisque x_0 n'est pas la borne inférieure de K, la fonction f est continue à gauche en x_0 ; il existe donc un intervalle $I' =]x_0 - \alpha, x_0]$ inclus dans K tel que l'on ait : $f(I') \subset J$.

Posons $I = I' - \{x_0\}$ et considérons un réel quelconque x de I. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{-1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} f(t) dt = \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} f(t) dt. \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur K et donc, en particulier, sur $[x, x_0]$. De la propriété P_6 du paragraphe 1.13, il résulte qu'il existe un réel x_1 tel que l'on ait :

$$x \leq x_1 \leq x_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} f(t) dt = f(x_1)$$

Des inégalités $x_0 - \alpha < x \leq x_1 \leq x_0$, il résulte que x_1 appartient à I' et que, par suite, le réel $\varphi(x)$ égal à $f(x_1)$ appartient à J.

On a donc bien $\varphi(I) \subset J$ et par suite : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \varphi(x) = f(x_0).$

Primitives.

- 2.2 DÉFINITION :** Soient f et F deux fonctions dont les ensembles de définition contiennent un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
 F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et admet, pour fonction dérivée sur I , la fonction f .

Exemple.

La fonction $F: x \mapsto 2x + 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \mapsto 2$.
 Remarquons que la fonction $G: x \mapsto 2x - 3$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriétés.

- 2.3** Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenu dans l'ensemble de définition de la fonction f .
 On a les propriétés suivantes :

P1 Si f admet une primitive F sur I , alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G , définies sur I , qui satisfont à la propriété suivante :
 $\exists K \in \mathbb{R}, (\forall x \in I, G(x) = F(x) + K).$

Démonstration :

Si F est une primitive de f sur I , il résulte de la définition 2.2 que F est dérivable sur I et admet f pour fonction dérivée sur I .

• De la propriété P_2 du paragraphe 3.1 du chapitre 7, et du calcul de la dérivée d'une somme de fonctions dérivables, il résulte que toute fonction G définie par :
 $\exists K \in \mathbb{R}, (\forall x \in I, G(x) = F(x) + K)$ est dérivable sur I et admet pour fonction dérivée sur I , la fonction égale à la somme de la fonction f et de la fonction nulle, c'est-à-dire égale à la fonction f .

• Soit G une primitive quelconque de f sur I . La fonction $G - F$ est dérivable sur I , de fonction dérivée sur I la fonction $f - f$ c'est-à-dire la fonction nulle. De la propriété P_2 du paragraphe 3.2 du chapitre 7, il résulte que $G - F$ est constante sur I . Il existe donc un réel K tel que l'on ait : $\forall x \in I, G(x) - F(x) = K$. ■

P2 Soient x_0 un élément de I et y_0 un réel.
 Si l'ensemble des primitives de f sur I n'est pas vide, il existe un unique élément de cet ensemble qui prend la valeur y_0 au point x_0 .

Démonstration :

Soit F une primitive de f sur I . Toute primitive G de f sur I satisfait à :

$\exists K \in \mathbb{R}, (\forall x \in I, G(x) = F(x) + K).$

On a alors : $(G(x_0) = y_0) \iff (F(x_0) + K = y_0) \iff (K = y_0 - F(x_0)).$

La seule primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 au point x_0 est la fonction

$x \mapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$. ■

P3

Si I possède au moins deux points distincts, et si f est continue sur I , l'ensemble des primitives de f sur I n'est pas vide :

si a est un point de I , la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Démonstration :

Il résulte du théorème 2.1 que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I et l'on a bien :

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0. \quad \blacksquare$$

P4

Si I est un segment $[a, b]$ et si f est continue sur $[a, b]$, pour toute primitive G de f sur I , alors on a :

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration :

• Il résulte de P₃ que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

$$\text{On a : } F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

• Soit G une primitive quelconque de f sur I et soit K le réel tel que l'on ait :
 $\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + K.$

On a :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + K) - (F(a) + K) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt. \quad \blacksquare$$

Remarques : 1. Si F est une primitive de f sur I et si I' est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I , alors la restriction de F à I' est une primitive de f sur I' .

2. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est la réunion de deux intervalles disjoints I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$ et qui admet des primitives sur I_1 et sur I_2 .

Nous appelons simplement **primitive de f** toute fonction F dont la restriction à I_1 (resp. I_2) est une primitive F_1 (resp. F_2) de f sur I_1 (resp. I_2).

L'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions G , définies sur $I_1 \cup I_2$, et qui satisfont à la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists K_1 \in \mathbb{R}, (\forall x \in I_1, \quad G(x) = F_1(x) + K_1) \\ \exists K_2 \in \mathbb{R}, (\forall x \in I_2, \quad G(x) = F_2(x) + K_2) \end{array} \right.$$

On peut faire une remarque analogue si l'ensemble de définition de f est la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de $\mathbb{R}$ disjoints.

Dans ce cas, nous appelons simplement primitive de f toute fonction F dont la restriction à chacun de ces intervalles est une primitive de f sur cet intervalle.

Calcul de primitives.

Primitives des fonctions usuelles.

2.4 Soient n un entier naturel non nul, r un nombre rationnel différent de -1 , k un entier rationnel, et (a, b) un élément de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Le calcul des dérivées des fonctions usuelles permet d'établir le tableau suivant dans lequel F est une primitive de f sur I .

f	I	F
$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto b$
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax$
$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto x^r$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$	$x \mapsto \operatorname{tg} x$
$x \mapsto \frac{-1}{\sin^2 x}$	$]k\pi, \pi + k\pi[$	$x \mapsto \operatorname{cotg} x$

Remarque : Si le rationnel r appartient à l'ensemble $\mathbb{Z} - \{-1\}$, la fonction $x \mapsto x^r$ admet une primitive sur chacun des intervalles disjoints $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1}$.

Exemples.

1. Une primitive de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$.
2. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\frac{2}{x^2}$. La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est définie par $x \mapsto -\frac{2}{x^2} + K$ avec $-2 + K = 0$; c'est donc la fonction $x \mapsto 2\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right)$.
3. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est aussi $x \mapsto -\frac{2}{x^2}$. La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ qui s'annule en -2 est définie par $x \mapsto -\frac{2}{x^2} + K$ avec $-\frac{2}{4} + K = 0$; c'est donc la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}$. La fonction $F : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ainsi que la fonction G définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
 $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = F(x) + 2)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*, G(x) = F(x) + \frac{1}{2})$.
 Remarquons qu'il n'existe pas de réel K tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = F(x) + K$.

4. La primitive de : $x \mapsto \cos \frac{\pi}{4} x$ qui est égale à 1 en 2 est définie par

$$x \mapsto \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} x + K \text{ avec } \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} + K = 1.$$

$$\text{C'est donc la fonction } x \mapsto \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} x + 1 - \frac{4}{\pi}.$$

Remarque : Le calcul des dérivées ne permet pas de trouver une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

L'étude d'une telle primitive fera l'objet du chapitre 11.

Opérations sur les primitives.

2.5 Les résultats suivants sont des conséquences des propriétés données dans le paragraphe 2.2 du chapitre 7.

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition contiennent un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et qui sont dérivables sur I , de dérivées respectives f' et g' . Soient λ un réel et r un rationnel différent de -1 . On a alors les propriétés suivantes :

$$f + g \text{ est une primitive sur } I \text{ de } f' + g' \quad (1)$$

$$\lambda f \text{ est une primitive sur } I \text{ de } \lambda f' \quad (2)$$

$$fg \text{ est une primitive sur } I \text{ de } f'g + fg' \quad (3)$$

$$\text{Si } \frac{1}{g} \text{ est définie sur } I, \text{ alors } \frac{f}{g} \text{ est une primitive sur } I \text{ de } \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (4)$$

$$\text{Si } f^r \text{ est définie sur } I, \text{ alors } \frac{f^{r+1}}{r+1} \text{ est une primitive sur } I \text{ de } f^r f' \quad (5)$$

Exemples.

1. Cherchons une primitive de $f : x \mapsto 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Il résulte du paragraphe 2.4 et des résultats (1) et (2) qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - x; \text{ cette primitive est celle qui s'annule en } 0.$$

2. Cherchons une primitive de $h : x \mapsto \sin x + x \cos x$.

L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

Désignons par f la fonction $x \mapsto x$ et par g la fonction $x \mapsto \sin x$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x + x \cos x = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$.

Une primitive de h est donc la fonction : $x \mapsto f(x) g(x)$, c'est-à-dire la fonction : $x \mapsto x \sin x$.

3. Cherchons une primitive de $h : x \mapsto \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}^*$. Désignons par f la fonction $x \mapsto \sin x$ et par g la fonction $x \mapsto x$.

$$\text{On a alors : } \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$,

c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

4. Cherchons une primitive de $h : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$.

L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

Désignons par f la fonction $x \mapsto 2 + \sin x$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}} = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = f'(x) \cdot [f(x)]^{-\frac{1}{2}}. \text{ Une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est donc}$$

la fonction $x \mapsto \frac{[f(x)]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto 2\sqrt{2 + \sin x}$.

5. Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \cos^2 x$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

Calcul d'intégrales.

2.6 Il résulte de la propriété P_4 du paragraphe 2.3 que, si f est continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f sur $[a, b]$, on a : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

On écrit :

$$\boxed{\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b}$$

On utilise les résultats des paragraphes 2.4 et 2.5 pour calculer une primitive de f sur $[a, b]$, comme le montrent les exemples suivants :

Exemples.

1. Calculons $\int_0^1 (x-2)^2 dx$.

On a :

$$\int_0^1 (x-2)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 4 = \frac{7}{3}$$

2. Calculons $\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin x \cos^3 x dx$.

$$\text{On a : } \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin x \cos^3 x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\sin x) \cos^3 x dx.$$

Une primitive de $x \mapsto (-\sin x) \cos^3 x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ est $x \mapsto \frac{\cos^4 x}{4}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin x \cos^3 x dx &= \left[\frac{\cos^4 x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} \left(\cos^4 \frac{\pi}{3} - \cos^4 0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} - 1 \right) = -\frac{15}{64}. \end{aligned}$$

3. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et par suite : } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \, dx &= \left[\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{8} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{32} \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{64} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3}}{64}. \end{aligned}$$

4. Calculons $\int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)^3} \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)^3} \, dx &= \int_1^3 \frac{x+1}{(x+1)^3} \, dx + \int_1^3 \frac{2}{(x+1)^3} \, dx \\ &= \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2} \, dx + \int_1^3 \frac{2}{(x+1)^3} \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^3 + \left[-\frac{1}{(x+1)^2} \right]_1^3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Intégration par parties.

2.7 THÉORÈME : Soient f et g deux fonctions dérivables sur le segment $[a, b]$ et soient f' et g' leurs fonctions dérivées respectives sur $[a, b]$.

La propriété suivante est vérifiée :

$$\forall x \in [a, b], \int_a^x f'(t) g(t) \, dt = \left[f(t) g(t) \right]_a^x - \int_a^x f(t) g'(t) \, dt.$$

Démonstration :

Du paragraphe 2.5, il résulte que la fonction $t \mapsto f(t) g(t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto f'(t) g(t) + f(t) g'(t)$ sur $[a, b]$ et en particulier sur tout segment $[a, x]$ inclus dans $[a, b]$.

$$\text{On a donc : } \forall x \in [a, b], \int_a^x [f'(t) g(t) + f(t) g'(t)] \, dt = \left[f(t) g(t) \right]_a^x$$

$$\text{et par suite : } \forall x \in [a, b], \int_a^x f'(t) g(t) \, dt + \int_a^x f(t) g'(t) \, dt = \left[f(t) g(t) \right]_a^x. \quad \blacksquare$$

On a, en particulier :

$$\boxed{\int_a^b f'(t) g(t) \, dt = \left[f(t) g(t) \right]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) \, dt \quad (1)}$$

On dit que l'on fait une **intégration par parties** lorsque, pour calculer $\int_a^b f'(t) g(t) \, dt$, on applique (1) et on cherche une primitive de la fonction $t \mapsto f(t) g'(t)$ au lieu de chercher directement une primitive de la fonction $t \mapsto f'(t) g(t)$.

Cette méthode est profitable lorsque les primitives de la fonction $t \mapsto f(t) g'(t)$ sont plus faciles à trouver que celles de la fonction $t \mapsto f'(t) g(t)$.

Exemples.

1. Calculons, pour tout réel strictement positif x , le réel $A(x) = \int_0^x t \cos t \, dt$.

Désignons par f la fonction $t \mapsto \sin t$ et par g la fonction $t \mapsto t$.

Nous avons alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = \cos t$ et $g'(t) = 1$.

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad A(x) &= \left[t \sin t \right]_0^x - \int_0^x 1 \cdot \sin t \, dt = x \sin x - \left[-\cos t \right]_0^x \\ &= x \sin x + \cos x - 1. \end{aligned}$$

2. Calculons $\int_0^1 x \sqrt{1-x} \, dx$.

Désignons par f la fonction $x \mapsto -\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ et par g la fonction $x \mapsto x$.

On a alors : $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) = \sqrt{1-x}$ et $g'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite nous avons : } \int_0^1 x \sqrt{1-x} \, dx &= \left[\frac{-2x(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \, dx \\ &= 0 + \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{-2(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times 1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Application à la recherche de limites.

2.8 Il résulte de la propriété P_8 du paragraphe 1.13 que, si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, la suite de terme général : $s_n = \frac{b-a}{n} \left(f(a) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right)$ est convergente et a pour limite $\int_a^b f(x) \, dx$. Voici deux exemples de telles suites.

Exemples.

→ 1. A l'aide de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, calculons la limite de la suite de terme

$$\text{général } s_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2} \right].$$

Posons $a = 1$ et $b = 2$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b f(x) \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

→ 2. A l'aide de la fonction $f : x \mapsto \sin x$, calculons la limite de la suite de terme

$$\text{général : } s_n = \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

Posons $a = 0$ et $b = \pi$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b f(x) \, dx = \int_0^\pi \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

3. Calculs d'aires.

Dans ce paragraphe, nous désignons par P un plan euclidien, par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de ce plan, par Ox et Oy les axes de ce repère. Toutes les coordonnées des points sont données dans ce repère. Nous savons déjà calculer l'aire de certains sous-ensembles du plan : carré, rectangle, cercle. Nous donnons ici une méthode pour calculer l'aire de certains autres sous-ensembles de P . Nous commençons par préciser la notion d'aire.

Notion d'aire.

3.1 Nous admettons qu'il existe un sous-ensemble non vide de l'ensemble $\mathcal{I}(P)$ des parties de P , noté Q , appelé **ensemble des parties quarrables de P** et une application $\mathcal{A}$ de Q dans $\mathbb{R}_+$ qui, à tout ensemble quarrable E de P , associe son aire $\mathcal{A}(E)$.

L'ensemble Q et l'application $\mathcal{A}$ satisfont, en particulier, aux propriétés suivantes :

- $\forall (E_1, E_2) \in Q \times Q, (E_1 \cup E_2 \in Q \text{ et } E_1 \cap E_2 \in Q \text{ et } E_1 - E_2 \in Q)$
- $\forall (E_1, E_2) \in Q \times Q, ((E_1 \cap E_2 = \emptyset) \implies (\mathcal{A}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{A}(E_1) + \mathcal{A}(E_2)))$ (propriété d'additivité).

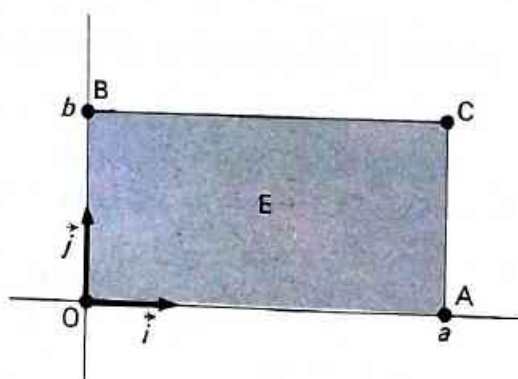
- Soit f une isométrie de P .

$\forall E \in Q, (f(E) \in Q \text{ et } \mathcal{A}(f(E)) = \mathcal{A}(E)).$

- Pour tout couple (A, B) de $P \times P$, le segment $[A, B]$ et l'ensemble $[A, B] - \{A, B\}$, noté $]A, B[$, sont quarrables et d'aire nulle.

- Soient a et b deux réels strictement positifs.

L'ensemble E des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$ est quarrable et l'on a : $\mathcal{A}(E) = ab$.



Remarques : 1. Soit E' l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $(0 < x < a \text{ et } 0 < y < b)$. Désignons par A, B, C les points de P de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. L'ensemble E est alors la réunion de l'ensemble E' et des ensembles $[O, A],]O, B[,]A, C[, [B, C]$. Ce sont des sous-ensembles deux à deux disjoints de P .

On a alors :

$$\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(E') + \mathcal{A}([O, A]) + \mathcal{A}([O, B]) + \mathcal{A}([A, C]) + \mathcal{A}([B, C]).$$

Les quatre derniers termes sont nuls; on a donc : $\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(E')$.

Si a n'est pas égal à b , on appelle traditionnellement l'ensemble E un rectangle de longueur $\sup(a, b)$ et de largeur $\inf(a, b)$ et l'ensemble E' un rectangle dont les côtés sont exclus.

Si a est égal à b , on appelle traditionnellement l'ensemble E un carré de longueur du côté a et l'ensemble E' un carré dont les côtés sont exclus.

L'aire du rectangle (resp. du carré) dont les bords sont exclus est égale à l'aire du rectangle (resp. du carré) dont les bords sont inclus. Il en est de même si seuls certains côtés sont exclus.

2. On démontre, à l'aide des propriétés énoncées ci-dessus, que l'aire d'un triangle est égale au produit de la longueur d'un côté par la longueur de la hauteur issue du sommet opposé au côté considéré.

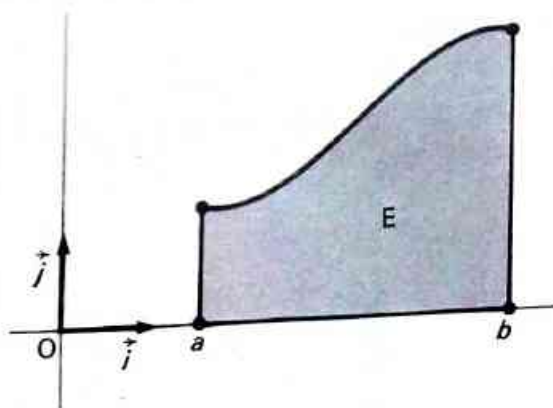
Utilisation de l'intégrale de Riemann pour les calculs d'aires.

Nous admettons le théorème suivant :

3.2 THÉORÈME : Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et positive sur $[a, b]$.

L'ensemble E des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ est quarrable et l'on a : } \mathcal{A}(E) = \int_a^b f(x) dx.$$



Remarques : 1. Des hypothèses : ($a < b$ et $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$) et de la propriété P_2 du paragraphe 1.13, il résulte que le réel $\int_a^b f(x) dx$ appartient à $\mathbb{R}_+$.

2. On a aussi la propriété suivante : l'aire de l'ensemble E' des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $\begin{cases} a < x < b \\ 0 < y < f(x) \end{cases}$ est égale à $\int_a^b f(x) dx$.

3. Supposons que f soit une fonction en escalier sur $[a, b]$ et désignons par $S = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision de $[a, b]$ associée à f et par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des n intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$. La fonction f est positive sur $[a, b]$; on a donc : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$.

L'ensemble E des points M dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ est la réunion d'un nombre fini de segments et des n rectangles E_i d'éléments

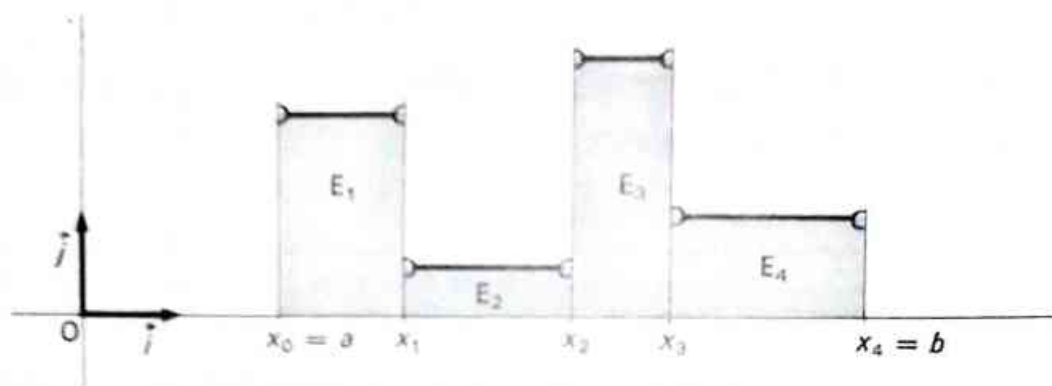
les points M dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à : $\begin{cases} x_{i-1} < x < x_i \\ 0 \leq y \leq \lambda_i \end{cases}$

Ces sous-ensembles sont deux à deux disjoints; on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathcal{A}(E_i) = \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\text{et par suite : } \mathcal{A}(E) = \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(E_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Nous avons donc démontré le théorème 3.2 dans ce cas particulier.

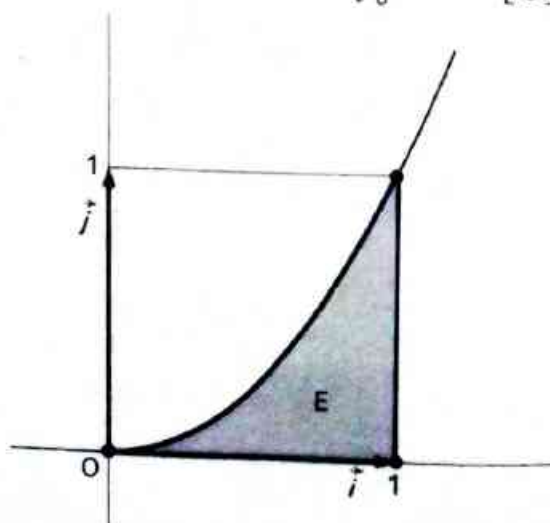


Exemples.

1. Calculons l'aire de l'ensemble E des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

satisfont à : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2. \end{cases}$

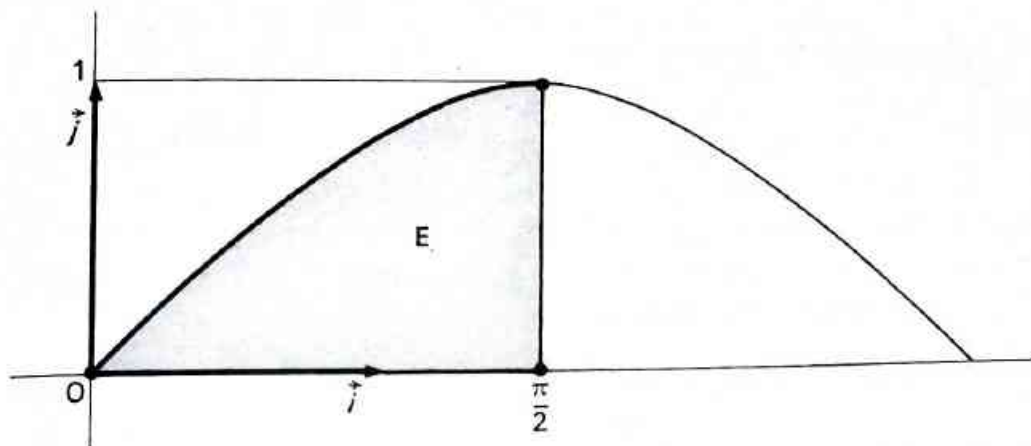
Il résulte du théorème 3.2 que l'on a : $\mathcal{A}(E) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$



2. Calculons l'aire de la partie E du plan P limitée par l'axe Ox, l'axe Oy, la droite d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sin x$.

Il résulte du théorème 3.2 que l'on a :

$$\mathcal{A}(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \quad \checkmark$$

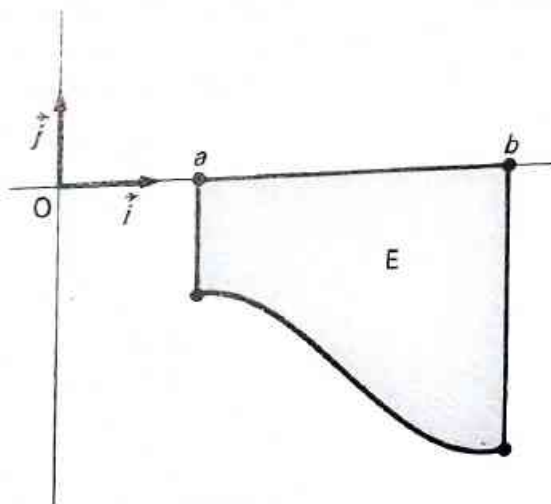


On a aussi le théorème suivant :

3.3 THÉORÈME : Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et négative sur $[a, b]$.

L'ensemble E des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases} \text{ est quarrable et l'on a : } \mathcal{A}(E) = - \int_a^b f(x) \, dx.$$



Démonstration :

Soit s la symétrie axiale de P d'axe Ox; cherchons l'image de E par s .

Soit M_0 un point quelconque de E, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; son image par s a pour

coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$.

Des inégalités : $\begin{cases} a \leq x_0 \leq b \\ f(x_0) \leq y_0 \leq 0 \end{cases}$ il résulte les inégalités : $\begin{cases} a \leq x_0 \leq b \\ 0 \leq -y_0 \leq -f(x_0). \end{cases}$

Appelons E' l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfont à :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq -f(x). \end{cases}$$

Le point $s(M_0)$ appartient à E' ; on a donc : $s(E) \subset E'$.

Soit maintenant M_1 un point quelconque de E' , de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; le point M_1 est l'image par s du point M_2 de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$.

Des inégalités : $\begin{cases} a \leq x_1 \leq b \\ 0 \leq y_1 \leq -f(x_1), \end{cases}$ il résulte les inégalités : $\begin{cases} a \leq x_1 \leq b \\ f(x_1) \leq -y_1 \leq 0; \end{cases}$

le point M_2 appartient à E ; on a donc : $E' \subset s(E)$.

Des inclusions : $s(E) \subset E'$ et $E' \subset s(E)$, il résulte que l'on a : $s(E) = E'$.

L'application s est une isométrie de P ; on a donc : $\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(s(E)) = \mathcal{A}(E')$.

La fonction $(-f)$ est positive sur $[a, b]$.

Du théorème 3.2, il résulte alors que l'on a : $\mathcal{A}(E') = \int_a^b (-f)(x) dx$

et par suite : $\mathcal{A}(E) = - \int_a^b f(x) dx$. ■

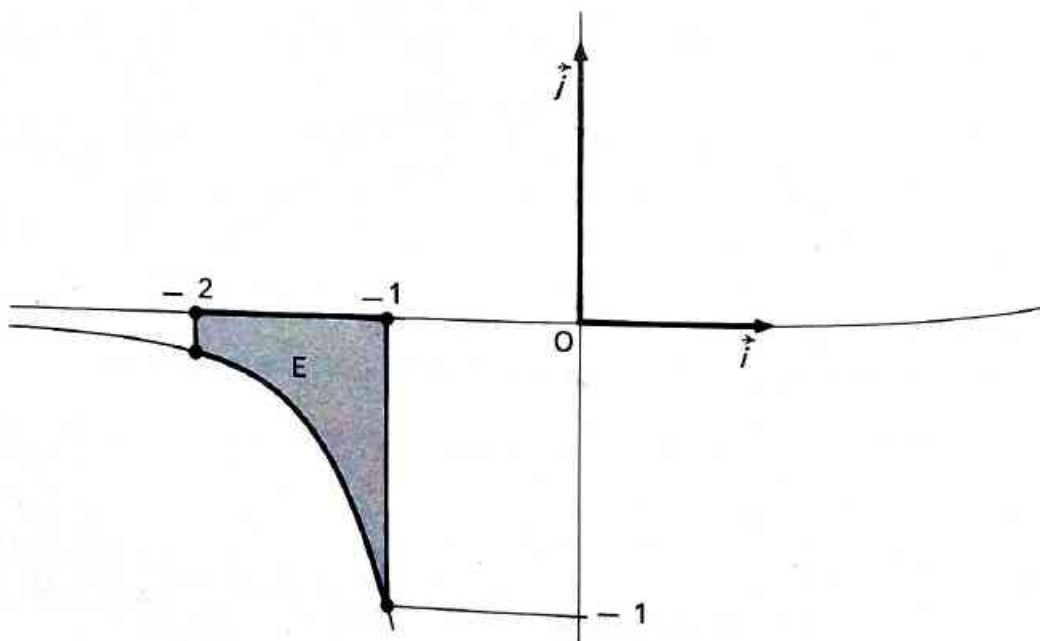
Exemples.

1. Calculons l'aire de l'ensemble E des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

satisfont à : $\begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{x^3} \leq y \leq 0. \end{cases}$

Du théorème 3.3, il résulte que l'on a :

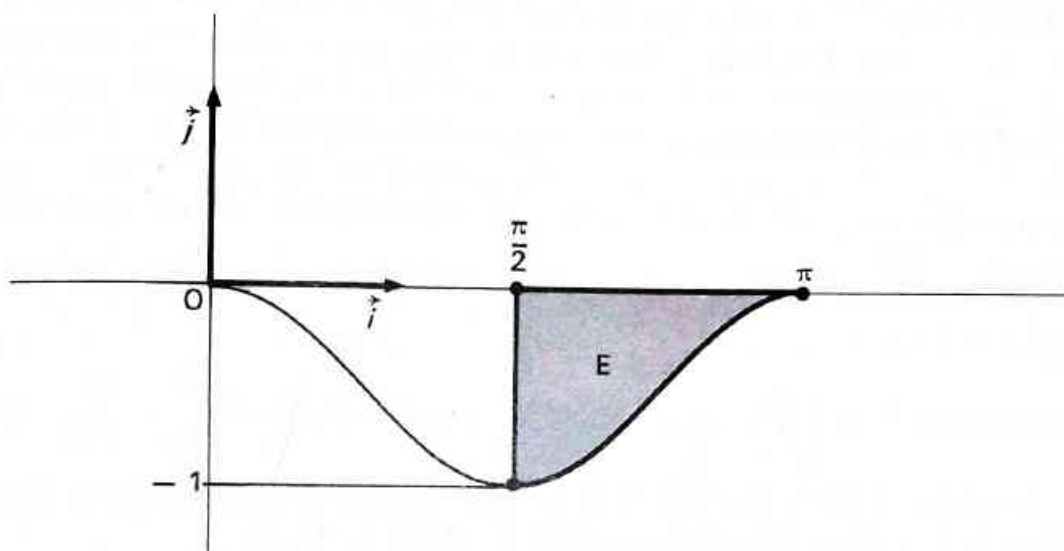
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = - \left[\frac{-2}{x^2} \right]_{-2}^{-1} = - \left(-2 + \frac{2}{4} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$



2. Calculons l'aire E de la partie du plan P limitée par l'axe Ox , les droites d'équations respectives : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$ et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -\sin^2 x$.

Du théorème 3.3, il résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} (\sin 2\pi - \sin \pi) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



Remarque : Dans certains problèmes, notamment au baccalauréat, on suppose que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont orthogonaux et on indique les normes de chacun de ces vecteurs, exprimées par exemple en centimètres. On demande alors d'exprimer l'aire en centimètres-carrés.

Si l'on a par exemple : $\|\vec{i}\| = a \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = b \text{ cm}$, l'unité d'aire est égale à $ab \text{ cm}^2$.

Exemples.

1. Reprenons l'exemple 1 ci-dessus.

Supposons que l'on ait : $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$, $\|\vec{j}\| = 3 \text{ cm}$ et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient orthogonaux.

Nous avons obtenu : $\mathcal{A}(E) = \frac{3}{2}$. L'unité d'aire est 6 cm^2 .

Exprimée en cm^2 , l'aire calculée est égale à $\frac{3}{2} \times 6$, c'est à dire 9 cm^2 .

2. Reprenons l'exemple 2 ci-dessus.

Supposons que l'on ait : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient orthogonaux.

Nous avons obtenu : $\mathcal{A}(E) = \frac{\pi}{4}$. L'unité d'aire est 4 cm^2 .

Exprimée en cm^2 , l'aire calculée est donc égale à π .

Applications.

3.4 • Soit E un sous-ensemble de P égal à la différence de deux sous-ensembles quarrables E_1 et E_2 de P , dont on sait calculer les aires respectives $\mathcal{A}(E_1)$ et $\mathcal{A}(E_2)$. L'ensemble E_1 est la réunion des deux ensembles disjoints E et E_2 , et il résulte de la propriété d'additivité de l'application $\mathcal{A}$ que l'on a :

$$\mathcal{A}(E_1) = \mathcal{A}(E) + \mathcal{A}(E_2) \quad \text{et, par suite : } \mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(E_1) - \mathcal{A}(E_2).$$

• Soient f une fonction intégrable sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et E la partie du plan limitée par l'axe Ox , les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f . Il résulte des théorèmes 3.2 et 3.3 et de la propriété d'additivité de l'application $\mathcal{A}$ que l'on peut calculer $\mathcal{A}(E)$ si f satisfait à la propriété suivante : il existe une subdivision $S = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, la fonction f garde un signe constant sur $]x_{i-1}, x_i[$; pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, la partie E_i du plan limitée par l'axe Ox , les droites d'équations respectives $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$ et la courbe représentative de f est quarrable et l'on a :

$$\mathcal{A}(E_i) = \varepsilon_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad \text{avec } \varepsilon_i = +1 \text{ (resp. } \varepsilon_i = -1) \text{ si } f \text{ est positive (resp. négative) sur }]x_{i-1}, x_i[.$$

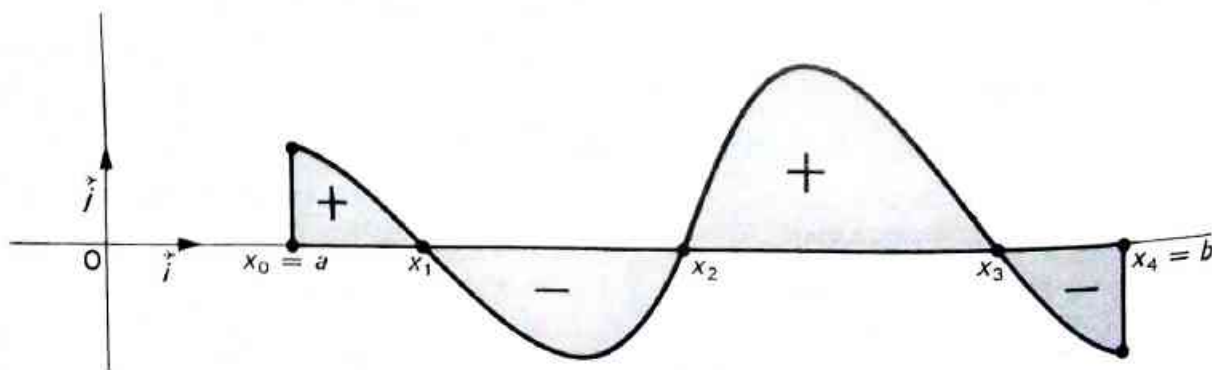
L'ensemble $E' = \bigcup_{i=1}^n E_i$ est quarrable et l'on a : $\mathcal{A}(E') = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$.

L'ensemble E est la réunion de E' et d'un nombre fini de segments. Ces ensembles sont deux à deux disjoints; on a donc : $\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(E')$.

Le réel $\mathcal{A}(E)$ est alors, en général, différent du réel $\int_a^b f(x) dx$.

On appelle **aire algébrique de E** le réel $\int_a^b f(x) dx$ et, pour éviter les confusions, **aire géométrique de E** , le réel $\mathcal{A}(E)$. On appelle aussi parfois, à tort, **aire arithmétique de E** , le réel $\mathcal{A}(E)$. L'aire arithmétique n'est pas alors en général égale à la valeur absolue de l'aire algébrique.

Lorsqu'aucune précision n'est donnée, il s'agit toujours de l'aire géométrique.



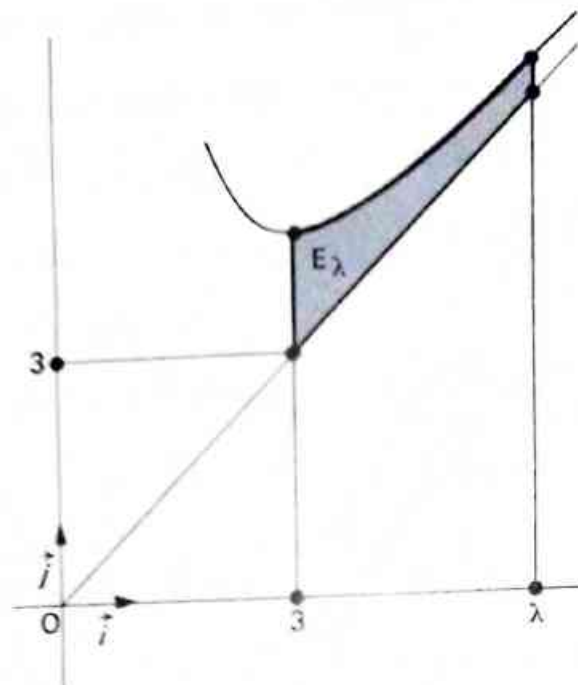
• Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et qui ne gardent pas un signe constant sur ce segment. Supposons, par exemple, que l'on ait : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$; désignons par m un minorant (strictement négatif) de l'ensemble $f([a, b]) \cup g([a, b])$ et par E l'ensemble des points M de P dont les

L'ensemble E_λ est égale à la différence de l'ensemble $E_{1\lambda}$ et de l'ensemble $E_{2\lambda}$.

$$\text{On a : } \mathcal{A}(E_{1\lambda}) = \int_3^\lambda \frac{2x^3 + 27}{2x^2} dx \text{ et } \mathcal{A}(E_{2\lambda}) = \int_3^\lambda x dx$$

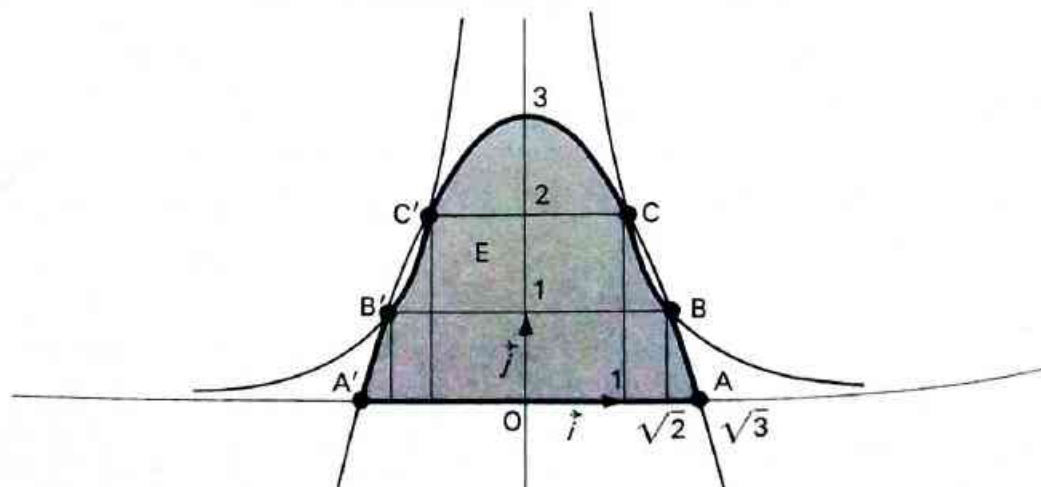
$$\begin{aligned} \text{et par suite : } \mathcal{A}(E_\lambda) &= \int_3^\lambda \frac{2x^3 + 27}{2x^2} dx - \int_3^\lambda x dx = \int_3^\lambda \left(x + \frac{27}{2x^2} - x \right) dx \\ &= \int_3^\lambda \frac{27}{2x^2} dx = \frac{27}{2} \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_3^\lambda = \frac{27}{2} \left[-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{On a aussi : } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(E_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{27}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{27}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{9}{2}.$$



2. Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{2}{x^2}$ et $g : x \mapsto -x^2 + 3$.

Désignons par A (resp. A') le point d'intersection d'abscisse positive (resp. négative) de la courbe représentative de g et de l'axe Ox, et par B', C', C, B les points d'intersection, rangés par ordre d'abscisses croissantes, des courbes représentatives de f et de g . Cherchons l'aire de la partie du plan représentée en grisé sur la figure ci-dessous.



Il résulte de la parité des fonctions f et g que l'ensemble E est la réunion de deux ensembles disjoints symétriques par rapport à l'axe Oy et d'un segment. Désignons par E' celui de ces ensembles constitué des points d'abscisses positives. On a alors : $\mathcal{A}(E) = 2 \mathcal{A}(E')$. Cherchons les abscisses des points A, B, C .

L'abscisse x_A de A est solution du système : $\begin{cases} -x^2 + 3 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$; on a donc : $x_A = \sqrt{3}$

Les abscisses x_B et x_C de B et de C sont solutions du système : $\begin{cases} -x^2 + 3 = \frac{2}{x^2} \\ x > 0 \end{cases}$

$$\text{On a : } \begin{cases} -x^2 + 3 = \frac{2}{x^2} \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^4 + 3x^2 - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

et par suite : $x_C = \sqrt{2}$ et $x_B = 1$. On a alors :

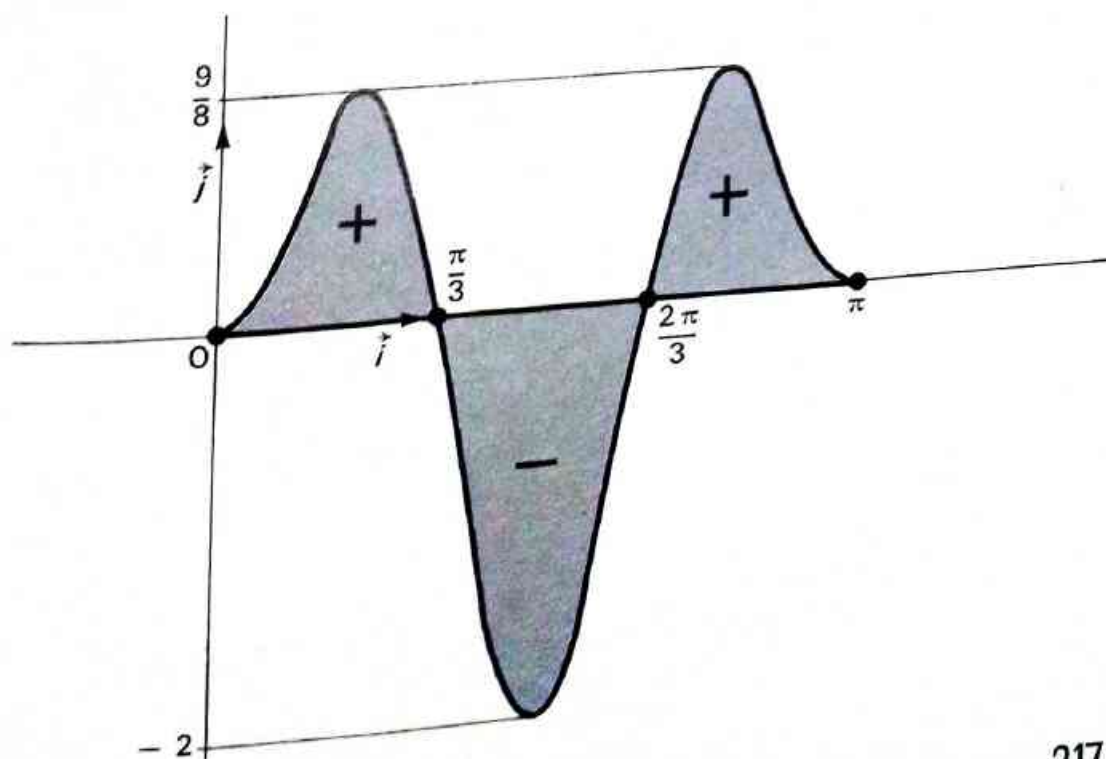
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E') &= \int_0^1 (-x^2 + 3) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2} dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (-x^2 + 3) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{x} \right]_1^{\sqrt{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + 2 \right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 3\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{14}{3} - \frac{10}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = \frac{2}{3}(7 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

et par suite : $\mathcal{A}(E) = \frac{4}{3}(7 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$.

Une valeur approchée à 10^{-3} près de $\mathcal{A}(E)$ est 6,833.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \cos 2x - \cos 4x$. Calculons l'aire de la partie E du plan limitée par l'axe Ox , l'axe Oy , la droite d'équation $x = \pi$ et la courbe représentative de f .

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la courbe représentative C de f entre 0 et π est celle dessinée dans la figure ci-dessous.



Les points d'intersection de C et de Ox ont pour abscisses respectives, $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ et les trois extrema ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{9}{8}\right), \left(\frac{\pi}{2}, -2\right), \left(\pi - \frac{\alpha}{2}, \frac{9}{8}\right)$

où α est le réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui satisfait à : $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

La fonction f est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, négative sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ et positive sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. On a alors :

$$\mathcal{A}(E) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} f(x) dx.$$

La fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x$ est une primitive de f sur $[0, \pi]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= \left(F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)\right) - \left(F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \left(F(\pi) - F\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= F(\pi) - 2F\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) \\ &= 0 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - 0 \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Une valeur approchée de $\mathcal{A}(E)$ est 2,598.

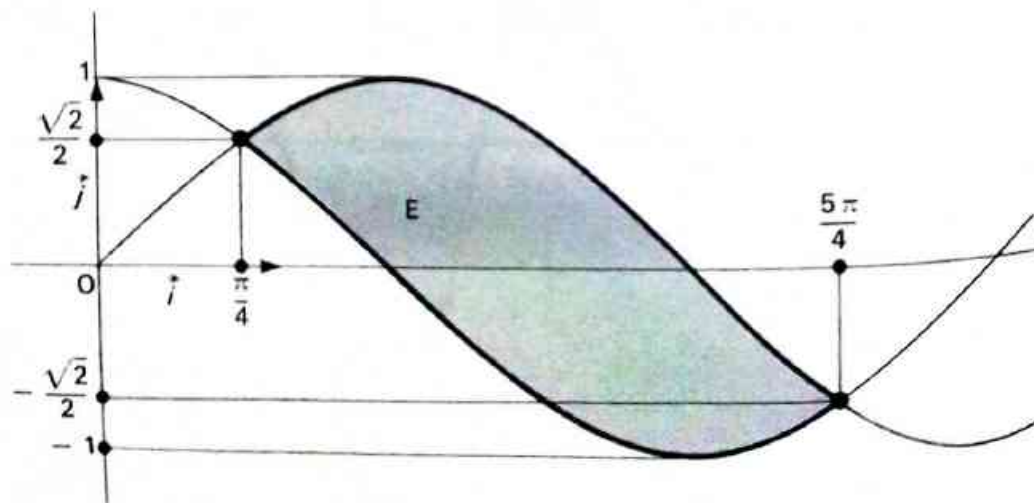
L'aire algébrique de E est égale à : $\int_0^{\pi} (\cos 2x - \cos 4x) dx$ c'est-à-dire à :

$$F(\pi) - F(0) = 0.$$

4. Soient les fonctions $f : x \mapsto \sin x$ et $g : x \mapsto \cos x$.

Calculons l'aire de l'ensemble E des points M de P dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satis-

$$\text{font à : } \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \\ g(x) \leq y \leq f(x). \end{cases}$$



On a : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], g(x) \leq f(x)$ et par suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Une valeur approchée de $\mathcal{A}(E)$ est 2,828.

EXERCICES

Intégrale de Riemann.

◆ Dans les exercices suivants (nos 1 à 5 et 8 à 11), on désigne par a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$.

1 Démonstration de la propriété P_1 du paragraphe 1.7.

1° Soient α un réel quelconque et f une fonction en escalier quelconque sur $[a, b]$. Démontrer que si $S = (x_0, \dots, x_n)$ est la subdivision de $[a, b]$ associée à f (cf. paragraphe 1.3), alors S est aussi la subdivision de $[a, b]$ associée à αf .

En déduire l'égalité : $\int_a^b (\alpha f)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.

2° Soient f et g deux fonctions quelconques en escalier sur $[a, b]$.

Démontrer qu'il existe une subdivision S de $[a, b]$ sur laquelle f et g sont étagées (cf. paragraphe 1.3). Utiliser le résultat du paragraphe 1.6 pour démontrer l'égalité :

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2 Démonstration de la propriété P_2 du paragraphe 1.7.

1° Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ qui satisfait, de plus, à la propriété suivante : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$. Soient $S = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision de $[a, b]$ associée à f et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$.

Démontrer que l'on a : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2° Utiliser la première question pour démontrer que, si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que l'on ait : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$,

alors on a : $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

3 Démonstration de la propriété P_3 du paragraphe 1.7. Soit f une fonction escalier sur $[a, b]$; nous désignons par $S = (x_0, \dots, x_n)$ la subdivision de $[a, b]$ associée à S et par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs respectives de f sur chacun des intervalles $]x_0, x_1[, \dots,]x_{n-1}, x_n[$.

1° Démontrer que $|f|$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ qui satisfait à :

$$\int_a^b |f|(x) dx \geq 0.$$

2° Démontrer que $-|f|$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad -|f|(x) \leq f(x) \leq |f|(x).$$

Utiliser l'exercice n° 2 pour démontrer l'inégalité suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx.$$

4 Démonstration de la propriété P_4 du paragraphe 1.13 pour une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et c un point de $]a, b[$.

1° Démontrer que f est une fonction en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

2° Soit S la subdivision de $[a, b]$ associée à f (cf. paragraphe 1.3).

Posons : $S' = S \cup \{c\} = (x_0, \dots, x_n)$; soit p l'entier de $\{0, \dots, n\}$ tel que l'on ait : $x_p = c$.

Démontrer que f est étagée sur $(x_0, \dots, x_p)$ et sur $(x_p, \dots, x_n)$ (cf. paragraphe 1.3).

$$\text{En déduire l'égalité suivante : } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5 Démonstration de la propriété P_5 du paragraphe 1.13 pour une fonction en escalier.

Soit f une fonction en escalier, bornée sur $[a, b]$ et soient m et M deux réels tels que l'on ait : $\forall x \in [a, b], \quad m \leq f(x) \leq M$.

Désignons par g et h les fonctions respectives : $g : x \mapsto m$ et $h : x \mapsto M$.

Utiliser l'exercice n° 2 pour démontrer que l'on a :

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$$

$$\text{et par suite : } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

6 1° Donner un exemple de fonction en escalier f paire sur $[-3, 3]$.

$$\text{Calculer : } \int_{-3}^{+3} f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^3 f(x) dx.$$

$$\text{Vérifier l'égalité : } \int_{-3}^{+3} f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx.$$

2° Soit a un réel strictement positif.

Démontrer que si f est une fonction paire, en escalier sur $[-a, +a]$, alors on a :

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

7 1° Donner un exemple de fonction en escalier f impaire sur $[-3, 3]$.

$$\text{Vérifier l'égalité : } \int_{-3}^{+3} f(x) dx = 0.$$

2° Soit a un réel strictement positif.

Démontrer que, si f est une fonction impaire en escalier sur $[-a, +a]$, alors on a :

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0.$$

* 8 1° Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, distincte de la fonction nulle sur $[a, b]$ et telle que l'on ait :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0.$$

a) Démontrer qu'il existe un segment $[c, d]$, inclus dans $[a, b]$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in [c, d], f(x) > 0.$$

b) Soit m la borne inférieure de f sur $[c, d]$; démontrer que l'on a :

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(d - c)$$

et par suite : $\int_a^b f(x) dx > 0$.

2° Soient f et g deux fonctions distinctes, continues sur $[a, b]$ et telles que l'on ait :

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x).$$

Utiliser la première question pour démontrer l'inégalité :

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$$

3° Trouver un exemple simple de fonctions f et g qui satisfont aux hypothèses de la deuxième question. Calculer leurs intégrales et vérifier (1).

9 Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[a, b]$.

1° Soit φ l'application de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \longmapsto \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

(On pourra utiliser l'exercice n° 8.)

2° Démontrer l'inégalité :

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right).$$

* 10 Cet exercice utilise les résultats des exercices 8 et 9.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ telles que l'on ait :

$$\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0.$$

1° La fonction nulle $\tilde{0}$ sur $[a, b]$ appartient-elle à $\mathcal{F}$?

$\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $[a, b]$?

2° Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}$.

Démontrer l'équivalence suivante :

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) dt = 0 \right) \iff (fg = \tilde{0}).$$

3° On suppose que $\mathcal{C}$ est muni du produit scalaire défini dans l'exercice n° 9.

a) Soit f une fonction de $\mathcal{F}$ telle que l'on ait : $\forall t \in [a, b], f(t) > 0$.

Démontrer que le seul élément de $\mathcal{C}$ orthogonal à f est la fonction nulle $\tilde{0}$.

b) Soit f une fonction de $\mathcal{F}$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \exists c \in]a, b[, f(c) = 0 \\ \forall t \in [a, b] - \{c\}, f(t) > 0. \end{cases}$$

Démontrer que le seul élément de $\mathcal{C}$ orthogonal à f est la fonction nulle $\tilde{0}$.

c) Soit f une fonction de $\mathcal{F}$ qui satisfait à la propriété suivante :

il existe un segment $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$ tel que l'on ait : $\forall t \in [c, d], f(t) = 0$.

Donner une condition suffisante pour qu'une fonction g de $\mathcal{C}$ soit orthogonale à f .

d) Trouver un exemple simple pour illustrer la question 3 c).

11 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

On suppose, de plus, que g possède la propriété suivante :

$(\forall x \in [a, b], g(x) \geq 0)$ et $(\exists x_0 \in [a, b], g(x_0) \neq 0)$.

On désigne par m et M la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a, b]$.

1° Démontrer les inégalités :

$$\forall x \in [a, b], mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

2° En déduire qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que l'on ait :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Primitives. Calculs d'intégrales.

12 1° Trouver un réel c de $[0, 1]$ tel que l'on ait : $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = c - \frac{1}{2}$.

Le réel c est-il unique ?

2° Mêmes questions avec l'égalité : $\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left(c - \frac{1}{2}\right)^2$.

◆ Dans les exercices suivants (nos 13 à 19), déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f admet des primitives et donner une primitive de f sur chacun des intervalles déterminés.

→ 13 $f: t \mapsto \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$

14 $f: x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3+2)^2}$

→ 15 $f: x \mapsto \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$

→ 16 $f: x \mapsto \frac{3x^2 \sin x - (x^3+1) \cos x}{\sin^2 x}$

17 $f: x \mapsto \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}$

→ 18 $f: t \mapsto \frac{(t-2)^5}{|t-2|}$

19 $f: t \mapsto \frac{|t+1|}{(t+1)^4}$

◆ Dans les exercices suivants (nos 20 à 29), déterminer la primitive, sur l'intervalle I de la fonction f , qui prend la valeur y_0 au point x_0 de I .

20 $f: x \mapsto \frac{x^5 + x^4 + 3x^2}{x^2}, \quad I =]0, +\infty[, \quad y_0 = 0, x_0 = 1.$

21 $f: x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x-1}, \quad I =]-\infty, 1[, \quad y_0 = 1, x_0 = 0.$

22 $f: x \mapsto \frac{x+2}{x^3+2x^2}, \quad I =]0, +\infty[, \quad y_0 = 1, x_0 = 2.$

23 $f: x \mapsto 3x^2(x^2+1) + 2x(x^3+1), \quad I =]-\infty, +\infty[, \quad y_0 = 0, x_0 = 0.$

$$24 \quad f': x \mapsto \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}, \quad I =]0, \frac{\pi}{2}[, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$25 \quad f': x \mapsto -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}, \quad I =]-\infty, 0[, \quad y_0 = -1, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$26 \quad f': x \mapsto \frac{2}{(3+2x)^3}, \quad I =]-\frac{3}{2}, +\infty[, \quad y_0 = 0, \quad x_0 = 0$$

$$\rightarrow 27 \quad f': x \mapsto \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+1)^4}, \quad I =]-1, +\infty[, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = 0$$

$$28 \quad f': x \mapsto \cos x \sin^4 x, \quad I =]-\infty, +\infty[, \quad y_0 = 0, \quad x_0 = \pi$$

$$\rightarrow 29 \quad f': x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad I =]0, \frac{\pi}{2}[, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

◆ Dans les exercices suivants (nos 30 à 41), calculer l'intégrale I.

$$30 \quad I = \int_0^2 \frac{dt}{(2+t)^2}$$

$$31 \quad I = \int_0^1 \frac{t \, dt}{(2+t^2)^2}$$

$$32 \quad I = \int_0^\pi \frac{2 \sin t \, dt}{(2+\cos t)^3}$$

$$33 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow 34 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x) \, dx$$

$$* 35 \quad I = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2x \, dx}{\cos^2 x^2}$$

$$36 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x \, dx$$

$$37 \quad I = \int_0^\pi \cos^3 x \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$$

$$38 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x + 2 \sin^2 x) \, dx$$

$$39 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x + \sin^3 x) \, dx$$

$$\rightarrow 40 \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(8 \cos^4 x + 7 \sin^2 x - \frac{13}{2} \right) dx$$

$$41 \quad I = \int_0^2 (1 - |x-1|^3) \, dx$$

42 1° Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x \, dx.$$

2° Vérifier les égalités : $I = J$ et $I + K = \frac{\pi}{4}$.

43 Soit λ un réel strictement positif.

1° Calculer : $I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{2x \, dx}{(x^2 + 1)^3}$.

2° Calculer la limite éventuelle de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

44 Mêmes questions que pour le n° 43 avec

$$I(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}} \, dx.$$

45 Soit la fonction $f: t \mapsto \int_0^t \left(4 \sin^4 x - \frac{3}{2}\right) dx$.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^+$, l'équation : $f(t) = 0$.

◆ Dans les exercices suivants (n°s 46 à 54), calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I .

46 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx.$

47 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx.$

48 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx.$

49 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \sin 2x \, dx.$

50 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x \, dx.$

51 $I = \int_0^{\pi} x \cos^3 x \, dx.$

52 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx.$

53 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx.$

Donner une valeur approchée de I à 0,001 près.

* 54 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx.$

Donner une valeur approchée de I à 0,001 près.

55 Soient I et J les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} x \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx.$$

Calculer $I + J$ et $I - J$; en déduire I et J .

56 Soient n un entier naturel et I_n l'intégrale égale à : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1° Calculer I_0, I_1, I_2 .

2° Démontrer la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad (1).$$

(On pourra utiliser une intégration par parties, éduite du calcul de la dérivée de la fonction : $t \mapsto \cos^n t \sin t$.)

3° En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}.$$

4° Montrer, à l'aide de (1), que pour tout entier naturel n le réel $(n+1) I_{n+1} I_n$ est indépendant de n .

Calculer ce nombre réel et en déduire, pour tout entier naturel n , une expression de I_{2n+1} en fonction de n .

57 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x^2}$.

1° Déterminer la primitive F de f , sur $]0, +\infty[$, qui s'annule en 2.

2° Démontrer, en énonçant avec précision le théorème utilisé, que la restriction de F à $[1, 3]$ est une bijection de $[1, 3]$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. Vérifier que cet intervalle contient 0. On note G la bijection réciproque de F . Déterminer l'image de 0 par G ainsi que le nombre dérivé en 0 de G , dont on justifiera l'existence.

58 Soit la fonction $f : x \mapsto x(x - E(x))$.

1° Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 3[$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soit k un entier naturel; calculer : $u_k = \int_k^{k+1} f(x) \, dx$.

Calculer $u_{k+1} - u_k$; en déduire que la suite finie $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

3° Calculer $\int_0^n f(x) \, dx$, pour tout entier naturel n . (Baccalauréat 1972.)

59 1° Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x - E(x)) \sin \frac{\pi}{2} x$ est périodique de période 4.

2° Calculer $\int_0^2 f(x) \, dx$.

60 1° Soit f l'application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que la droite d'équation : $x = \pi$ est un axe de symétrie.

$$\sin^2\left(\frac{\pi+x}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)$$

2° Soit la fonction $F: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \int_0^t f(x) dx.$$

Tracer la courbe représentative de F dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un centre de symétrie.

61 Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

62 A l'aide de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, calculer la limite de la suite de

terme général : $s_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}} \right).$

63 Même question que pour le n° 62 avec :

$$f: x \mapsto \cos^2 x \text{ et } s_n = \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

* 64 a) Même question que pour le n° 62 avec :

$$f: x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2} \text{ et } s_n = n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right).$$

b) Même question que pour le n° 62 avec :

$$f: x \mapsto \frac{1}{(1+x)^3} \text{ et } s_n = n^2 \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} \right).$$

c) Plus généralement, même question que pour le n° 62 avec $f: x \mapsto \frac{1}{(1+x)^p}$ où p est un entier naturel supérieur à 1 et

$$s_n = n^{p-1} \left(\frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} \right).$$

65 1° Soient f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et u et v deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

2° Application : $g: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

a) Les hypothèses de la première question sont-elles satisfaites ?

b) Calculer $g'(x)$ pour tout x réel.

c) Déterminer le sens de variation de g à l'aide du signe de g' .

66 Soit f l'application de $] -1, +\infty[$, définie par :

$$\forall x \in] -1, +\infty[, f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

1° Calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -1, +\infty[$.

Déterminer le sens de variation de f sur $] -1, +\infty[$, à l'aide du signe de f' .

2° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}.$

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrer les inégalités suivantes : $u_1 < 1$ et $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} < \int_1^n \frac{dt}{t^3}$.

En déduire que la suite (u_n) est majorée et, par suite, convergente.

→ 67 1° Calculer pour tout réel x positif $I(x) = \int_0^x t \sqrt{1-t^2} dt$.

2° Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel positif x , on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n \sqrt{1-t^2} dt.$$

a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-2}(x)$.

b) Que devient cette relation pour $x = 1$? En déduire $I_{2p}(1)$ et $I_{2p+1}(1)$.

* 68 1° Soit P un réel non nul. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période P et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f' est périodique de période P .

2° Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction

$x \mapsto \int_x^{x+P} f(t) dt$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est périodique de période P .

3° Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période P et continue sur $\mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ soient périodiques de période P .

4° Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin^2 x$ sont périodiques et continues sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de leurs primitives sur $\mathbb{R}$?

69 Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$.

Soient g une fonction continue sur $[a, b]$ et f une fonction croissante et à dérivée continue f' sur $[a, b]$.

1° Soit la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(b) G(b) - \int_a^b G(x) f'(x) dx.$$

2° Démontrer, à l'aide de l'exercice n° 11, qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que l'on ait l'égalité :

$$\int_a^b G(x) f'(x) dx = G(c) (f(b) - f(a)).$$

3° En déduire la proposition suivante :

$$\exists c \in [a, b], \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx.$$

4° Donner un exemple simple de fonctions f et g qui satisfont aux hypothèses de ce problème et écrire la formule obtenue.

70 Soient p et q deux entiers naturels.

On pose : $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1° Calculer, pour tout entier naturel p , l'intégrale $I_{p,0}$.

2° Démontrer la proposition suivante :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1, q-1}.$$

3° Calculer, à l'aide des deux premières questions, pour tout couple (p, q) de $\mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{p,q}$.

- * 71 1° Soit A un réel non nul et soit g une fonction qui est continue sur $[0, A[$ et qui possède la propriété suivante :
il existe une fonction ϵ , définie sur $[0, A[$ et ayant pour limite 0 en 0, un réel a non nul et un entier naturel n tel que l'on ait : $\forall x \in [0, A[, g(x) = ax^n + x^n \epsilon(x)$.

On pose, pour tout x de $[0, A[$: $G(x) = \int_0^x g(t) dt$.

Démontrer qu'il existe une fonction ϵ_1 , définie sur $[0, 1[$ et ayant une limite nulle en 0, un réel b non nul et un entier naturel p tel que l'on ait :

$$\forall x \in [0, A[, G(x) = bx^p + x^p \epsilon_1(x).$$

(On pourra utiliser l'exercice n° 11.)

2° Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur cet intervalle.

Soit la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$.

a) Démontrer que φ est définie sur $[0, +\infty[$ et satisfait à :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \varphi(x) \leq x.$$

b) Démontrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et croissante sur cet intervalle.

c) Démontrer qu'il existe une fonction F , définie sur $[0, +\infty[$, deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$, à dérivée seconde f'' continue sur $[0, +\infty[$ et telle que l'on ait :

$$F'' = f \text{ et } F(0) = F'(0) = 0.$$

Montrer que F est unique et que l'on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \varphi(x) = \frac{x F'(x) - F(x)}{F'(x)}.$$

d) Soit a un réel non nul et n un entier naturel.

On pose : $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = ax^n$. Déterminer φ .

e) Soit a un réel non nul, n un entier naturel et ϵ une fonction définie sur $[0, +\infty[$ telle que l'on ait : $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon = 0$. On pose : $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = ax^n + x^n \epsilon(x)$.

Déterminer φ .

Calculs d'aires.

◆ Dans les exercices suivants (nos 72 à 83), on désigne par P un plan affine réel euclidien et par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P . Toutes les coordonnées des points, toutes les équations des droites et des courbes sont données dans ce repère.

72 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe C et les droites d'équations respectives : $x = 3$ et $x = 5$.

73 Soit la fonction $f : x \mapsto 3 \sin x - 2 \sin^3 x$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

2° Trouver deux réels a et b tels que la fonction $x \mapsto a \cos x + b \cos^3 x$ soit une primitive de f sur $[0, \pi]$.

3° En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

satisfont à : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$

74 Soit la fonction $f: x \mapsto \cos^2 x \sin 2x$.

1° Étudier f et construire la partie C de sa courbe représentative dont les points ont une abscisse qui appartient à $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe C et les droites d'équations respectives: $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

75 Soit la fonction $f: x \mapsto x\sqrt{3-x}$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

2° Vérifier que la fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$ est une primitive de f sur son ensemble de définition.

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe C et les droites d'équations respectives: $x = 0$ et $x = 3$.

76 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{2x+2}$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

2° Soit λ un réel strictement positif; calculer l'aire $S(\lambda)$ de la partie du plan limitée par Ox , la courbe C , l'axe Oy et la droite d'équation: $x = \lambda$.

Déterminer la limite éventuelle de $S(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

77 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

2° Soit λ un réel strictement supérieur à 1. Calculer l'aire $S(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe C et les droites d'équations respectives:

$x = \lambda$ et $x = \lambda + 1$.

Déterminer la limite éventuelle de $S(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

78 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

2° Soit a un réel strictement supérieur à 3.

Calculer en cm^2 la mesure de l'aire $S(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C , la droite d'équation: $y = 1$ et les droites d'équations respectives:

$x = 3$ et $x = a$.

Déterminer la limite éventuelle de $S(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

79 Soit la fonction $f: x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$.

1° Trouver l'ensemble de définition D_f de f .

2° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

3° La droite D d'équation: $y = \frac{1}{2}x$ coupe C en O et en un point A . Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'arc de courbe OA de C et la corde $[O, A]$.

80 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$.

1° Étudier f et tracer sa courbe représentative C .

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations respectives: $x = 1$, $x = 3$, $y = x - 2$.

81 Soit la fonction $f: x \mapsto \cos x - \cos^2 x$.

1° Étudier f et tracer sa courbe représentative C sur $[0, \pi]$.

2° Soit A le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'arc OA de C et la corde $[O, A]$.

82 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x^2}$.

1° Étudier f et construire sa courbe représentative C .

2° Préciser la position de C par rapport à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation :
 $y = -x^2 + x$.

3° Soit a un réel strictement supérieur à 1. Calculer l'aire $S(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C , la parabole $\mathcal{P}$ et les droites d'équations respectives :
 $x = 1$ et $x = a$.

4° Déterminer à 0,01 près le réel a pour que l'on ait : $S(a) = \frac{5}{3}$.

83 Reprendre l'exercice n° 56 du chapitre 8.

Dans la 3° question, prendre $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

Calculer ensuite, en cm^2 , la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe Ox et par les droites d'équations respectives : $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

11.

Fonctions logarithmiques Fonctions exponentielles



indication: $\ln \equiv \text{Log}$
logarithme décimal $\equiv \log$

1. Fonctions logarithmiques.

De l'étude faite dans le chapitre 10, il résulte que nous connaissons, pour tout réel k et pour tout rationnel r différent de -1 , les primitives de la fonction $x \mapsto kx^r$.

Soit k un réel non nul. La fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ est continue sur tout intervalle $[a, b]$ qui ne contient pas 0 . Du théorème 1.12 du chapitre 10, il résulte que la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ est intégrable sur $[a, b]$ et par suite admet, sur cet intervalle, des primitives dont l'étude est l'objet de ce paragraphe.

Définition.

1.1 DÉFINITION : Soit k un réel non nul.

La primitive sur $]0, +\infty[$, qui s'annule en 1 , de la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ est appelée fonction logarithmique.

Cette fonction, que nous notons provisoirement f_k , est donc l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_k :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{k}{t} dt.$$

Propriétés.

1.2 Soit k un réel non nul. La fonction logarithmique f_k possède les propriétés suivantes :

P1 f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et a pour fonction dérivée sur cet intervalle la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$.

Cette propriété résulte du théorème 2.1 du chapitre 10.

P2 f_k est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f_k(xy) = f_k(x) + f_k(y)$.

Démonstration :

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction $g : y \mapsto f_k(xy)$. La fonction g est la composée de la fonction $y \mapsto xy$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction f_k dérivable sur $]0, +\infty[$; elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit g' la fonction dérivée de g sur $]0, +\infty[$.

$$\text{On a alors : } \forall y \in]0, +\infty[, \quad g'(y) = x f'_k(xy) = x \frac{k}{xy} = \frac{k}{y}.$$

La fonction g est donc une primitive sur $]0, +\infty[$ de fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$. De la propriété P_1 du paragraphe 2.3 du chapitre 10, il résulte qu'il existe un réel K tel que l'on ait :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad g(y) = f_k(xy) = f_k(y) + K.$$

On a en particulier : $g(1) = f_k(x) = f_k(1) + K$. Il résulte de la définition de f_k que l'on a : $f_k(1) = 0$. On a donc : $K = f_k(x)$ et par suite :

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad f_k(xy) = f_k(y) + f_k(x). \quad \blacksquare$$

Conséquences : 1. L'égalité $f_k(1) = 0$ traduit le fait que l'image par f_k de l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

2. De même soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^*$. L'image par f_k du symétrique pour la loi $\times$ de x est le symétrique pour la loi $+$ de $f_k(x)$. On a donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_k\left(\frac{1}{x}\right) = -f_k(x)$$

3. Il résulte de l'associativité de la loi $\times$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et de celle de la loi $+$ dans $\mathbb{R}$ que l'on a aussi : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad f_k(x_1 \dots x_n) = f_k(x_1) + \dots + f_k(x_n)$.

$$\mathbf{P3} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_k\left(\frac{x}{y}\right) = f_k(x) - f_k(y)$$

Démonstration :

On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_k\left(\frac{x}{y}\right) = f_k\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f_k(x) + f_k\left(\frac{1}{y}\right) = f_k(x) - f_k(y). \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{P4} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f_k(a^n) = n f_k(a)$$

Démonstration :

Soient a un réel strictement positif quelconque et n un entier rationnel quelconque. Il n'y a que trois cas possibles : $n = 0$, $n > 0$, $n < 0$.

$$\boxed{n = 0} \quad \text{On a : } f_k(a^0) = f_k(1) = 0 = 0 \cdot f_k(a).$$

$$\boxed{n > 0} \quad \text{On a : } f_k(a^n) = f_k(\underbrace{a \dots a}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f_k(a) + \dots + f_k(a)}_{n \text{ fois}} = n f_k(a).$$

$$\boxed{n < 0} \quad \text{Soit } n' \text{ le symétrique de } n \text{ pour la loi } +.$$

$$\text{On a : } f_k(a^n) = f_k(a^{-n'}) = f_k\left(\frac{1}{a^{n'}}\right) = -f_k(a^{n'}).$$

L'entier rationnel n' est positif; on a donc : $f_k(a^{n'}) = n' f_k(a)$ et par suite : $f_k(a^n) = -n' f_k(a) = n f_k(a)$. $\blacksquare$

P5 $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q}, f_k(a^r) = rf_k(a)$

Démonstration :

Soient a un réel strictement positif quelconque et r un élément quelconque de $\mathbb{Q}$.

Soit (p, q) un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $r = \frac{p}{q}$.

On a alors : $f_k(a^r) = f_k\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = f_k\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)$.

De la propriété P_4 il résulte que l'on a : $f_k(a^r) = pf_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$.

Calculons $f_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$.

On a : $f_k(a) = f_k\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = qf_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$, et par suite : $f_k\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}f_k(a)$.

On a finalement : $f_k(a^r) = \frac{p}{q}f_k(a) = rf_k(a)$. ■

Remarque : Cette propriété est une généralisation de la propriété P_4 .

Fonction logarithme népérien.

1.3 DÉFINITION : On appelle fonction logarithme népérien *, et on note Log la fonction logarithmique f_1 , c'est-à-dire l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \text{Log} : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

On emploie aussi quelquefois le symbole $\ln$ au lieu du symbole Log .

Pour tout réel strictement positif x , le réel $\text{Log } x$ est appelé le **logarithme népérien**

de x et on a : $\text{Log } x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

1.4 Les propriétés du paragraphe 1.2 s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{Log } 1 &= 0 \\ \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \text{Log } (ab) &= \text{Log } a + \text{Log } b \\ \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \text{Log } \frac{a}{b} &= \text{Log } a - \text{Log } b \\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad \text{Log } a^r &= r \text{Log } a \end{aligned}$$

Exemples.

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a : } \text{Log } \frac{2^7 \cdot 5^2}{3^4} &= \text{Log } (2^7 \cdot 5^2) - \text{Log } 3^4 \\ &= \text{Log } 2^7 + \text{Log } 5^2 - \text{Log } 3^4 \\ &= 7 \text{Log } 2 + 2 \text{Log } 5 - 4 \text{Log } 3. \end{aligned}$$

* John Neper, ou Napier, mathématicien écossais (1550-1617). Il a publié son ouvrage principal en 1614, où il choisit le nombre e comme base de son système de logarithmes.

2. Considérons la fonction $x \mapsto \text{Log}(x-2) - \text{Log}(2x+1) + \text{Log}(x+3)$. Cette fonction est définie pour tout réel x tel que l'on ait :

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x+1 > 0, \text{ c'est-à-dire : } \\ x+3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > -3 \end{cases}$$

L'ensemble de définition de f est $]2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \forall x \in]2, +\infty[, f(x) &= \text{Log}\left(\frac{x-2}{2x+1}\right) + \text{Log}(x+3) \\ &= \text{Log}\frac{(x-2)(x+3)}{2x+1} = \text{Log}\frac{x^2+x-6}{2x+1}. \end{aligned}$$

Remarquons que la fonction $x \mapsto \text{Log}\frac{x^2+x-6}{2x+1}$ est définie pour tout réel x

tel que l'on ait : $\frac{(x-2)(x+3)}{2x+1} > 0$, c'est-à-dire pour tout réel x de $]-3, -\frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$.

3. Considérons la fonction $f: x \mapsto \text{Log}\frac{(x+2)^3}{(x-1)^4}$. ✕

Cette fonction est définie pour tout réel x tel que l'on ait :

$$\left((x-1) \neq 0 \text{ et } \frac{(x+2)^3}{(x-1)^4} > 0 \right),$$

c'est-à-dire : $(x \neq 1 \text{ et } x+2 > 0)$.

L'ensemble de définition de f est $D =]-2, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$\text{On a alors : } \forall x \in D, \text{Log}\frac{(x+2)^3}{(x-1)^4} = \text{Log}(x+2)^3 - \text{Log}(x-1)^4.$$

Puisque l'on a : $\forall x \in D, x+2 > 0$, on a : $\text{Log}(x+2)^3 = 3 \text{Log}(x+2)$.

De la proposition : $\forall x \in D, ((x-1)^4 = |x-1|^4 \text{ et } |x-1| > 0)$, il résulte que l'on a : $\forall x \in D, \text{Log}(x-1)^4 = 4 \text{Log}|x-1|$.

$$\text{On a donc : } \forall x \in D, \text{Log}\frac{(x+2)^3}{(x-1)^4} = 3 \text{Log}(x+2) - 4 \text{Log}|x-1|.$$

Étude de la fonction Log.

1.5 • Il résulte de la définition 1.3 que l'ensemble de définition de la fonction Log est $\mathbb{R}_+$. Il n'y a pas de réduction apparente de l'ensemble d'étude; nous étudions donc cette fonction sur $]0, +\infty[$.

• De la propriété P_1 du paragraphe 1.2 il résulte que la fonction Log est dérivable et par suite continue sur $]0, +\infty[$, et qu'elle a pour fonction dérivée sur cet intervalle la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

De la proposition : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{x} > 0$, il résulte que la fonction Log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

• Démontrons que la fonction Log admet une limite en $+\infty$ égale à $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, +\infty[, (x > b) \implies (\text{Log } x > a).$$

Soit donc a un réel; cherchons le réel b sous la forme 2^n .

La fonction Log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Pour tout entier rationnel n et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$(x > 2^n) \implies (\text{Log } x > \text{Log } 2^n), \text{ c'est-à-dire :}$$

$$(x > 2^n) \implies (\text{Log } x > n \text{ Log } 2).$$

Pour avoir : $\text{Log } x > a$, il suffit donc d'avoir : $n \text{ Log } 2 > a$.

D'autre part, il résulte de la croissance stricte de la fonction Log et de l'égalité : $\text{Log } 1 = 0$, que l'on a : $\text{Log } 2 > 0$.

Pour avoir : $n \text{ Log } 2 > a$, il suffit donc d'avoir : $n > \frac{a}{\text{Log } 2}$.

Soient n_0 l'entier rationnel égal à $E\left(\frac{a}{\text{Log } 2} + 1\right)$ et b le réel égal à 2^{n_0} .

On a alors : $\forall x \in]0, +\infty[, ((x > b) \implies (\text{Log } x > n_0 \text{ Log } 2) \implies (\text{Log } x > a))$

et par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } x = +\infty$

• Cherchons si la fonction Log admet une limite à droite en 0.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{ Log } x = -\text{Log } \frac{1}{x} \quad \checkmark$$

Cherchons donc si la fonction $x \mapsto \text{Log } \frac{1}{x}$, composée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de la fonction Log, admet une limite à droite en 0.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à $+\infty$.

La fonction Log admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \mapsto \text{Log } \frac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à $\lim_{+\infty} \text{Log}$.

$$\text{On a donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } \frac{1}{x} = +\infty \text{ et par suite : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } x = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } \frac{1}{x} = -\infty.$$

• On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$(\text{Log})'(x)$		+	
$\text{Log } x$	$-\infty$	0	$+\infty$

• Étudions les branches infinies de la courbe représentative C de la fonction Log.

De la proposition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } x = -\infty$, il résulte que la droite d'équation :

$x = 0$ est asymptote à la courbe C .

D'autre part, cherchons si la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

De la proposition : $(\forall t \in]1, +\infty[, \frac{1}{t} < 1)$ et de la propriété P_2 du paragraphe 1.13 du chapitre 10, il résulte que l'on a : $\forall x \in]1, +\infty[, \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x 1 dt$, c'est-dire : $\forall x \in]1, +\infty[, \text{Log } x \leq x - 1$.

On a donc a fortiori : $\forall x \in]1, +\infty[, \text{Log } x \leq x$.

Soit x un élément quelconque de $]1, +\infty[$; le réel $\sqrt{x}$ appartient à $]1, +\infty[$.

On a donc : $\text{Log } \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (\text{Log } \sqrt{x} \leq \sqrt{x}) &\iff \left(\frac{1}{2} \text{Log } x \leq \sqrt{x}\right) \\ &\iff (\text{Log } x \leq 2\sqrt{x}) \iff \left(\frac{\text{Log } x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}\right). \end{aligned}$$

Puisque x est strictement positif, on a : $x = (\sqrt{x})^2$, et par suite : $\frac{\text{Log } x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

D'autre part, puisque x est strictement supérieur à 1, on a : $\text{Log } x > 0$.

On a donc finalement : $\forall x \in]1, +\infty[, 0 < \frac{\text{Log } x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

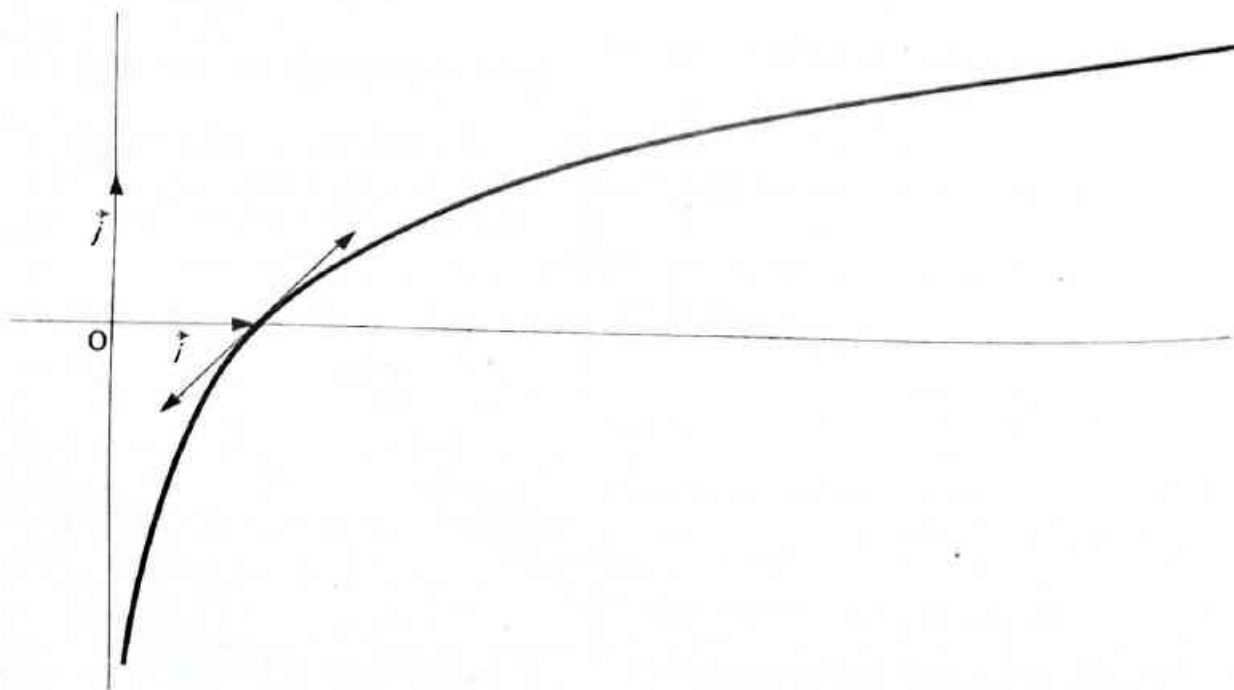
De la proposition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ et de l'exercice n° 66 du chapitre 5, il résulte

que l'on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0$.

La courbe C admet donc une **branche parabolique de direction Ox** .

• La courbe C admet une tangente au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de coefficient directeur $(\text{Log})'(1) = 1$.

Voici la courbe représentative C de la fonction Log :



Limites où intervient la fonction Log.

1.6 • Dans le paragraphe 1.5 nous avons démontré les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } x &= +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} &= 0. \end{aligned}$$

• Cherchons si la fonction $x \mapsto x \text{Log } x$ admet une limite à droite en 0.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \text{Log } x = - \frac{\text{Log } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ est la composée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}.$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une limite à droite en 0, égale à $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}$ a une limite en $+\infty$, égale à 0.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction

$x \mapsto \frac{\text{Log } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ admet une limite à droite en 0, égale à 0.

On a donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\text{Log } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$, et par suite : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \text{Log } x = 0$

• La fonction Log est dérivable en 1, de nombre dérivé égal à 1.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Log } x - \text{Log } 1}{x - 1} = 1$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Log } x}{x - 1} = 1.$

Considérons la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } (1+x)}{x}$; cette fonction est la composée de la

fonction $x \mapsto x + 1$ et de la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x - 1}.$

La fonction $x \mapsto x + 1$ admet une limite en 0, égale à 1 et il existe un intervalle épointé I de centre 0, par exemple $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, tel que : $\forall x \in I, x + 1 \neq 1.$

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x - 1}$ admet une limite en 1, égale à 1.

De la propriété P_2 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log}(1+x)}{x}$ admet une limite en 0, égale à 1.

On a donc :
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1$$

Exemples.

1. Cherchons si la fonction $x \mapsto x^2 \text{Log } x$ admet une limite à droite en 0. L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 \text{Log } x = x \cdot x \text{Log } x$.

Des propositions : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{Log } x = 0$, il résulte que l'on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \text{Log } x = 0.$$

2. Cherchons si la fonction : $x \mapsto x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ admet une limite en $+\infty$. L'ensemble de définition de cette fonction est $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

$$\text{On a : } \forall x \in D, x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

La fonction $x \mapsto x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est donc la composée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log}(1+x)}{x}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 0 et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Log}(1+x)}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à 1.

De la propriété P_2 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \mapsto x \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ admet une limite en $+\infty$ égale à 1.

3. Cherchons si la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}}$ admet une limite en $+\infty$.

L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \text{Log } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 0.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte que la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}}$ admet une limite en $+\infty$ égale à 0.

Base d'une fonction logarithmique.

- 1.7 Il résulte du paragraphe 1.5 que la fonction Log est une application continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$ qui satisfait aux deux propositions suivantes : $\lim_{0^+} \text{Log} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \text{Log} = +\infty$.

On démontre, comme dans le paragraphe 2.2 du chapitre 6 que la fonction Log est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

D'autre part, pour tout réel k non nul, la fonction logarithmique f_k satisfait à la proposition suivante :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_k(x) = \int_1^x \frac{k}{t} dt = k \int_1^x \frac{dt}{t} = k \text{Log } x.$$

On a donc : $f_k = k \cdot \text{Log}$ et par suite f_k est aussi une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Nous énonçons le résultat suivant :

Pour tout réel k non nul, la fonction logarithmique f_k est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Définitions.

- 1.8 • Soit k un réel non nul.

On appelle **base** de la fonction logarithmique f_k et on note a l'unique réel strictement positif dont l'image par f_k est égale à 1.

De l'égalité : $f_k(1) = 0$ et de la bijectivité de f_k , il résulte que l'on a : $a \neq 1$.

On a d'autre part : $f_k(a) = k \text{Log } a = 1$ et par suite :

$$\text{Log } a = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad f_k = \left(\frac{1}{\text{Log } a} \right) \text{Log}.$$

- Soit a un réel strictement positif, différent de 1.

On appelle **fonction logarithme de base a** et on note $\log_a$ la fonction logarithmique f_k avec : $k = \frac{1}{\text{Log } a}$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \log_a(x) = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$

$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

- La base de la fonction logarithme népérien est le réel e tel que l'on ait :

$\text{Log } e = 1$; une valeur approchée, à 10^{-5} près, de e est : 2,71828.

- La fonction logarithme de base 10 est utilisée pour les calculs numériques. On emploie souvent la notation $\log$ au lieu de $\log_{10}$.

On a donc : $\forall x \in]0, +\infty[, \log x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10}$

Pour tout x de $]0, +\infty[$, le réel $\log x$ est appelé le **logarithme décimal** de x .

Une valeur approchée, à 10^{-5} près, du réel $M = \frac{1}{\text{Log } 10}$ est 0,43429.

Exemples.

1. Soit $A = \frac{\log_2 \sqrt{8} \times \log_3 27^2}{\log_4 \sqrt[3]{64}}$

On a : $\log_2 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{1}{2} \frac{\text{Log } 8}{\text{Log } 2} = \frac{1}{2} \frac{\text{Log } 2^3}{\text{Log } 2} = \frac{3}{2}$

$\log_3 27^2 = 2 \log_3 27 = 2 \frac{\text{Log } 27}{\text{Log } 3} = 2 \frac{\text{Log } 3^3}{\text{Log } 3} = 6$

$\log_4 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \log_4 64 = \frac{1}{3} \frac{\text{Log } 64}{\text{Log } 4} = \frac{1}{3} \frac{\text{Log } 4^3}{\text{Log } 4} = 1$

et par suite : $A = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9.$

2. A tout couple (x, y) de l'ensemble $E = (\mathbb{R}_+^* - \{1\})^2$, associons le réel $B = \log_x y \cdot \log_y x$.

On a alors : $\forall (x, y) \in E, B = \frac{\text{Log } y}{\text{Log } x} \cdot \frac{\text{Log } x}{\text{Log } y} = 1.$

On a donc : $\boxed{\forall (x, y) \in E, \log_x y \cdot \log_y x = 1}$

3. A tout triplet (x, y, z) de l'ensemble $F = (\mathbb{R}_+^* - \{1\})^3$, associons le réel $C = \log_x y \cdot \log_y z$.

On a alors : $\forall (x, y, z) \in F, C = \frac{\text{Log } y}{\text{Log } x} \cdot \frac{\text{Log } z}{\text{Log } y} = \frac{\text{Log } z}{\text{Log } x} = \log_x z.$

On a donc : $\boxed{\forall (x, y, z) \in F, \log_x y \cdot \log_y z = \log_x z}$

Fonction logarithme de base a .

1.9 Soit a un réel strictement positif différent de 1.

Étudions la fonction $\log_a$.

Du paragraphe précédent, il résulte que cette fonction est le produit de la fonction

Log par le réel $\frac{1}{\text{Log } a}$ et par suite :

- L'ensemble de définition de la fonction $\log_a$ est $]0, +\infty[$.
- La fonction $\log_a$ est dérivable, et par suite continue, sur $]0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, (\log_a)'(x) = \frac{1}{\text{Log } a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \text{Log } a}$

- La fonction Log est bijective et strictement croissante; on a donc :
 $((\text{Log } a < 0) \iff (0 < a < 1))$ et $((\text{Log } a > 0) \iff (a > 1)).$

Si l'on a : $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), la fonction $\log_a$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $]0, +\infty[$ et satisfait aux deux propositions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{+\infty} \log_a = +\infty \\ \lim_{0^+} \log_a = -\infty \end{array} \right. \quad \left(\text{resp.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{+\infty} \log_a = -\infty \\ \lim_{0^+} \log_a = +\infty \end{array} \right. \right).$$

- On a donc les deux tableaux de variation suivants :

$a > 1$

x	0	1	$+\infty$
$(\log_a)'(x)$		+	
$\log_a x$	$-\infty$	0	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0	1	$+\infty$
$(\log_a)'(x)$		-	
$\log_a x$	$+\infty$	0	$-\infty$

- Étudions les branches infinies de la courbe représentative C_a de la fonction $\log_a$. Si l'on a : $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), de la proposition : $\lim_{0^+} \log_a = +\infty$ (resp. $\lim_{0^+} \log_a = -\infty$), il résulte que la droite d'équation : $x = 0$ est asymptote à la courbe C_a .

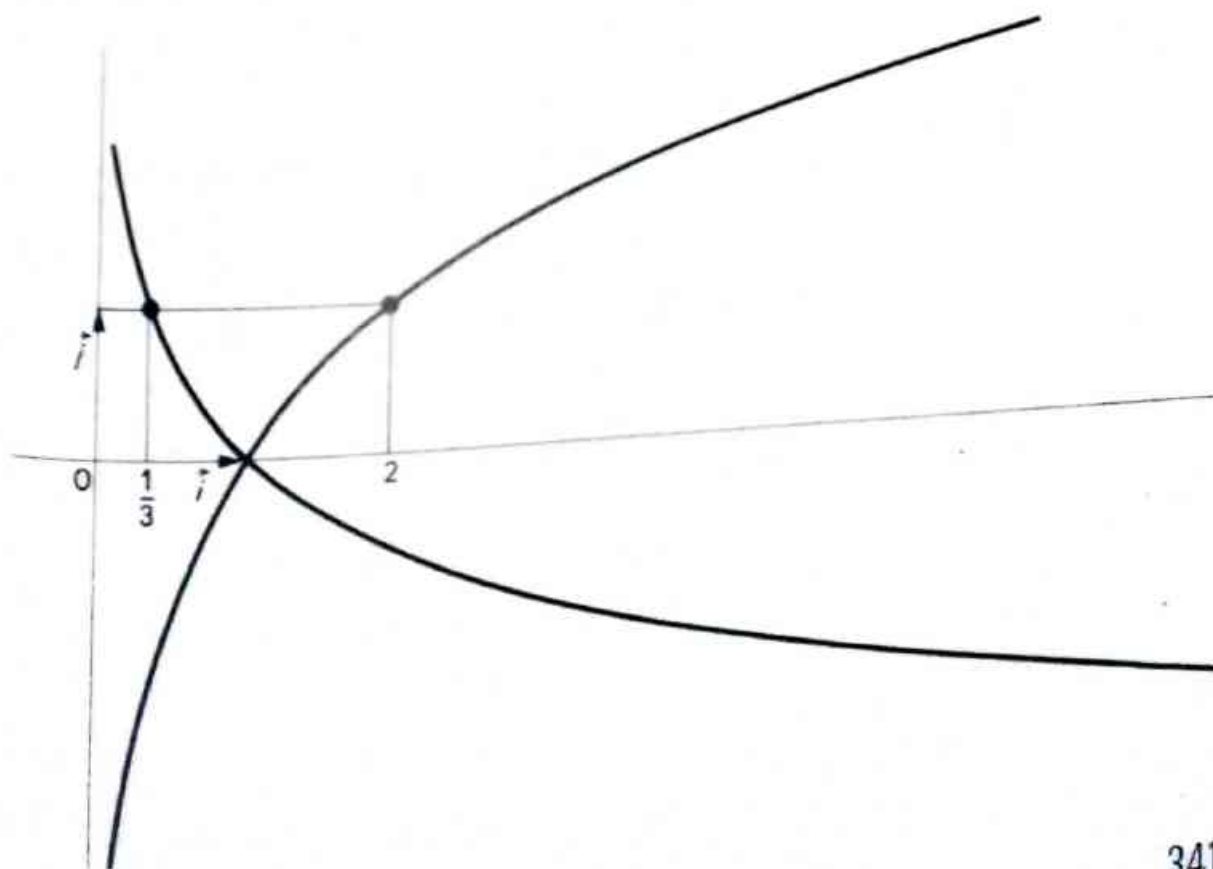
On a, d'autre part : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ et par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} \frac{\log x}{x} = 0$.

La courbe C_a admet donc une branche parabolique de direction Ox .

- La courbe C_a admet au point de coordonnées $\left(\frac{1}{0}\right)$ une tangente de coefficient

directeur $(\log_a)'(1) = \frac{1}{\log a}$

- On a donc les courbes représentatives suivantes $C_{\frac{1}{3}}$ et C_2 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Remarques : 1. Dans le cas où a est égal à e , on retrouve la courbe représentative de la fonction Log .

2. Si a est un réel strictement positif différent de 1, son inverse $\frac{1}{a}$ est aussi un réel strictement positif différent de 1. De l'égalité : $\text{Log } \frac{1}{a} = -\text{Log } a$ il résulte que

$$\text{l'on a : } \forall x \in]0, +\infty[, \log_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } \frac{1}{a}} = -\frac{\text{Log } x}{\text{Log } a} = -\log_a x.$$

Les courbes représentatives respectives C_a et $C_{\frac{1}{a}}$ de $\log_a$ et de $\log_{\frac{1}{a}}$ sont donc symétriques par rapport à l'axe Ox .

Caractérisation des fonctions logarithmiques.

- 1.10 Nous avons démontré dans les propriétés P_1 et P_2 du paragraphe 1.2 que toute fonction logarithmique est un homomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$; d'autre part nous avons démontré, dans le paragraphe 1.7 que toute fonction logarithmique est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que toute fonction logarithmique est un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.
Démontrons que cette propriété caractérise les fonctions logarithmiques.

THÉORÈME : L'ensemble des fonctions logarithmiques est l'ensemble des isomorphismes dérivables de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

Démonstration :

On vient de démontrer que toute fonction logarithmique est un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. Il suffit donc de démontrer que tout isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$ est une fonction logarithmique.

Soit f un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

f est en particulier un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$; on a donc :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y).$$

Soit x un réel strictement positif quelconque. La fonction $g : y \mapsto f(xy)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est égale à la fonction $h : y \mapsto f(x) + f(y)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; il en est donc de même des fonctions g et h et l'on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, g'(y) = xf'(xy), \text{ et :}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, h'(y) = 0 + f'(y).$$

$$\text{Nous en déduisons : } \forall y \in \mathbb{R}_+^*, xf'(xy) = f'(y).$$

$$\text{Il en résulte : } xf'(x) = f'(1).$$

La fonction f satisfait donc à la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

Si le réel $f'(1)$ était nul, la fonction f' serait égale à la fonction nulle, et par suite la fonction f serait une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$; le réel $f'(1)$ n'est donc pas nul.

Posons : $k = f'(1)$; la fonction f est alors une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$.

D'autre part puisque f est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$, l'image par f de l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$; on a donc : $f(1) = 0$.

La fonction f est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$ qui s'annule en 1; c'est donc la fonction logarithmique f_k . ■

2. Fonctions exponentielles.

Dans le paragraphe 1.7 nous avons démontré que toute fonction logarithmique est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Par suite toute fonction logarithmique admet une application réciproque, qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 2.1 DÉFINITION : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a l'application réciproque de la fonction logarithme de base a .

Nous notons provisoirement $\exp_a$ l'application réciproque de la fonction $\log_a$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, ((y = \exp_a x) \iff (x = \log_a y))$.

Le théorème suivant permet de poursuivre l'étude des fonctions exponentielles.

- 2.2 THÉORÈME : Soient E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\star$, et F un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\perp$. Soit f un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$. Alors la bijection réciproque f^{-1} de f est un isomorphisme de $(F, \perp)$ sur $(E, \star)$.

Démonstration :

Il suffit de démontrer la proposition suivante :

$\forall (y_1, y_2) \in F^2, f^{-1}(y_1 \perp y_2) = f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2)$.

Soient donc y_1 et y_2 deux éléments quelconques de F et soient x_1 et x_2 les éléments de E dont ils sont les images respectives par f .

Puisque f est un isomorphisme de $(E, \star)$ sur $(F, \perp)$, on a :

$f(x_1 \star x_2) = f(x_1) \perp f(x_2) = y_1 \perp y_2$

et par suite : $x_1 \star x_2 = f^{-1}(f(x_1 \star x_2)) = f^{-1}(y_1 \perp y_2)$.

On a donc : $f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2) = x_1 \star x_2 = f^{-1}(y_1 \perp y_2)$. ■

Propriétés.

- 2.3 Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\exp_a$ possède les propriétés suivantes :

P1

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto (\log a) \exp_a x$.

Démonstration :

Dans le paragraphe 1.9, nous avons démontré que la fonction $\log_a$ est une bijection strictement croissante si $a > 1$ (resp. strictement décroissante si $0 < a < 1$) de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction dérivée $(\log_a)'$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log} a}.$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x \operatorname{Log} a} \neq 0$. Du théorème 2.6 du chapitre 7, il résulte donc que la fonction $\exp_a$ est une bijection strictement croissante si $a > 1$ (resp. strictement décroissante si $0 < a < 1$) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée

$$(\exp_a)' \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R}, (\exp_a)'(x) = \frac{1}{(\log_a)'(\exp_a x)} = \frac{1}{\frac{1}{(\operatorname{Log} a) \exp_a x}},$$

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp_a)'(x) = (\operatorname{Log} a) \exp_a x$. ■

P2 La fonction $\exp_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
On a donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp_a(x + y) = \exp_a x \cdot \exp_a y$.

Démonstration :

$\log_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$; du théorème 2.2, il résulte que sa bijection réciproque $\exp_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. ■

Conséquences : 1. L'image par $\exp_a$ de l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, c'est-à-dire : $\exp_a 0 = 1$

2. L'image par $\exp_a$ du symétrique pour la loi $+$ de tout élément x de $\mathbb{R}$ est le symétrique pour la loi $\times$ de $\exp_a x$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a x}$$

P3 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp_a(x - y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y}$

Démonstration :

On a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp_a(x - y) &= \exp_a(x + (-y)) \\ &= (\exp_a x) \cdot \exp_a(-y) = (\exp_a x) \cdot \frac{1}{(\exp_a y)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

P4 $\forall r \in \mathbb{Q}, \exp_a r = a^r$.

Démonstration :

Soit r un nombre rationnel quelconque.

$$\text{On a : } \log_a(a^r) = r \log_a a = r$$

et par suite : $\exp_a(\log_a(a^r)) = \exp_a r$, c'est-à-dire : $a^r = \exp_a r$. ■

Notations : 1. Il est donc légitime de noter par convention a^x l'image par $\exp_a$ d'un réel quelconque x . Avec cette notation, la définition de $\exp_a$ et les propriétés précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, ((y = a^x) \iff (x = \log_a y)). \\ \forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, a^{\log_a x} = x \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \end{aligned}$$

2. Pour tout nombre rationnel r , on a : $1^r = 1$. Il est donc légitime de poser, par convention : $\forall x \in \mathbb{R}, 1^x = 1$.

$$\text{P5} \quad \forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$$

Démonstration :

Soit x un réel quelconque.

On a : $x = \log_a a^x = \frac{\operatorname{Log} a^x}{\operatorname{Log} a}$ et par suite : $x \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} a^x$. La fonction exponentielle de base e est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

On a donc : $e^{x \operatorname{Log} a} = e^{\operatorname{Log} a^x} = a^x$. ■

Cette propriété est également vraie si $a = 1$.

$$\text{P6} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (a^x)^y = a^{xy}$$

Démonstration :

Soient x et y deux réels quelconques.

Le réel a^x est strictement positif.

On a : $(a^x)^y = e^{y \operatorname{Log} a^x} = e^{xy \operatorname{Log} a}$ et : $a^{xy} = e^{xy \operatorname{Log} a}$.

On a donc : $(a^x)^y = a^{xy}$. ■

Remarque : On démontre de façon analogue que, si a et b sont deux réels strictement positifs et si x est un réel quelconque, on a : $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Ces formules généralisent les formules sur les puissances rationnelles obtenues dans le chapitre 6.

Fonction exponentielle de base e .

2.4 Les propriétés du paragraphe 2.3 s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, ((y = e^x) \iff (x = \operatorname{Log} y)) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Log} e^x = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\operatorname{Log} x} = x \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \end{aligned}$$

Exemples.

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Log}(\operatorname{Log} e^x + e^{-\operatorname{Log} x}) = \operatorname{Log}\left(x + \frac{1}{e^{\operatorname{Log} x}}\right) = \operatorname{Log}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x+1} - 5e^{x+2} - 6e^3 = 0$.
 On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x+1} - 5e^{x+2} - 6e^3 = e(e^{2x} - 5e \cdot e^x - 6e^2)$
 et : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 5e \cdot e^x - 6e^2 = (e^x + e)(e^x - 6e)$.
 On a donc :

$$\begin{aligned} (e^{2x+1} - 5e^{x+2} - 6e^3 = 0) &\iff (e^{2x} - 5e \cdot e^x - 6e^2 = 0) \\ &\iff ((e^x + e)(e^x - 6e) = 0) \\ &\iff (e^x = 6e) \\ &\iff (x = \text{Log}(6e)) \\ &\iff (x = 1 + \text{Log } 6). \end{aligned}$$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0$.
 On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = (e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2)$.
 On a donc :

$$\begin{aligned} (e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0) &\iff (e^{2x} - 1 = 0 \text{ ou } e^{2x} - 2 = 0) \\ &\iff ((e^x)^2 - 1 = 0 \text{ ou } (e^x)^2 - 2 = 0) \\ &\iff (e^x = 1 \text{ ou } e^x = \sqrt{2}) \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } x = \text{Log } \sqrt{2}). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0$ est égal à
 $\{0, \text{Log } \sqrt{2}\}$ ou encore à $\{0, \frac{1}{2} \text{Log } 2\}$.

Étude de la fonction $x \mapsto e^x$.

2.5 • La fonction exponentielle de base e est l'application réciproque de la fonction Log.

De l'étude de la fonction Log, il résulte que l'on a le tableau de variation suivant :

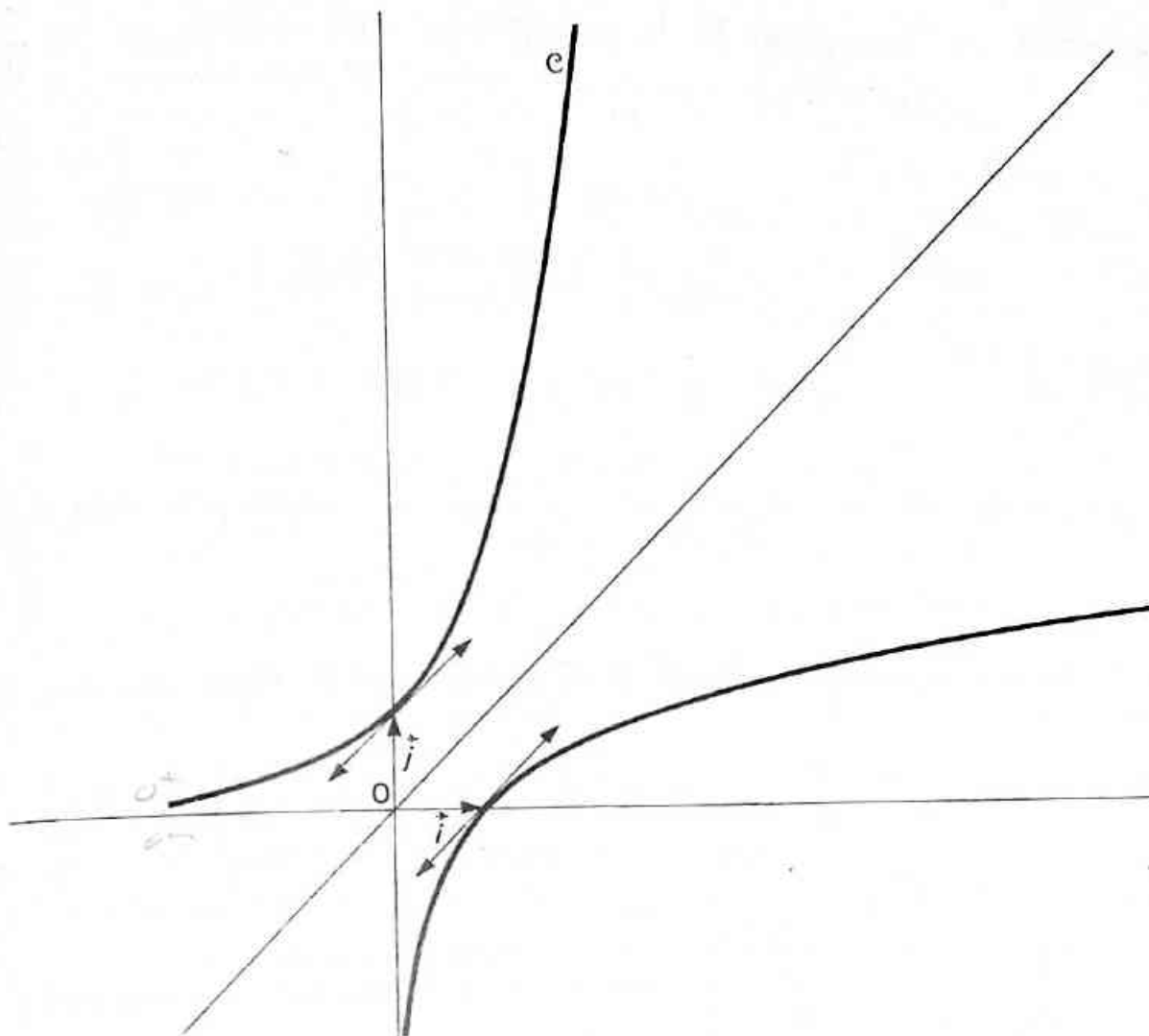
x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

• De la propriété P_1 du paragraphe 2.3, il résulte que la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto (\text{Log } e)e^x$, c'est-à-dire $x \mapsto e^x$.
La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto e^x$.

• Puisque la fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction Log, la courbe représentative C de la fonction exponentielle de base e et celle de la fonction Log sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$ dans le même repère.

On a donc la courbe représentative suivante :



• Étudions les branches infinies de la courbe C.

De la proposition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, il résulte que la droite d'équation : $y = 0$ est asymptote à la courbe C.

D'autre part, cherchons si la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x = \text{Log } e^x$; la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est donc la composée de la

fonction $x \mapsto e^x$ et de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\text{Log } x}$.

La fonction $x \mapsto e^x$ admet une limite en $+\infty$ égale à $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}$ admet une limite en $+\infty$ égale à 0 et on a :

$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{\text{Log } x}{x} > 0$. Par suite la fonction $x \mapsto \frac{x}{\text{Log } x}$ admet une limite en $+\infty$ égale à $+\infty$.

De la propriété P_3 du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction

$x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

La courbe C admet donc une **branche parabolique de direction** Oy.

Limites où intervient la fonction $x \mapsto e^x$.

2.6 • Dans le paragraphe 2.5, nous avons démontré les résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

• Cherchons si la fonction $x \mapsto xe^x$ admet une limite en $-\infty$.
La fonction $x \mapsto xe^x$ est la composée de la fonction $x \mapsto e^x$ et de la fonction $x \mapsto x \operatorname{Log} x$.

La fonction $x \mapsto e^x$ admet une limite en $-\infty$ égale à 0 et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0.$$

La fonction $x \mapsto x \operatorname{Log} x$ admet une limite à droite en 0 égale à 0.

De la proposition P₂ du paragraphe 3.13 du chapitre 5, il résulte alors que la fonction $x \mapsto xe^x$ admet une limite en $-\infty$ égale à 0.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

• La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc dérivable en 0, de nombre dérivé égal à 1.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exemple.

Cherchons si la fonction : $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ admet une limite en 0.
L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}^*$; nous distinguons donc deux cas, $x < 0$ et $x > 0$.

La fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite à gauche en 0 égale à $-\infty$.

La fonction : $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ admet donc une limite à gauche en 0 égale à 0.

Des égalités : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$, il résulte : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} xe^{\frac{1}{x}} = 0$.

Si x est positif, nous remarquons que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^x}{\frac{1}{x}}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une limite à droite en 0, égale à $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{\frac{1}{x}}$ admet donc une limite à droite en 0 égale à $+\infty$.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Nous avons donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} xe^{\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Il en résulte que la fonction $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ n'a pas de limite en 0.

Autres fonctions exponentielles.

2.7 Soit a un réel strictement positif différent de 1.

• La fonction exponentielle de base a est l'application réciproque de la fonction $\log_a$.

On a donc les deux tableaux de variation suivants :

$a > 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x		1	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$+\infty$	1	0

• De la propriété P_1 du paragraphe 2.3, il résulte que la fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto a^x \text{Log } a$.

• Puisque la fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$, la courbe représentative C_a de la fonction exponentielle de base a et celle de la fonction $\log_a$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$ dans un même repère orthonormé.

• Étudions les branches infinies de la courbe C_a .

Si l'on a : $a > 1$ (resp. $0 < a < 1$), de la proposition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$),

il résulte que la droite d'équation : $y = 0$ est asymptote à C_a .

D'autre part, si l'on a : $a > 1$, on a :

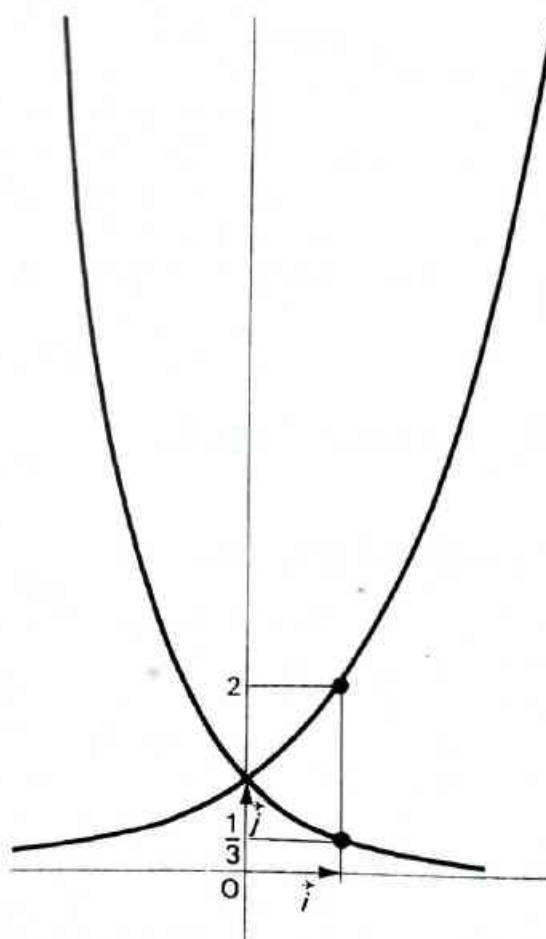
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } a \cdot \frac{e^{x \text{Log } a}}{x \text{Log } a} = +\infty$$

et si l'on a : $0 < a < 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Log } a \cdot \frac{e^{x \text{Log } a}}{x \text{Log } a} = -\infty.$$

La courbe C_a admet donc une **branche parabolique de direction Oy**.

La figure ci-contre représente les courbes C_1 et C_2 .



Caractérisation des fonctions exponentielles.

De même que pour les fonctions logarithmiques, on a le théorème suivant :

2.8 THÉORÈME : L'ensemble des fonctions exponentielles est l'ensemble des isomorphismes dérivables de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+, \times)$.

Démonstration :

Il résulte de la définition 2.1 et des propriétés P_1 et P_2 du paragraphe 2.3 que toute fonction exponentielle est un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+, \times)$. Il suffit donc de démontrer que tout isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+, \times)$ est une fonction exponentielle.

Soient donc f un isomorphisme dérivable quelconque de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+, \times)$ et f^{-1} la bijection réciproque de f . Du théorème 2.2, il résulte que f^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

Démontrons que f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+$; pour cela il suffit de démontrer que la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Soit x un réel quelconque. La fonction $g : y \mapsto f(x + y)$, définie sur $\mathbb{R}$ est égale à la fonction $h : y \mapsto f(x) f(y)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; il en est donc de même des fonctions g et h . On a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = f'(x + y) \text{ et}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, h'(y) = f(x) \cdot f'(y).$$

Nous en déduisons : $\forall y \in \mathbb{R}, f'(x + y) = f(x) f'(y)$.

Il en résulte : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$.

Si le réel $f'(0)$ était nul, la fonction f' serait égale à la fonction nulle, et, par suite, la fonction f serait une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Or f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$; le réel $f'(0)$ n'est donc pas nul.

D'autre part on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$; on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$.

La fonction f^{-1} est donc un isomorphisme dérivable de $(\mathbb{R}_+, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. Du théorème 1.10, il résulte que f^{-1} est une fonction logarithmique; la fonction f est donc une fonction exponentielle. ■

3. Applications.

Calcul de primitives.

- 3.1 • Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\{ \forall x \in D, f(x) \neq 0$$

$\{ f \text{ est dérivable sur tout intervalle contenu dans } D.$

Considérons la fonction $g : x \mapsto \text{Log } |f(x)|$, que nous notons aussi $\text{Log} \circ |f|$. La fonction g est définie sur D . Étudions la dérivabilité de g .

Soit D_1 (resp. D_2) l'ensemble défini par :

$$D_1 = \{x \in D \mid f(x) > 0\} \text{ (resp. } D_2 = \{x \in D \mid f(x) < 0\}).$$

On a alors : $\forall x \in D_1, g(x) = \text{Log } f(x)$ et $\forall x \in D_2, g(x) = \text{Log } (-f(x))$.

La fonction f est dérivable sur tout intervalle contenu dans D , donc sur tout intervalle contenu dans D_1 ; la fonction Log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction g est donc dérivable sur tout intervalle contenu dans D_1 , de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D_1, g'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

De même la fonction $-f$ est dérivable sur tout intervalle contenu dans D , donc sur tout intervalle contenu dans D_2 ; la fonction Log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction g est donc dérivable sur tout intervalle contenu dans D_2 , de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D_2, g'(x) = -f'(x) \cdot \frac{1}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Finalement la fonction g est dérivable sur tout intervalle contenu soit dans D_1 , soit dans D_2 de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

c'est-à-dire : $\forall x \in D, (\text{Log} \circ |f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Cette propriété permet de déterminer les primitives de certaines fonctions.

Remarque : La fonction g est en fait dérivable sur tout intervalle contenu dans D car tout intervalle contenu dans D est contenu soit dans D_1 , soit dans D_2 : s'il existait un intervalle I inclus dans D qui contienne un point x_1 de D_1 et un point x_2 de D_2 , on aurait, $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$; la fonction f est dérivable sur I , elle est donc continue sur I et par suite, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un point y de I tel que $f(y) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la fonction f .

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$. Cette fonction est continue sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$; elle est donc intégrable sur chacun de ces intervalles.

Une primitive sur chacun des intervalles précédents de la fonction f est la fonction $x \mapsto \text{Log} |x+1|$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

2. La fonction $\text{tg} : x \mapsto \text{tg } x$ est définie sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Soit k un entier rationnel quelconque.

La fonction tg est continue et par suite intégrable sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

On a : $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos)'(x)}{\cos x}$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto \text{tg } x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ est donc la

fonction $x \mapsto -\text{Log} |\cos x|$.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{2(x^2+x+3)}$.

De la proposition : ($\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+3 > 0$), il résulte que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto 2x+1$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^2+x+3$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction

$g : x \mapsto \frac{1}{2} \text{Log}(x^2+x+3)$, c'est-à-dire : $g : x \mapsto \text{Log} \sqrt{x^2+x+3}$.

3.2 • Soit f une fonction définie sur une réunion D d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}$ et dérivable sur tout intervalle contenu dans D .

Considérons la fonction $g : x \mapsto e^{f(x)}$, notée encore $\exp_e \circ f$.

La fonction g est définie sur D . Étudions la dérivabilité de g .

La fonction $\exp_e$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est dérivable sur tout intervalle contenu dans D .

La fonction g est donc dérivable sur tout intervalle contenu dans D , de fonction dérivée g' définie par : $\forall x \in D, g'(x) = f'(x) e^{f(x)}$, ✓

c'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in D, (\exp_e \circ f)'(x) = f'(x) e^{f(x)}}$

Cette propriété permet de déterminer les primitives de certaines fonctions.

Exemples.

1. Soit la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, xe^{x^2} = \frac{1}{2} (2xe^{x^2})$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2}$.

2. Soit la fonction $x \mapsto (2x - 1)e^{x^2 - x + 1}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto 2x - 1$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (2x - 1)e^{x^2 - x + 1}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \mapsto e^{x^2 - x + 1}$.

3. Soit la fonction $x \mapsto x^2 2^{x^3}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 2^{x^3} = x^2 e^{x^3 \log 2} = \frac{3x^2 \log 2 e^{x^3 \log 2}}{3 \log 2}$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 2^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{3 \log 2} 2^{x^3}$.

✱ Étude de la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

3.3 Dans le chapitre 6 nous avons étudié, pour tout nombre rationnel r , la fonction $x \mapsto x^r$; cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$.

Plus généralement, soit α un réel quelconque. Étudions la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

Si $\alpha = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^\alpha = 1$, et si $\alpha = 1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, x^\alpha = x$. Nous supposons désormais que l'on a : $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

• De la propriété P_5 du paragraphe 2.3, il résulte que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. D'autre part, on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, 1^\alpha = 1$.

L'ensemble de définition de la fonction f_α est donc $]0, +\infty[$.

• La fonction $x \mapsto \log x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto e^x$.

La fonction f_α est donc dérivable, et par suite continue, sur $]0, +\infty[$, de fonction

dérivée f'_α définie par : $\forall x \in]0, +\infty[, f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x}$,

c'est-à-dire : $\forall x \in]0, +\infty[, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

On retrouve la même expression de la fonction dérivée que pour α rationnel. Pour étudier le sens de variation de f_α , il faut donc distinguer deux cas : $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

Si on a : $\alpha > 0$, on a alors : $\forall x \in]0, +\infty[, f'_\alpha(x) > 0$; la fonction f_α est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Si on a : $\alpha < 0$, on a alors : $\forall x \in]0, +\infty[, f'_\alpha(x) < 0$; la fonction f_α est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

• Cherchons si la fonction f_α admet une limite en $+\infty$.
La fonction $x \mapsto \text{Log } x$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

Si α est positif, on a : $\forall x \in]1, +\infty[, \alpha \text{Log } x > 0$.

Si α est négatif, on a : $\forall x \in]1, +\infty[, \alpha \text{Log } x < 0$.

La fonction $x \mapsto e^x$ admet une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$ et une limite en $-\infty$ égale à 0.

La fonction $x \mapsto e^{\alpha \text{Log } x}$ admet donc une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$ si α est positif, égale à 0 si α est négatif.

• Cherchons si la fonction f_α admet une limite à droite en 0.

La fonction $x \mapsto \text{Log } x$ admet une limite à droite en 0, égale à $-\infty$.

Si α est positif, on a : $\forall x \in]0, 1[, \alpha \text{Log } x < 0$.

Si α est négatif, on a : $\forall x \in]0, 1[, \alpha \text{Log } x > 0$.

La fonction $x \mapsto e^x$ admet une limite en $-\infty$, égale à 0 et une limite en $+\infty$, égale à $+\infty$.

La fonction $x \mapsto e^{\alpha \text{Log } x}$ admet donc une limite à droite en 0, égale à 0 si α est positif, égale à $+\infty$ si α est négatif.

• On a donc les deux tableaux de variation suivants :

$\alpha > 0$ ($\alpha \neq 1$)

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+
$f_\alpha(x)$	0	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		-
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	0

• Supposons que l'on ait : $\alpha > 0$ ($\alpha \neq 1$).

Considérons la fonction g_α définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, g_\alpha(x) = f_\alpha(x) \\ g_\alpha(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction g_α est donc définie sur $[0, +\infty[$.

De la proposition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_\alpha(x) = 0$, il résulte que g_α est un prolongement par

continuité en 0 de f_α .

Étudions la dérivabilité de g_α en 0.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{f_\alpha(x)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$

De l'étude de la limite de f_α à droite en 0, il résulte que l'on a :

$\forall \alpha \in]0, 1[, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\alpha-1} = +\infty$ et $\forall \alpha \in]1, +\infty[, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\alpha-1} = 0.$

La courbe représentative de g_α admet donc en 0 une demi-tangente, portée par Oy si α est élément de $]0, 1[$, portée par Ox si α est élément de $]1, +\infty[$.

Étudions la branche infinie, et pour cela cherchons si la fonction $x \mapsto \frac{x^\alpha}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$

De l'étude de la limite de f_α en $+\infty$, il résulte que l'on a :

$\forall \alpha \in]0, 1[, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = 0$
 $\forall \alpha \in]1, +\infty[, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = +\infty.$

La courbe représentative de f_α admet donc une branche parabolique de direction Ox si on a : $\alpha \in]0, 1[$ (resp. de direction Oy si on a : $\alpha \in]1, +\infty[$).

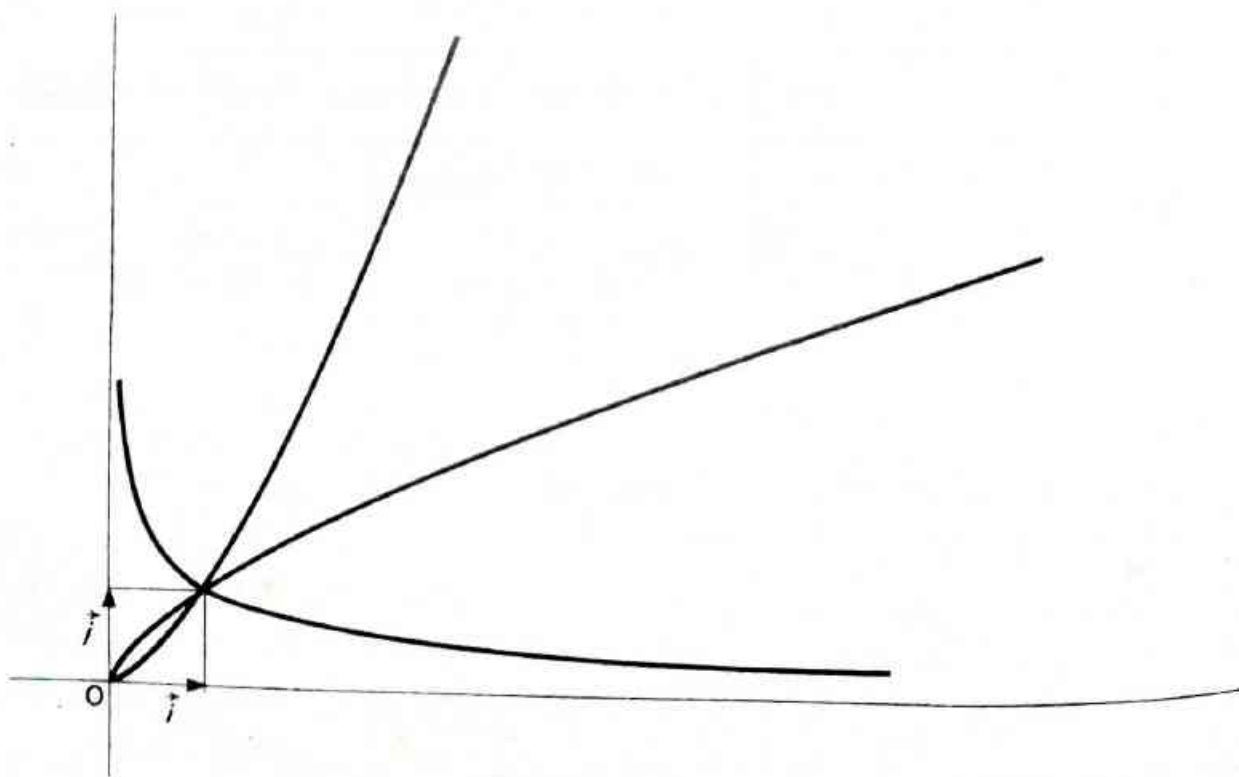
• **Supposons que l'on ait : $\alpha < 0$.**

Des propositions : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_\alpha(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$, il résulte que les droites

d'équations respectives : $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe représentative de f_α .

• On a donc les courbes représentatives suivantes dans un repère orthonormé :

pour $\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$.



Calcul numérique.

Généralités.

- 3.4 Il résulte des propriétés P_2 et P_5 du paragraphe 1.2 et de l'étude faite dans le paragraphe 1.7 que toute fonction logarithmique est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ qui transforme les produits en sommes et les élévations à une puissance en produits. Techniquement, il est plus facile d'effectuer une addition (resp. un produit par un rationnel) qu'une multiplication (resp. une élévation à une puissance). L'usage des logarithmes simplifie donc le calcul numérique.

Il existe deux applications principales des logarithmes au calcul numérique : les tables de logarithmes et les règles et cercles à calcul.

Chaque table, chaque règle a sa notice d'utilisation propre; nous conseillons au lecteur de les lire attentivement.

Dans les paragraphes suivants nous indiquons sommairement le principe de l'usage d'une table de logarithmes et d'une règle à calcul.

Usage des tables de logarithmes.

- 3.5 Il existe des tables qui donnent les logarithmes népériens, mais, pour le calcul numérique, on utilise en général les logarithmes décimaux.

Soit x un nombre réel strictement positif.

• On appelle **caractéristique** de $\log x$, l'entier rationnel $E(\log x)$; on appelle **mantisse** de $\log x$, le réel $\log x - E(\log x)$.

Des inégalités : $E(\log x) \leq \log x < E(\log x) + 1$, il résulte que l'on a :

$$0 \leq \log x - E(\log x) < 1.$$

Par suite, la mantisse s'écrit, dans le système décimal, sous la forme $0, \dots$

• **Pour déterminer la caractéristique n de $\log x$** , on fait l'observation suivante : puisque la fonction $\log$ est strictement croissante, on a l'équivalence :

$$(n \leq \log x < n + 1) \iff (10^n \leq x < 10^{n+1}).$$

Par suite, si x est supérieur à 1, l'entier rationnel n est égal au nombre de chiffres, diminué de 1, de la partie entière du réel x écrit dans le système décimal; si x est inférieur à 1, l'entier rationnel n est négatif et sa valeur absolue est égale au rang du premier chiffre non nul qui figure après la virgule dans l'écriture décimale de x .

• **Pour déterminer la mantisse de $\log x$** , on remarque d'abord que, si x et y sont deux réels strictement positifs et s'il existe un entier rationnel m qui satisfait à :

$$y = 10^m x, \quad \text{on a alors : } \begin{cases} \log y = m + \log x \\ E(\log y) = m + E(\log x) \end{cases}$$

et par suite :

$$\log y - E(\log y) = (m + \log x) - (m + E(\log x)) = \log x - E(\log x).$$

Les logarithmes de deux réels strictement positifs dont le rapport est une puissance de 10 ont donc la même mantisse.

Les tables donnent en général les cinq premières décimales des mantisses des logarithmes des entiers naturels successifs de 1 000 à 9 999; les logarithmes de ces entiers sont alors connus à $5 \cdot 10^{-6}$ près.

Si x est le produit d'une puissance de 10 par un tel entier, on obtient la mantisse de $\log x$ par simple lecture de la table.

Si x n'est pas le produit d'une puissance de 10 par un tel entier, il existe un entier rationnel m et un entier x_1 compris entre 1 000 et 9 999 tel que l'on ait : $x_1 < 10^m x < x_1 + 1$.

Posons $y = 10^m x$; les réels x et y ont la même mantisse et il résulte de la croissance de la fonction $\log$ que l'on a : $\log x_1 < \log y < \log (x_1 + 1)$.

On démontre et nous admettons que l'erreur commise en déterminant $\log y$ par interpolation linéaire (voir cours de Première) est inférieure à $M \cdot \frac{1}{x_1(x_1 + 1)}$.

On a : $M = \frac{1}{\log 10} < 0,5$, $x_1 \geq 10^3$, $(x_1 + 1) > 10^3$

Par suite l'erreur commise est inférieure à $0,5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-7}$.

On obtient donc bien par interpolation linéaire les cinq premières décimales de la mantisse de $\log y$ et par suite celles de $\log x$.

- Il est commode d'introduire le cologarithme de x .

On appelle **cologarithme de x** et on note $\text{colog } x$ le réel $\log \frac{1}{x}$ égal à $-\log x$.

Soient respectivement c et m la caractéristique et la mantisse de $\log x$.

On a : $\text{colog } x = -c - m$, et : $-1 < -m < 0$, et par suite :

$\text{colog } x = (-c - 1) + (1 - m)$ et $0 < 1 - m < 1$.

La mantisse de $\text{colog } x$ est donc $1 - m$ et sa caractéristique est $-c - 1$.

- Dans le cas où la caractéristique n de $\log x$ est négative, si $0,abcde$ est la mantisse de $\log x$, et si n' est la valeur absolue de n , on a :

$n' = -n$, $n' > 0$ et $\log x = -n' + 0,abcde$. On note alors :

$\log x = \overline{n'}, abcde$ pour indiquer que le signe $-$ ne porte que sur la caractéristique.

- Soient x, y, z, t quatre réels strictement positifs et r, r' deux rationnels strictement positifs. Pour calculer le réel $A = \frac{x y^r}{z t^{r'}}$, il est souvent commode de calculer $\log A$.

On a : $\log A = \log x + r \log y + \text{colog } z + r' \text{ colog } t$.

On dispose en général les calculs de la manière suivante :

calculs auxiliaires	calculs définitifs
$\log y =$	$\log x =$
$\log z =$	$r \log y =$
$\log t =$	$\text{colog } z =$
$\text{colog } t =$	$r' \text{ colog } t =$
calcul de A .	$\log A =$
	$A =$

- Nous donnons quelques exemples de recherche de logarithmes et de calculs numériques faits à l'aide des logarithmes; nous avons utilisé la table de logarithmes à cinq décimales Bouvart et Ratinet. Pour plus de détails, nous conseillons au lecteur de lire la notice de cette table.

Exemples.

1. Calculons le logarithme décimal de $x = 0,0008417$ et celui de $y = 8417$.

La caractéristique de $\log x$ (resp. $\log y$) est $\overline{4}$ (resp. 3). On lit la partie décimale de la mantisse dans la table.

On a donc : $\log x = \overline{4},92516$ et $\log y = 3,92516$.

2. Déterminons le logarithme décimal de $x = 32,305$.

Nous lisons dans la table le logarithme décimal de 32,30 et celui de 32,31. Nous utilisons alors la méthode d'interpolation linéaire. Il est d'usage de disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} \log 32,30 = 1,50920 \\ D = 14 \quad \frac{5}{7} \\ \log 32,305 = 1,50927. \end{array}$$

3. Déterminons une valeur approchée du réel x tel que : $\log x = \bar{3},50420$. Par lecture de la table, nous avons : $\log 3,193 = 0,50420$. Nous avons donc, avec la meilleure précision permise par la table : $x = 0,0031930$, à 10^{-7} près.

4. Déterminons une valeur approchée du réel x , dont le logarithme est 2,24175.

Par lecture de la table, nous avons : $\log 174,4 = 2,24155$.

Nous utilisons alors la méthode d'interpolation linéaire; il est d'usage de disposer les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} \log 174,4 = 2,24155 \\ D = 25 \quad \frac{8}{20} \\ \log 174,48 = 2,24175. \end{array}$$

Nous avons donc, avec la meilleure précision permise par la table : $x = 174,48$, à 10^{-2} près.

5. Déterminons une valeur approchée à 10^{-5} près du réel $A = \frac{\pi \sqrt[3]{241}}{327}$.

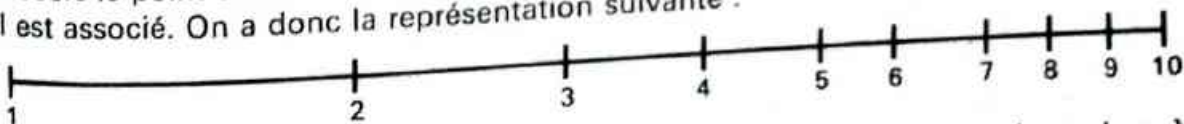
Calculs auxiliaires	Calculs définitifs
$\log 241 = 2,38202$	$\log \pi = 0,49715$
$\log 327 = 2,51455$	$\frac{1}{3} \log 241 = 0,79400$
$\log 0,05978 = \bar{2},77656 \quad D = 7$	$\text{colog } 327 = \bar{3},48545$
	$\log A = \bar{2},77660$
	$A = 0,05978.$

Une valeur approchée du réel A à 10^{-5} près est donc $A = 0,05978$. La meilleure précision permise par la table donne $A = 0,059787$.

Usage des règles à calcul.

3.6 En classe de Première, nous avons décrit une règle à calculs et nous en avons expliqué l'utilisation.

Dans ce paragraphe, nous indiquons le principe à partir duquel est construite une règle à calculs : les échelles qui y figurent sont des **échelles logarithmiques**. On construit une échelle logarithmique de la manière suivante : sur une droite affine réelle munie d'un repère $(O, \vec{i})$, à tout nombre réel strictement positif x on associe le point d'abscisse $\log x$; on marque ce point sur la droite et le réel x auquel il est associé. On a donc la représentation suivante :



Multiplier (resp. diviser) deux nombres réels strictement positifs revient alors à additionner (resp. soustraire) deux longueurs de segments. Nous avons indiqué les différentes méthodes dans le chapitre 31 du tome 2 de Première.

EXERCICES

Fonctions logarithmiques.

◆ Dans les exercices suivants (nos 1 à 9), résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1 $2 \operatorname{Log} x = \operatorname{Log}(6 + \sqrt{3}) + \operatorname{Log}(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \operatorname{Log}(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}).$

2 $\operatorname{Log}(x + 3) + \operatorname{Log}(x + 2) = \operatorname{Log}(x + 11).$

3 $\operatorname{Log}(x^2 + 5x + 6) = \operatorname{Log}(x + 11).$

4 $\operatorname{Log}(-x - 2) = \operatorname{Log}\left(\frac{-x - 11}{x + 3}\right).$

5 $\operatorname{Log}(x + 2) = \operatorname{Log}(-x - 11) - \operatorname{Log}(x + 3).$

6 $\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2x = \operatorname{Log}(3 - x) - \operatorname{Log} \sqrt{x + 1}.$

7 $\operatorname{Log} \sqrt{2x - 3} = \operatorname{Log}(6 - x) - \frac{1}{2} \operatorname{Log} x.$

8 $\operatorname{Log}(x - 1) + \operatorname{Log}(x - 2) = \operatorname{Log}|4 - x|.$

X 9 $\log_2(x + 1) + \log_4 x = 1.$

10 Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\log_a x > \log_a^3(3x - 2).$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e. \end{cases}$$

(Baccalauréat 1973.)

12 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} xy = 256 \\ 7(\log_x y + \log_y x) = 50. \end{cases}$$

13 Soit n un entier rationnel. Soient α un nombre réel strictement positif et k un nombre réel strictement positif différent de 1.

Soit A le réel $\int_{\alpha}^{k\alpha} x^n dx.$

1° Déterminer n de façon que A soit indépendant de $\alpha.$

2° On donne à n la valeur déterminée dans le 1°. Déterminer k de façon que A soit égal à 4.

14 On considère un plan affine réel euclidien P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit C la courbe représentative de la fonction Log dans P .
Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} 3x$ se déduit de C par une transformation géométrique simple.

15 Soient un nombre réel a et la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = x^2 \operatorname{Log} |x| - 1 \\ f(0) = a. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'on peut choisir a de façon que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2° On suppose a ainsi choisi; démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée f' continue sur $\mathbb{R}$.

16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1[, & f(x) = 1 - x^2 \\ \forall x \in [-1, 1], & f(x) = \operatorname{Log}(2 - x^2) \\ \forall x \in]1, +\infty[, & f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \end{cases}$$

1° Étudier la continuité de la fonction f .

2° Étudier la dérivabilité de la fonction f , en particulier aux points -1 et 1 .

17 Soient a et b deux nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [e^2, +\infty[, & f(x) = \operatorname{Log} x \\ \forall x \in]-\infty, e^2], & f(x) = ax + b. \end{cases}$$

1° Peut-on déterminer les réels a et b tels que la fonction f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

2° On donne à a et à b les valeurs trouvées précédemment. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(Baccalauréat 1973.)

18 1° Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction :

$F: x \mapsto x(a \operatorname{Log} x + b)$ soit une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction :

$f: x \mapsto -\operatorname{Log} x$.

2° Soit t un élément de $]0, 1[$. Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer l'aire $S(t)$ de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe C et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = t$.
La fonction $t \mapsto S(t)$ admet-elle une limite à droite en 0 ? Si oui, calculer cette limite.

20 Soit n un entier naturel non nul.

1° Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Log} x}{x^n}$.

2° Déterminer la limite à droite en 0 de la fonction $x \mapsto x^n \operatorname{Log} x$.

3° Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Log} x}{\frac{1}{x^n}}$.

4° Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x^n}$.

21 Soit la fonction $f: x \mapsto \operatorname{Log}(x^2)$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Déterminer l'équation de la tangente D à C au point d'abscisse e .

3° Vérifier que la fonction $F: x \mapsto x \operatorname{Log}(x^2) - 2x$ est une primitive de la fonction f sur chacun des intervalles où f est définie.

4° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe C et la tangente D .

22 1° Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & f(x) = x \operatorname{Log} x \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On déterminera en particulier les points d'intersection de C et de Ox .

2° Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & g(x) = x^2 \operatorname{Log} x - \frac{x^2}{2} \\ & g(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction g est-elle dérivable ? Si oui, sur quel intervalle ? Déterminer sa fonction dérivée g' .

3° Soit la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = |f(x)|$. Soit C' la courbe représentative de la fonction h dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer l'aire de la boucle déterminée par les courbes C et C' .

23 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & f(x) = \sqrt{x} \operatorname{Log} x^2 \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Démontrer que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = -4 \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$

Étudier la continuité de f .

2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

24 Soit la fonction $f: x \mapsto \operatorname{Log} \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2° Soit a un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = a$.

(Baccalauréat 1973.)

25 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = x \operatorname{Log} |x| \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

1° La fonction f est-elle continue au point 0 ? Est-elle dérivable en ce point ?

2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° En utilisant une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f . Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C , par l'axe Ox et par les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, & f(x) = x |\operatorname{Log} x| \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f .

2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Soit t un réel de l'intervalle $]0, 1]$.

Calculer, en effectuant une intégration par parties, l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre C , l'axe Ox et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = t$. Déterminer la limite éventuelle à droite en 0 de la fonction $t \mapsto A(t)$.

- 27 Étudier la fonction $f: x \mapsto x + 1 + \text{Log} \frac{x+2}{x+1}$ et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 28 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1 + \text{Log } x}{x}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° On désigne par M_1 le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe Ox , par M_2 le point de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ passe par O , par M_3 le point de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à Ox , par M_4 le point d'inflexion de $\mathcal{C}$. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses respectives des points M_1, M_2, M_3, M_4 .

Que peut-on dire de la suite x_1, x_2, x_3, x_4 ?

- 29 Soit la fonction $f: x \mapsto \text{Log} |\text{Log } x|$. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 30 Soit la fonction $L_1: x \mapsto \text{Log } x$.

Soient n un entier naturel strictement supérieur à 1 et la fonction

$$L_n: x \mapsto \text{Log}(L_{n-1}(x)).$$

La fonction L_2 , par exemple, est donc la fonction $x \mapsto \text{Log}(\text{Log } x)$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions L_1, L_2, L_3 et plus généralement de L_n , pour tout entier n .

2° Étudier la dérivabilité de la fonction L_n et déterminer, si elle existe, sa fonction dérivée L'_n .

3° Démontrer la proposition suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad 0 < L_2(k+1) - L_2(k) < \frac{1}{k \text{Log } k}.$$

On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction L_2 (cf. exercice n° 47 du chapitre 7).

$$4^\circ \text{ On pose : } \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad S_n = \frac{1}{2 \text{Log } 2} + \frac{1}{3 \text{Log } 3} + \dots + \frac{1}{n \text{Log } n}.$$

Utiliser le 3° pour démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite $+\infty$.

- 31 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & f(x) = x^3 \text{Log } |x| \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Étudier la fonction f , en particulier la continuité et la dérivabilité en 0. Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Ox , la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives : $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

3° Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & g(x) = x^3 \text{Log} \frac{1}{x^2} \\ & g(0) = 0. \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède l'étude de g et tracer sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

* 32 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2}{\text{Log } x^3}$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions exponentielles.

◆ Dans les exercices suivants (nos 33 à 42), résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

33 $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0.$

34 $2e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\text{Log}2}$

35 $2^x + \frac{6}{2^x} = 5.$

36 $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} - 2^6 = 0.$

37 $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0.$

38 $(x^2 - 1)e^{\text{Log}(x-2)} = \text{Log}(e^{x+1}).$

39 $e^{4x+2} - \frac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1.$

40 $4e^{2x} + 15e^{-x} = 19.$

41 $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right).$

42 $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0.$

43 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 4^x 5^y = 5^{2x+1} \\ 12^x 9^y = 5^{2y+1}. \end{cases}$$

44 1° Soit m un nombre réel.

Déterminer, suivant le réel m , le nombre de solutions de l'équation : $(m-1)e^x + me^{-x} = 2m.$

2° Résoudre cette équation dans le cas : $m = \frac{1}{4}.$

45 1° Même question que pour le n° 44 avec l'équation : $e^{2x} + 4me^x - 2m + 2 = 0.$

2° Résoudre cette équation dans le cas : $m = -1.$

46 Soit a un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1. \end{cases}$

(Baccalauréat 1973.)

47 Même question que pour le n° 46, avec : $\begin{cases} e^x e^y = a^2 \\ xy = 1. \end{cases}$

48 1° Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto e^x - x$.

En déduire la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$.

2° Démontrer, par récurrence sur l'entier naturel non nul n , que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > \frac{x^n}{n!}.$$

3° Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$ admet en $+\infty$ une limite égale à $+\infty$.

49 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2° Démontrer que f est dérivable en tout point x non nul. Calculer $f'(x)$.

3° A l'aide de la définition, démontrer que f est dérivable en 0.

4° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (Baccalauréat 1973.)

50 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } |x| < 1, f(x) = e^{\frac{1}{x^2}-1} \\ \text{pour } |x| \geq 1, f(x) = 0. \end{cases}$$

1° Démontrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2° Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On étudiera la dérivabilité aux points 1 et -1 en revenant à la définition.

3° Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Baccalauréat 1973.)

51 Soit la fonction $f: x \mapsto x - 1 + e^{-x}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soient m un réel positif et $S(m)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe Oy , la courbe C et les droites d'équations respectives : $y = x - 1$ et $x = m$. Calculer $S(m)$.

La fonction $m \mapsto S(m)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

52 Soit la fonction $f: x \mapsto (1-x)e^x$. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.

53 Soit la fonction $f: x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

* 54 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

55 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- * 56 Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{e^x - e^{2x}}$.
- 1° Quel est l'ensemble de définition de f ?
 - 2° La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet-elle une limite à droite en 0?
 - 3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est la tangente à C en 0?

(Baccalauréat 1973.)

- * 57 Soit la fonction $f: x \mapsto xe^{1x+1}$.
Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- * 58 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{e^{\cos x}}$.
- 1° Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'étude de f .
 - 2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe C admet-elle une tangente au point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

On pourra étudier si la fonction $h \mapsto \text{Log} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h}$ admet une limite à droite en 0.

(Baccalauréat 1973.)

- * 59 Soit la fonction $f: x \mapsto |e^{2x} - e^x| - 2$.
- 1° La fonction f est-elle continue, dérivable en 0?
 - 2° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - 3° Soit A le point d'intersection de C et de Oy . Soit λ un réel négatif. Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 0$, par la courbe C et par la droite passant par A et parallèle à Ox .

60 1° Soient n un entier rationnel et la fonction $g: x \mapsto e^x(x - n)$.
La fonction g est-elle dérivable? Si oui, déterminer sa fonction dérivée.

2° Soit la fonction $f: x \mapsto e^x(x - E(x))$. (Nous rappelons que $E(x)$ désigne la partie entière du réel x). Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Soit k un entier naturel non nul. Calculer $\int_0^k f(x) dx$.

- * 61 Soit λ un réel non nul. Soient la fonction $f_\lambda: x \mapsto xe^{-\lambda x}$ et C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Démontrer que toutes les courbes C_λ ont un point commun unique et qu'elles y admettent la même tangente.

2° Étudier la fonction f_1 et tracer la courbe C_1 .

3° Étudier la fonction f_{-1} et tracer la courbe C_{-1} .

4° Soit α un nombre réel strictement positif.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer le réel $\int_0^\alpha f_1(x) dx$, que l'on note $S(\alpha)$.

La fonction $\alpha \mapsto S(\alpha)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

(Baccalauréat 1973.)

62 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soient la fonction $f_n: x \mapsto x^n e^x$ et C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Démontrer que la fonction f_n admet en $-\infty$ une limite égale à 0.

On pourra calculer $\text{Log}(f_n(x))$.

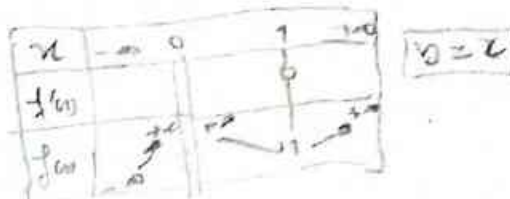
2° Étudier la fonction f_n .

3° Tracer les courbes C_1 et C_2 .

4° Soit X un nombre réel. Calculer $J(X) = \int_0^X f_1(x) dx$.

La fonction $X \mapsto J(X)$ admet-elle une limite en $-\infty$? (Baccalauréat 1973.)

Calcul de primitives.



63 Soit la fonction $f: x \mapsto x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.

2° Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations respectives: $y = 2$, $x = e$, $x = 1$.

64 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe Ox et la droite d'équation: $x = 1$.

65 Soit la fonction $f: x \mapsto x + 1 + \frac{4}{|x-1|}$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , son asymptote oblique et les droites d'équations respectives: $x = 1 + e$ et $x = 1 + e^2$.

66 Soient la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ et D_f son ensemble de définition.

1° Déterminer trois réels a, b, c tels que l'on ait:

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

2° Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.

La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

67 Soient la fonction $f: x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$ et D_f l'ensemble de définition de f .

1° Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que l'on ait:

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) = A + B \left(\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \right).$$

En déduire les primitives de la fonction f .

2° Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

68 Soient la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
 1° Étudier les fonctions f et g et tracer leurs courbes représentatives respectives C_1 et C_2 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soit λ un nombre réel supérieur à 2. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe C_1 , la courbe C_2 et les droites d'équations respectives : $x = 2$ et $x = \lambda$.

La fonction $\lambda \mapsto \mathcal{A}(\lambda)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

69 1° Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad \frac{2x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2° Soit t un nombre réel supérieur à 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1(t) = \int_4^t \frac{dx}{x-3} \quad \text{et} \quad I_2(t) = \int_4^t \frac{2x}{x+1} dx.$$

3° La fonction $t \mapsto I_2(t)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

70 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\text{Log } x}{x}$.

1° Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Déterminer les primitives de la fonction f .

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe Ox et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e^2$.

71 1° Soient les fonctions $g: x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{t \text{ Log } t}$ et $h: x \mapsto \int_2^{x^2} \frac{dt}{t \text{ Log } t}$.

Les fonctions g et h sont-elles dérivables ? Si oui, sur quel intervalle ? Déterminer leurs fonctions dérivées g' et h' .

2° Que peut-on en déduire pour la fonction f définie sur $]1, +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \text{ Log } t} ?$$

3° Calculer l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \text{ Log } t}$ pour tout réel x supérieur à 1.

72 Soit n un entier naturel. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_1^e x^n \text{Log } x \, dx$.

73 Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_1^x t (\text{Log } t)^n dt.$$

1° Soit x un élément quelconque de $]0, +\infty[$.

Établir une relation de récurrence entre $f_n(x)$ et $f_{n-1}(x)$.

2° En déduire une expression du réel $f_n(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

3° La fonction f_n admet-elle une limite à droite en 0 ?

74 1° Calculer $\int_1^x 2t e^{t^2+1} dt$.

2° En déduire le calcul, à l'aide d'une intégration par parties, de l'intégrale $\int_1^x 2t^3 e^{t^2+1} dt$.

(Baccalauréat 1973.)

75 A l'aide d'intégrations par parties successives, calculer : $\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x}{2}} dx$.
(Baccalauréat 1973.)

* **76** On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx.$$

Déterminer les réels A et B; on pourra calculer $A + B$ et $B - A$.

77 Soit x un nombre réel.

Calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{4} e^t \sin t \, dt$, à l'aide d'intégrations par parties.

78 1° Soient a et b deux nombres réels.

Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que la fonction $x \mapsto (Ax + B)e^x$ soit une primitive de la fonction $x \mapsto (ax + b)e^x$.

En déduire les primitives des fonctions :

$$x \mapsto (x - 1)e^x \quad \text{et} \quad x \mapsto (2x - 3)e^x.$$

2° Soient a, b, c trois nombres réels. Démontrer qu'il existe trois nombres réels A, B, C tels que la fonction $x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^x$ soit une primitive de la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$.

En déduire les primitives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad \text{et} \quad x \mapsto (x^2 + 2x - 1)e^x.$$

79 1° Soient a, b, λ, μ quatre nombres réels.

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x} (a \cos \mu x + b \sin \mu x)$.

La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer sa fonction dérivée.

2° Soit la fonction $g : x \mapsto e^{-x} (\sin 2x - 5 \cos 2x)$. Utiliser le résultat du 1° pour déterminer la primitive de g qui prend la valeur 3 en 0.

Étude de fonctions.

80 Soit la fonction $f : x \mapsto \text{Log}(e^x - 1)$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.

2° La fonction f admet-elle une application réciproque? Si oui, définir cette application réciproque et tracer sa courbe représentative dans le même repère orthonormé.

81 Soit la fonction $f : x \mapsto x + \text{Log}(2 - e^x)$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.

2° Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont solutions de l'inéquation : $e^{y-x} + e^x > 2$.

* **82** Soient la fonction $f : x \mapsto \text{Log}|e^x - 1|$ et la fonction :

$$g : x \mapsto \text{Log}(e^x + 1).$$

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.

2° Étudier la fonction g et tracer sa courbe représentative C' dans le même repère.

3° Démontrer que les courbes C et C' sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

- * 83 Étudier la fonction $x \mapsto e^{-x} \operatorname{Log} x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(Baccalauréat 1973.)

- * 84 Soit la fonction $f: x \mapsto x - \frac{1}{2} \operatorname{Log} |2e^x - 1|$.

1° Étudier la fonction f .

On pourra écrire : $2e^x - 1 = 2e^x \left(1 - \frac{1}{2}e^{-x}\right)$.

2° Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

- * 85 Soit la fonction $f: x \mapsto e^{-x} \operatorname{Log} (1 + e^{2x})$.

1° Soit la fonction φ définie par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \varphi(t) = \frac{2t}{1+t} - \operatorname{Log} (1+t).$$

Démontrer qu'il existe un seul nombre réel a supérieur à 1 tel que l'on ait : $\varphi(a) = 0$.

2° Étudier les variations de la fonction f ; on établira une relation entre $f'(x)$ et $\varphi(e^{2x})$.

3° Déterminer, si elles existent, les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4° Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 86 Soient λ un nombre réel et f_λ la fonction $x \mapsto \lambda 2^{-x} + 2^x$.

1° Étudier la fonction f_λ , suivant le réel λ .

2° Tracer, dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives respectives C_{-1} , C_0 , C_1 des fonctions f_{-1} , f_0 , f_1 .

3° Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_{-1} , la courbe C_1 et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 1$.

- 87 Reprendre l'exercice n° 74 du chapitre 8.

On veut encadrer le nombre réel x_n pour tout entier naturel n supérieur à 2.

1° Comparer les nombres réels x_n et 1.

2° Démontrer que la différence $x_n - \frac{1}{2}$ a le même signe que la différence $x_n^n - \frac{1}{2^n}$.

3° Soit la fonction $\varphi: x \mapsto 2^{x+1} - x + 2$.

Étudier la fonction φ et démontrer que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi(x) > 0$.

4° Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 4, le réel x_n appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

- * 88 Soit la fonction $f: x \mapsto |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

1° La fonction f est-elle continue ? Si oui, sur quels intervalles ?

2° La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Si oui, calculer cette limite.

3° La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Démontrer qu'il existe un prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^*$. Soit F ce prolongement par continuité.

4° Étudier les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5° La fonction F est-elle dérivable ? sur quels intervalles ? Déterminer sa fonction dérivée F' .

6° Étudier la fonction f ; on sera conduit à considérer la fonction :

$$x \mapsto \frac{x-1}{x} - \operatorname{Log} |x|.$$

7° Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Calcul numérique.

- 89 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$6(\log x)^2 - 19 \log x - 7 = 0.$$

On déterminera chaque solution avec la meilleure précision permise par la table de logarithmes utilisée.

- 90 Même question que pour le n° 89 avec :

$$4(\log x)^2 - \log x - 3 = 0.$$

- 91 Même question que pour le n° 89 avec :

$$\cos^2 (\text{Log } x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\text{Log } x^2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- 92 Même question que pour le n° 89 avec :

$$e^x - 3,75 e^{-x} - 1,75 = 0.$$

- 93 Même question que pour le n° 89 avec :

$$5 \sin x + \frac{2}{5 \sin x} = 3.$$

- 94 Soit s un nombre réel.

1° Déterminer les nombres réels x tels que l'on ait : $e^x - e^{-x} = 2s$.

2° On suppose que $s = 3$. Déterminer x avec la meilleure précision permise par la table utilisée.

3° Même question que pour le 2° avec $s = -2$.

- 95 Soient α et β deux nombres réels positifs.

1° Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} xy = \alpha \\ \frac{y}{x} = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

2° On suppose : $\alpha = 2,1514$ et $\beta = 0,513$.

Donner des encadrements à 10^{-3} près de chacune des solutions du système (1)
(Baccalauréat 1972.)

- 96 Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x} \sin x$.

1° Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f' .

2° Démontrer que les solutions de l'équation : $f'(x) = 0$ sont en progression arithmétique et que leurs images par f sont en progression géométrique de raison $-e^{-\pi}$.

3° Calculer la raison de cette progression géométrique, avec la meilleure précision permise par les tables de logarithmes à cinq décimales.
(Baccalauréat 1973.)

- 97 1° Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}$ et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soit m un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe Ox et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = m$.

3° Déterminer m pour que cette aire soit égale à $\sqrt{2}$.

98 Calculer avec la meilleure précision permise par les tables l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+x} - \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \right) dx.$$

99 Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1° Calculer en fonction de p et de q l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1} \right) dx.$$

2° Calculer, à 2.10^{-4} près, la valeur numérique du réel

$$\text{Log}(p+q) + \frac{1}{2} \text{Log}(p^2+q^2) + \frac{1}{3} \text{Log}(p^3+q^3) - 3 \text{Log } q$$

pour $p=3$ et $q=4$.

3° Déduire des deux premières questions une valeur approchée de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^3+1} \right) dx.$$

100 1° On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx.$$

Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire les valeurs respectives de I et de J .

2° Déterminer des valeurs approchées respectives à 10^{-2} près de I et de J .

(Baccalauréat 1973.)

101 Soit α un nombre réel strictement positif.

$$\text{On pose : } I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \cos(\text{Log } x) dx.$$

1° Calculer $I(\alpha)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

2° Déterminer une valeur approchée de $I(e^{\pi})$ avec la meilleure précision permise par les tables de logarithmes utilisées.

(Baccalauréat 1973.)

12.

Probabilités

sur un ensemble fini

En classe de Première, nous avons introduit la notion d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ où Ω est un ensemble fini non vide, appelé univers, où $\mathcal{F}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω et où P est une application particulière de $\mathcal{F}(\Omega)$ dans $[0,1]$, appelée probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$. Un tel espace probabilisé fini permet d'étudier des expériences qui comportent un nombre fini de résultats possibles : Ω est alors l'ensemble de ces résultats et $\mathcal{F}(\Omega)$ est l'ensemble des événements que l'on peut considérer.

Il existe aussi des expériences qui comportent une infinité de résultats possibles. On choisit alors encore pour Ω l'ensemble des résultats, mais, dans ce cas, on est conduit à introduire la notion de probabilité sur des couples $(\Omega, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\Omega)$ qui possède certaines propriétés bien précises.

Le programme de la classe de Terminale comporte l'étude de ces sous-ensembles de $\mathcal{F}(\Omega)$, mais uniquement dans le cas où Ω est un ensemble fini.

1. Espaces probabilisés finis.

Dans ce paragraphe, nous désignons par Ω un ensemble fini non vide. Soit A un sous-ensemble quelconque de Ω ; désignons par $\bar{A}$ le complémentaire de A dans Ω .

Espace probabilisable fini.

1.1 DÉFINITION : Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\Omega)$. $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω (ou une algèbre de Boole de parties de Ω) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$;
- $\forall A \in \mathcal{B}, \bar{A} \in \mathcal{B}$;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, A \cup B \in \mathcal{B}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{B})$ est appelé **espace probabilisable fini**.

Propriétés.

1.2 Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω . On a les propriétés suivantes :

P1

$$(\Omega \in \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad (\emptyset \in \mathcal{B})$$

Démonstration :

$\mathcal{B}$ est non vide; il existe donc au moins un élément A de $\mathcal{B}$.

On a alors : $(A \in \mathcal{B} \implies \bar{A} \in \mathcal{B})$, et par suite : $A \cup \bar{A} \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire : $\Omega \in \mathcal{B}$.
Puisque Ω est élément de $\mathcal{B}$, son complémentaire est aussi élément de $\mathcal{B}$, et par suite on a : $\emptyset \in \mathcal{B}$. ■

P2

$$\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, \quad A \cap B \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad A - B \in \mathcal{B}$$

Démonstration :

Soient A et B deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$.

• On a : $(A \in \mathcal{B} \implies \bar{A} \in \mathcal{B})$ et $(B \in \mathcal{B} \implies \bar{B} \in \mathcal{B})$.

On a donc : $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{B}$.

De l'égalité : $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, il résulte que l'on a : $\overline{A \cap B} \in \mathcal{B}$.

Le complémentaire de $\overline{A \cap B}$, c'est-à-dire $A \cap B$, est donc aussi un élément de $\mathcal{B}$ et par suite on a : $A \cap B \in \mathcal{B}$.

• Des propositions : $A \in \mathcal{B}$ et $\bar{B} \in \mathcal{B}$, il résulte que l'on a : $A \cap \bar{B} \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire : $A - B \in \mathcal{B}$. ■

P3

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{B}^n, \quad (A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{B}).$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette propriété par récurrence sur n .

Exemples.

1. L'ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω , appelée **tribu grossière**; c'est la plus petite tribu, au sens de l'inclusion.

2. L'ensemble $\mathcal{F}(\Omega)$ est une tribu sur Ω ; c'est la plus grande tribu, au sens de l'inclusion. On retrouve alors le cas étudié en classe de Première.

3. Supposons que l'ensemble Ω ait au moins deux éléments. Soit A un sous-ensemble propre de Ω .

L'ensemble $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω , quelquefois appelée **tribu de Bernoulli** ou **tribu engendrée par A** .

4. Plus généralement soit $\{A_1, \dots, A_p\}$ une partition de Ω .

L'ensemble constitué des réunions finies d'éléments de cette partition et de l'ensemble vide est une tribu sur Ω , appelée **tribu engendrée par la partition $\{A_1, \dots, A_p\}$** .

En particulier, l'ensemble des singletons de Ω est une partition de Ω . La tribu engendrée par cette partition est l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega)$.

Remarque : Réciproquement, si Ω est fini, on démontre que toute tribu $\mathcal{B}$ sur Ω est la tribu engendrée par une partition $\{A_1, \dots, A_p\}$ de Ω . On peut alors identifier $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}(\{A_1, \dots, A_p\})$.

Dans le cas où l'univers est fini, on peut donc se passer de la notion de tribu, ce qui est d'ailleurs le point de vue adopté en classe de Première. Toutefois, cette notion s'avère indispensable dans le développement ultérieur de la théorie des probabilités; c'est pourquoi, conformément au programme, nous l'utilisons dès maintenant.

1.3 Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable fini.

Nous rappelons dans le tableau suivant les terminologies couramment employées.

Langage probabiliste	Langage ensembliste
événement	élément de $\mathcal{B}$
événement élémentaire	singleton de Ω
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement contraire de A	$\bar{A}$
événements incompatibles A et B	éléments A et B de $\mathcal{B}$ tels que : $A \cap B = \emptyset$

Espace probabilisé fini.

1.4 DÉFINITION : Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable fini et P une application de $\mathcal{B}$ dans $[0, 1]$.

P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $P(\Omega) = 1$;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, ((A \cap B = \emptyset) \implies (P(A \cup B) = P(A) + P(B)))$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est appelé **espace probabilisé fini**.

La deuxième condition est souvent appelée « axiome des probabilités totales » ; on dit aussi que l'application P est additive.

Remarque : On peut toujours supposer, quitte à restreindre l'univers, que la probabilité de tout événement élémentaire est non nulle ; dans la suite, nous nous plaçons toujours dans ce cas.

Propriétés.

1.5 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini. On a les propriétés suivantes :

P1

$$\forall A \in \mathcal{B}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Démonstration :

Soit A un élément quelconque de $\mathcal{B}$.

Le complémentaire $\bar{A}$ de A dans Ω est aussi un élément de $\mathcal{B}$.

De la proposition : $A \cap \bar{A} = \emptyset$, il résulte que l'on a : $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$,

c'est-à-dire : $P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$.

Par suite on a : $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$. ■

Conséquence.

Prenons : $A = \Omega$. On a alors : $P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$, c'est-à-dire :

$$P(\emptyset) = 0.$$

P2 Soient n éléments $A_1, \dots, A_n$ de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints.
On a : $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Démonstration :

- De la définition 1.4, il résulte que la propriété est vraie pour $n = 2$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Considérons alors $n + 1$ éléments $A_1, \dots, A_{n+1}$ de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints.

De la propriété P_3 du paragraphe 1.2, il résulte que $A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$ est un élément de $\mathcal{B}$.

$$\text{On a : } (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}).$$

Les ensembles $A_1, \dots, A_{n+1}$ sont disjoints deux à deux.

$$\text{On a donc : } (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1} = \emptyset,$$

$$\text{et par suite : } P((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup \dots \cup A_n) + P(A_{n+1}).$$

De l'hypothèse faite, il résulte que l'on a :

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n), \text{ et par suite :}$$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) = P(A_1) + \dots + P(A_{n+1}).$$

- La propriété est donc vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2. ■

P3 $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, ((A \subset B) \implies (P(A) \leq P(B)))$.

Démonstration :

Soient A et B deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$.

De la propriété P_2 du paragraphe 1.2, il résulte que $A \cap B$ et $B - A$ sont des éléments de $\mathcal{B}$.

Des propositions : $(B - A) \cup (A \cap B) = B$ et $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, il résulte que l'on a : $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$.

D'autre part, on a : $(A \subset B) \implies (A \cap B = A)$.

$$\text{On a donc : } P(B) = P(B - A) + P(A).$$

Puisque P est une application de $\mathcal{B}$ dans $[0,1]$, on a : $P(B - A) \geq 0$, et par suite : $P(B) \geq P(A)$. ■

P4 $\forall (A, B) \in \mathcal{B}^2, P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

Démonstration :

Soient A et B deux éléments quelconques de $\mathcal{B}$.

Au cours de la démonstration de la propriété P_3 , nous avons obtenu la propriété suivante : $\forall B \in \mathcal{B}, P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$.

$$\text{On a donc : } P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$\text{et : } P(B) = P(B - A) + P(A \cap B),$$

$$\text{et par suite : } P(A) + P(B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B).$$

Les ensembles $A - B, A \cap B, B - A$ sont des éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à $A \cup B$.

De la propriété P_2 , il résulte que l'on a : $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$. ■

Exemples.

1. Considérons la tribu grossière $\{\emptyset, \Omega\}$ sur Ω .

Il n'existe qu'une seule probabilité sur $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$; c'est l'application P définie par : $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

2. Soient A un sous-ensemble propre de Ω et $\mathcal{B}$ la tribu de Bernoulli $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$. Soit p un élément de $]0, 1[$.

Considérons l'application P de $\mathcal{B}$ dans $[0, 1]$, définie par :

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p, \quad P(\Omega) = 1.$$

Cette application est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Une telle application est déterminée par la donnée de p ; il existe donc une infinité de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{B})$; c'est l'expérience qui nous guidera dans le choix de p .

3. Considérons l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega))$.

Soit $A = \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$ un élément quelconque de $\mathcal{T}(\Omega)$. On a alors : $A = \bigcup_{i=1}^q \{\omega_i\}$.

Les singletons de Ω sont deux à deux disjoints. De la propriété P_2 , il résulte que l'on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^q P(\{\omega_i\}).$$

Pour déterminer une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega))$, il suffit donc

de connaître pour tout élément ω de Ω le réel $P(\{\omega\})$, c'est-à-dire de connaître la probabilité de tout événement élémentaire.

Événements équiprobables.

1.6 DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{B}$.

A et B sont des événements équiprobables si et seulement si on a : $P(A) = P(B)$.

Supposons que l'on ait : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{T}(\Omega)$, et que tous les singletons de Ω soient équiprobables.

On a donc : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$.

On a alors : $P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = nP(\{\omega_i\})$.

De l'égalité : $P(\Omega) = 1$, il résulte que l'on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$.

Soit A un élément quelconque de $\mathcal{T}(\Omega)$, de cardinal n' .

On a alors : $P(A) = P\left(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = n'P(\{\omega_i\})$

et par suite : $P(A) = \frac{n'}{n}$, c'est-à-dire : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini tel que tous les singletons de Ω soient équiprobables.

On a : $\forall A \in \mathcal{T}(\Omega), \quad P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.

Remarque : On utilise par exemple ce résultat dans tous les cas où on emploie l'expression "tirer au hasard", ou toute autre expression analogue.

Exemples.

1. Considérons un dé cubique non pipé.

On lance ce dé, on attend qu'il s'immobilise et on observe le chiffre marqué sur la face supérieure. On a donc : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les six événements élémentaires sont équiprobables.

On a donc : $\forall i \in \Omega, P(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

Soit A l'événement "le chiffre marqué est au plus 2".

On a donc : $A = \{1, 2\}$,

et par suite : $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Considérons deux pièces de monnaie discernables et non truquées.

On lance ces deux pièces, on attend qu'elles retombent et on observe le côté visible de chacune des pièces.

Désignons par π le côté pile et par F le côté face.

On a : $\Omega = \{(\pi, \pi), (\pi, F), (F, \pi), (F, F)\}$.

Les quatre événements élémentaires sont équiprobables.

On a donc : $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$.

Soit A l'événement "il y a au moins un côté face".

On a donc : $A = \{(\pi, F), (F, \pi), (F, F)\}$,

et par suite : $P(A) = \frac{3}{4}$.

3. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

L'ensemble Ω est donc l'ensemble des cartes du jeu.

Les 32 événements élémentaires sont équiprobables.

On a donc : $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{32}$.

Soit A l'événement "la carte tirée est l'as de pique".

L'ensemble A a un seul élément : l'as de pique; on a donc : $P(A) = \frac{1}{32}$.

Soit B l'événement "la carte tirée est un roi".

L'ensemble B a quatre éléments : les quatre rois du jeu; on a donc : $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Soit C l'événement "la carte tirée est un cœur".

L'ensemble C a huit éléments : les huit cœurs du jeu; on a donc : $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

4. On tire au hasard et simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes.

L'ensemble Ω est donc l'ensemble des paires de l'ensemble des cartes du jeu.

On a : $\text{card } \Omega = C_{32}^2$

et par suite : $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{32}^2} = \frac{1}{496}$.

Soit A l'événement "les deux cartes tirées sont des rois".

L'ensemble A a donc pour éléments les paires de l'ensemble des quatre rois; on a :

$\text{card } A = C_4^2 = 6$ et par suite : $P(A) = \frac{6}{496} = 0,012$.

2. Variables aléatoires réelles.

Dans ce paragraphe, nous désignons par Ω un ensemble fini, par $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω et par P une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Définition.

En classe de Première, nous avons appelé variable aléatoire réelle définie sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre nous avons introduit la notion de tribu; nous définissons alors une variable aléatoire réelle de la manière suivante :

- 2.1 **DÉFINITION :** Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
 X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$ (ou un aléa numérique défini sur $(\Omega, \mathcal{B})$) si et seulement si elle satisfait à la proposition suivante :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{B}$.

Remarques : 1. L'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ par X du singleton $\{x\}$.

2. Dans le cas où la tribu $\mathcal{B}$ est égale à $\mathcal{F}(\Omega)$, de la proposition :

$\forall x \in \mathbb{R}, (\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \subset \Omega \iff \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}(\Omega))$,

il résulte que toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$. On retrouve ainsi la définition donnée en classe de Première.

3. Contrairement aux définitions 1.1 et 1.4, la définition d'une variable aléatoire réelle donnée dans ce paragraphe n'est plus valable si l'ensemble Ω est infini.

Convention d'écriture :

Les probabilistes ont l'habitude d'écrire :

$\{X = x\}$ pour désigner l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$, c'est-à-dire $X^{-1}(\{x\})$ et de même : $\{X < x\}$ pour désigner l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$.

Exemples.

1. Considérons la tribu grossière $\{\emptyset, \Omega\}$ sur Ω . Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Cherchons à quelle condition X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$.

On doit donc avoir : $\forall x \in \mathbb{R}, \{X = x\} \in \{\emptyset, \Omega\}$, c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{R}, (\{X = x\} = \emptyset \text{ ou } \{X = x\} = \Omega)$.

Soit x un réel quelconque;

si l'on a : $\{X = x\} = \emptyset$, alors il n'existe pas d'élément de Ω qui ait pour image par X le réel x ;

si l'on a : $\{X = x\} = \Omega$, alors tous les éléments de Ω ont pour image par X le réel x . Puisque X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, il existe un et un seul réel x_0 tel que

l'on ait : $\{X = x_0\} = \Omega$; pour tout réel x , distinct de x_0 , on a alors : $\{X = x\} = \emptyset$.

Les seules applications de Ω dans $\mathbb{R}$, qui sont des variables aléatoires définies sur

$(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$, sont donc les applications constantes de Ω dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable fini. Soit A un élément de $\mathcal{B}$, différent de $\emptyset$ et de Ω .

Soit φ_A la fonction caractéristique de A , c'est-à-dire l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall \omega \in A, \varphi_A(\omega) = 1$
 $\forall \omega \notin A, \varphi_A(\omega) = 0$.

Cherchons si φ_A est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \{\omega \in \Omega \mid \varphi_A(\omega) = x\} = \emptyset$

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi_A(\omega) = 1\} = A$$

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi_A(\omega) = 0\} = \bar{A}.$$

La tribu $\mathcal{B}$ contient $\emptyset$ et A , et par suite $\bar{A}$.

φ_A est donc une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

3. Considérons deux dés discernables D_1 et D_2 .

On jette ces deux dés simultanément, on attend qu'ils s'immobilisent et on observe les chiffres marqués sur les faces supérieures.

L'ensemble Ω a 36 éléments; un événement élémentaire est "obtenir le chiffre i sur D_1 et le chiffre j sur D_2 "; nous le notons $\{\omega_{ij}\}$.

Considérons l'application X de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_{ij} \longmapsto i + j.$$

L'application X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$.

Propriétés.

2.2 On a les propriétés suivantes :

P1 L'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Utilisons le théorème 3.3 du chapitre 1 du tome 1.

• Soit $\tilde{0}$ l'application nulle de Ω dans $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*, \{\tilde{0} = x\} = \emptyset)$ et $(\{\tilde{0} = 0\} = \Omega)$

et par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, \{\tilde{0} = x\} \in \mathcal{B}$.

L'application $\tilde{0}$ est donc une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$; l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$ est non vide.

• Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Soient $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$ les images respectives de Ω par X et par Y .

On a alors : $(X + Y)(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in \{1, \dots, k\}, \exists j \in \{1, \dots, q\}, x = x_i + y_j\}$

Soient x un réel quelconque et K l'ensemble fini des couples (i, j) de $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, q\}$ tels que l'on ait : $x = x_i + y_j$.

Si $K = \emptyset$, on a : $\{\omega \in \Omega \mid (X + Y)(\omega) = x\} = \emptyset$. Cet ensemble appartient à $\mathcal{B}$.

Si $K \neq \emptyset$, on a : $\{\omega \in \Omega \mid (X + Y)(\omega) = x\} = \bigcup_{(i, j) \in K} (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.

Pour tout couple (i, j) de K , les ensembles $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_j\}$ sont des éléments de $\mathcal{B}$; leur intersection est encore un élément de $\mathcal{B}$; il en est donc de même de la réunion finie $\bigcup_{(i, j) \in K} (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.

Par suite, $X + Y$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

• Soient λ un réel quelconque et X une variable aléatoire réelle quelconque définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Si $\lambda = 0$, on a : $\lambda X = \tilde{0}$. C'est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Si $\lambda \neq 0$, on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}, \left(((\lambda X)(\omega) = x) \iff (\lambda X(\omega) = x) \iff \left(X(\omega) = \frac{x}{\lambda} \right) \right)$$

et par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, \{\lambda X = x\} = \left\{ X = \frac{x}{\lambda} \right\}$.

De la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ X = \frac{x}{\lambda} \right\} \in \mathcal{B}$, il résulte que λX est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$. ■

P2 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$. L'application XY de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Démonstration :

Soient $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$.

On a alors : $(XY)(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in \{1, \dots, k\}, \exists j \in \{1, \dots, q\}, x = x_i y_j\}$.

Soient x un réel quelconque et K l'ensemble fini des couples (i, j) de $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, q\}$ tels que l'on ait : $x = x_i y_j$.

Si $K = \emptyset$, on a : $\{\omega \in \Omega \mid (XY)(\omega) = x\} = \emptyset$. Cet ensemble appartient à $\mathcal{B}$.

Si $K \neq \emptyset$, on a : $\{\omega \in \Omega \mid (XY)(\omega) = x\} = \bigcup_{(i,j) \in K} (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.

Pour tout couple (i, j) de K , les ensembles $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_j\}$ appartiennent à $\mathcal{B}$; leur intersection est donc un élément de $\mathcal{B}$ et il en est de même de la réunion

finie $\bigcup_{(i,j) \in K} (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.

Par suite XY est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$. ■

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2.3 Reprenons l'exemple 3 du paragraphe 2.1. On peut être conduit à poser des questions du type : « Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 8 ? » ou « Quelle est la probabilité d'obtenir au moins le nombre 10 ? ».

On ne s'intéresse donc plus directement aux éléments de Ω , mais à ceux de $X(\Omega)$

et on cherche une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

Dans le cas général, soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

L'ensemble $X(\Omega)$ est fini et par suite $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ est un espace probabilisable fini. Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble de $X(\Omega)$.

On a : $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \bigcup_{i=1}^n \{X = x_i\}$.

Puisque X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$, on a :

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \{X = x_i\} \in \mathcal{B}$, et par suite : $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

On peut donc définir une application de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0, 1]$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & X^{-1}(A) & \longmapsto & P(X^{-1}(A)). \end{array}$$

On a alors le théorème suivant :

2.4 THÉORÈME : Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

L'application P_1 de $\mathcal{F}(X(\Omega))$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{F}(X(\Omega)), \quad P_1(A) = P(X^{-1}(A))$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{F}(X(\Omega)))$.

Démonstration :

• De la proposition : $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in X(\Omega)\} = \Omega$, il résulte que l'on a : $P_1(X(\Omega)) = P(\Omega) = 1$.

• Soient A et B deux éléments quelconques de $\mathcal{F}(X(\Omega))$ disjoints.

$$\text{On a : } \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \cup B\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

$$\text{et : } \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = \emptyset.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_1(A \cup B) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \cup B\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) + P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \\ &= P_1(A) + P_1(B). \end{aligned}$$

L'application P_1 est donc une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{F}(X(\Omega)))$. ■

2.5 DÉFINITION : Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

On appelle loi de probabilité de X ou probabilité image de P par X l'application de $\mathcal{F}(X(\Omega))$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X(\Omega)) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(X^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Pour définir la loi de probabilité de X , il suffit donc de connaître pour tout élément x de $X(\Omega)$ le réel $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$, noté aussi $P(\{X = x\})$, ou encore plus simplement : $P(X = x)$.

On dit que $P(\{X = x\})$ est la probabilité pour que X prenne la valeur x .

Exemples.

1. Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 1.5, c'est-à-dire l'espace probabilisé fini $(\Omega, \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}, P)$.

Soit φ_A la fonction caractéristique de A ; nous avons démontré que φ_A est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\})$. On a : $\varphi_A(\Omega) = \{0, 1\}$.

La loi de probabilité de X est donc déterminée par :

$$\begin{cases} P(\{\varphi_A = 0\}) = P(\bar{A}) = 1 - p \\ P(\{\varphi_A = 1\}) = P(A) = p. \end{cases}$$

2. On extrait une boule d'une urne qui contient deux boules noires et trois boules blanches et on regarde la couleur de la boule tirée. Désignons par b une boule blanche et par n une boule noire. On a alors : $\Omega = \{n, b\}$, $P(\{n\}) = \frac{2}{5}$, $P(\{b\}) = \frac{3}{5}$.

Soit X la variable aléatoire réelle définie par : $X(b) = 0$, $X(n) = 1$.

La loi de probabilité de X est alors déterminée par :

$$\begin{cases} P(\{X = 0\}) = P(\{b\}) = \frac{3}{5} \\ P(\{X = 1\}) = P(\{n\}) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

3. Reprenons l'exemple 3 du paragraphe 2.1. On a : $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 11, 12\}$.

La loi de probabilité de X est déterminée par la connaissance des réels $P(\{X = x\})$ pour tout élément x de $X(\Omega)$. On a par exemple :

$$\begin{cases} P(\{X = 2\}) = P(\{\omega_{11}\}) = \frac{1}{36} \\ P(\{X = 3\}) = P(\{\omega_{12}, \omega_{21}\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ P(\{X = 6\}) = P(\{\omega_{15}, \omega_{24}, \omega_{33}, \omega_{42}, \omega_{51}\}) = \frac{5}{36} \end{cases}$$

4. Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 1.6 : jet de deux pièces non truquées et discernables.

Soit X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à tout élément de Ω associe le nombre de côtés pile obtenus.

On a donc : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

La loi de probabilité de X est déterminée par :

$$\begin{cases} P(\{X = 0\}) = P(\{(F, F)\}) = \frac{1}{4} \\ P(\{X = 1\}) = P(\{(F, \pi), (\pi, F)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P(\{X = 2\}) = P(\{(\pi, \pi)\}) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

2.6 DÉFINITION : Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X l'application F de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto P(\{X < x\}). \end{aligned}$$

On trouve aussi la notation suivante : $P(X < x)$.

On a donc : $P(\{X < x\}) = P(X < x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\})$.

Exemples.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.

Soient a un nombre réel et X l'application constante de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = a.$$

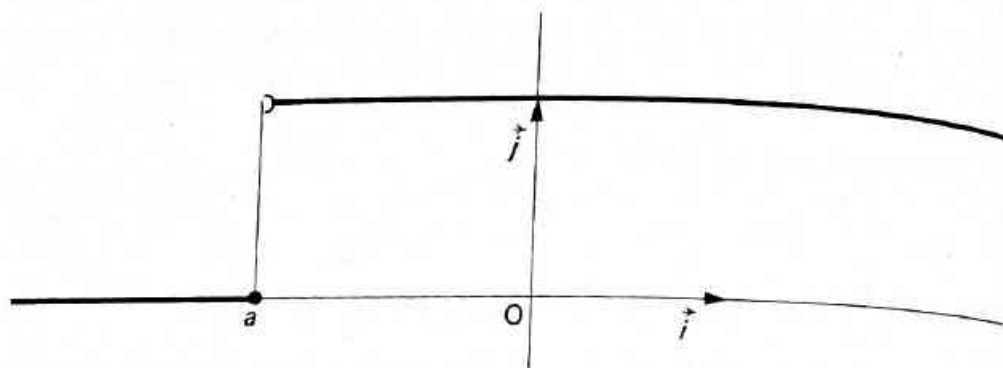
La loi de probabilité de X est donc déterminée par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{a\}, P(\{X = x\}) = P(\emptyset) = 0 \\ P(\{X = a\}) = P(\Omega) = 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition F de X est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, a], & F(x) = P(\{X < x\}) = P(\emptyset) = 0 \\ \forall x \in]a, +\infty[, & F(x) = P(\{X < x\}) = P(\{X = a\}) = 1. \end{cases}$$

La courbe représentative de F dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est donc la suivante :

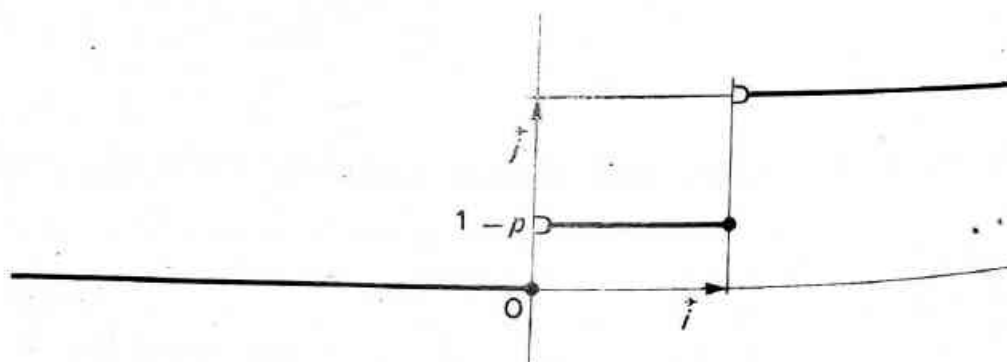


2. Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 2.5.

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle φ_A . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, 0], & F(x) = P(\{\varphi_A < x\}) = P(\emptyset) = 0 \\ \forall x \in]0, 1], & F(x) = P(\{\varphi_A < x\}) = P(\{\varphi_A = 0\}) = P(\bar{A}) = 1 - p \\ \forall x \in]1, +\infty[, & F(x) = P(\{\varphi_A < x\}) = P(\{\varphi_A = 0\} \cup \{\varphi_A = 1\}) \\ & = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

La courbe représentative de F dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est donc la suivante :



3. Reprenons l'exemple 4 du paragraphe 2.5.

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, 0], & F(x) = P(\emptyset) = 0 \\ \forall x \in]0, 1], & F(x) = P(\{X = 0\}) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in]1, 2], & F(x) = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}). \end{aligned}$$

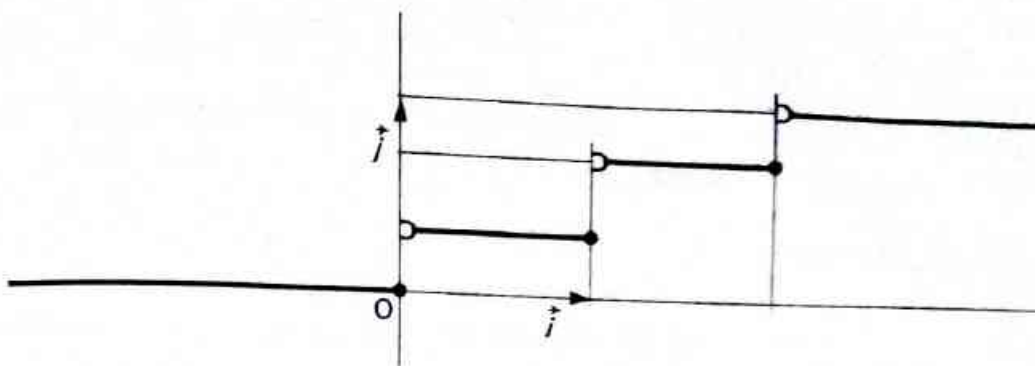
Les ensembles $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$ sont disjoints; on a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, 2], & F(x) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) \\ & = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Enfin on a :

$$\forall x \in]2, +\infty[, F(x) = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = P(\Omega) = 1.$$

La courbe représentative de F dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc la suivante :



Propriétés.

2.7 Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$ et F la fonction de répartition de X .

Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ l'image de Ω par X ; nous supposons ici que l'on a : $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

On a alors les propriétés suivantes :

P1

La fonction F est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, x_1], & F(x) = 0; \\ \forall i \in \{2, \dots, k\}, \forall x \in]x_{i-1}, x_i], & F(x) = \sum_{j=1}^{i-1} P(\{X = x_j\}); \\ \forall x \in]x_k, +\infty[, & F(x) = 1. \end{cases}$$

Démonstration :

• Soit x un réel quelconque de $]-\infty, x_1]$. On a : $\{X < x\} = \emptyset$, et par suite : $F(x) = 0$.

• Soient i un entier quelconque de $\{2, 3, \dots, k\}$ et x un réel quelconque de $]x_{i-1}, x_i]$.

On a : $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}\}$
et par suite $F(x) = P(\{X = x_1\}) + P(\{X = x_2\}) + \dots + P(\{X = x_{i-1}\})$.

• Soit x un réel quelconque de $]x_k, +\infty[$. On a : $\{X < x\} = \Omega$ et par suite : $F(x) = 1$. ■

P2

La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Cette propriété résulte de façon immédiate de la propriété P_1 .

P3

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(\{X \geq x\}) = 1 - F(x).$$

Démonstration :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, P(\{X \geq x\}) = P(\overline{\{X < x\}}) = 1 - P(\{X < x\})$. ■

P4

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \implies (P(\{a \leq X < b\}) = F(b) - F(a)).$$

Démonstration :

Soient a et b deux réels quelconques tels que : $a < b$.

On a : $\{X < b\} = \{X < a\} \cup \{a \leq X < b\}$ et $\{X < a\} \cap \{a \leq X < b\} = \emptyset$.

Par suite, on a : $P(\{X < b\}) = P(\{X < a\}) + P(\{a \leq X < b\})$, c'est-à-dire :
 $F(b) = F(a) + P(\{a \leq X < b\})$. ■

Cette dernière propriété permet de déterminer la loi de probabilité de X si la fonction de répartition de X est donnée.

Exemple.

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et F la fonction de répartition de X définie par :

$$\forall x \in]-\infty, -2], \quad F(x) = 0;$$

$$\forall x \in]-2, 0], \quad F(x) = \frac{1}{3};$$

$$\forall x \in]0, 1], \quad F(x) = \frac{3}{5};$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad F(x) = 1.$$

On a donc : $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$. Déterminons la loi de probabilité de X . On a :

$$P(\{X = -2\}) = P(\{-3 \leq X < -1\}) = F(-1) - F(-3) = \frac{1}{3}.$$

$$P(\{X = 0\}) = P\left(\left\{-1 \leq X < \frac{1}{2}\right\}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1) = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}.$$

$$P(\{X = 1\}) = P\left(\left\{\frac{1}{2} \leq X < 2\right\}\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

3. Couple de variables aléatoires réelles.

Définitions.

3.1 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Soient $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$ les images respectives par X et par Y de Ω .

• On appelle **loi conjointe du couple** (X, Y) l'application de $\mathcal{P}(X(\Omega) \times Y(\Omega))$ dans $[0, 1]$, qui, à tout élément A de $\mathcal{P}(X(\Omega) \times Y(\Omega))$, associe le réel $P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\})$.

Pour définir la loi conjointe du couple (X, Y) , il suffit donc de connaître pour tout élément (x_i, y_j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ le réel $P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (x_i, y_j)\})$.

On a :

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (x_i, y_j)\}) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y_j\}) \\ &= P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}). \end{aligned}$$

Nous notons : $p_{ij} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$.

Remarquons que, par définition, on a : $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q p_{ij} = 1$.

• On appelle **loi marginale en X (resp. en Y)** du couple (X, Y) la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X (resp. Y).

• Soit i un élément de $\{1, 2, \dots, k\}$; considérons l'ensemble : $\{X = x_i\}$.

$$\text{On a : } \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} = \bigcup_{j=1}^q \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (x_i, y_j)\}$$

Les sous-ensembles de Ω qui figurent dans cette réunion finie sont deux à deux disjoints.

$$\text{On a donc : } P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^q P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (x_i, y_j)\}).$$

Par suite, on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^q p_{ij}$$

De même on a :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad P(\{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^k p_{ij}$$

Notations : Nous notons :

$$\sum_{j=1}^q p_{ij} = p_{i\cdot} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k p_{ij} = p_{\cdot j}$$

• On rassemble souvent les résultats sur les lois conjointes et marginales dans un tableau construit de la manière suivante :

$X \backslash Y$	$y_1 \dots\dots\dots y_j \dots\dots\dots y_q$	Loi marginale en X
x_1 $\vdots$ x_j $\vdots$ x_k	$p_{11} \dots\dots\dots p_{1j} \dots\dots\dots p_{1q}$ $\vdots$ $p_{j1} \dots\dots\dots p_{jj} \dots\dots\dots p_{jq}$ $\vdots$ $p_{k1} \dots\dots\dots p_{kj} \dots\dots\dots p_{kq}$	$P(\{X = x_1\}) = p_{1\cdot}$ $\vdots$ $P(\{X = x_j\}) = p_{j\cdot}$ $\vdots$ $P(\{X = x_k\}) = p_{k\cdot}$
Loi marginale en Y	$P(\{Y = y_1\}) = p_{\cdot 1}$ $P(\{Y = y_j\}) = p_{\cdot j}$ $P(\{Y = y_q\}) = p_{\cdot q}$	1

Exemple.

Une boîte contient huit jetons :

deux de forme rectangulaire et de couleur rouge,

un de forme rectangulaire et de couleur verte,

cinq de forme ronde et de couleur rouge.

On tire simultanément, et au hasard, deux jetons de la boîte. On admet l'équiprobabilité de sortie pour toutes les paires de jetons possibles.

L'ensemble Ω a donc C_8^2 éléments, c'est-à-dire 28 éléments.

On appelle X la variable aléatoire réelle qui, à chaque tirage, associe le nombre de jetons ronds obtenus et Y celle qui, à chaque tirage, associe le nombre de jetons verts obtenus.

On a donc : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

Déterminons la loi conjointe du couple (X, Y) .

Calculons $P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (0, 0)\})$.

Le nombre de paires de jetons qui ne sont ni ronds, ni verts est égal à 1. On a donc :

$$P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (0, 0)\}) = \frac{1}{28}.$$

Calculons de même : $P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (1, 0)\})$.

Le nombre de paires de jetons qui contiennent un jeton rond, mais aucun jeton vert est égal à $C_5^1 \times C_2^1$. On a donc : $P(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) = (1, 0)\}) = \frac{10}{28}$.

On a donc le tableau suivant :

X \ Y	Y		loi marginale en X
	0	1	
0	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{10}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$
2	$\frac{10}{28}$	0	$\frac{10}{28}$
loi marginale en Y	$\frac{21}{28}$	$\frac{7}{28}$	1

Variables aléatoires réelles indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Reprenons les mêmes notations que dans le paragraphe 3.1.

- 3.2 DÉFINITION :** Les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi conjointe du couple (X, Y) est le produit des lois marginales en X et en Y , c'est-à-dire :
- $$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$$

La proposition précédente s'écrit aussi :

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p_{ij} = P(\{X = x_i\}) \cdot P(\{Y = y_j\}), \text{ ou encore :}$$

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\}) \cdot P(\{Y = y_j\}).$$

Remarque : L'expression "variables aléatoires réelles indépendantes", consacrée par l'usage, est impropre; en réalité ce sont les lois de probabilité respectives de ces variables qui sont indépendantes.

Exemples.

1. Reprenons l'exemple du paragraphe 3.1 et cherchons si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

$$\text{On a : } P(\{X = 0\}) \cdot P(\{Y = 0\}) = \frac{3}{28} \times \frac{21}{28} = \frac{9}{4 \times 28}$$

$$\text{et } P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{1}{28}.$$

Les variables aléatoires réelles X et Y ne sont donc pas indépendantes.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$\text{Par suite on a : } P(\{X = 0\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{X = 1\}) = \frac{2}{3},$$

$$P(\{Y = 0\}) = \frac{2}{3}, \quad P(\{Y = 1\}) = \frac{1}{3}.$$

Cherchons si les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes.

On a les égalités :

$$P(\{X = 0\}) \cdot P(\{Y = 0\}) = \frac{2}{9}$$

$$P(\{X = 1\}) \cdot P(\{Y = 0\}) = \frac{4}{9}$$

$$P(\{X = 0\}) \cdot P(\{Y = 1\}) = \frac{1}{9}$$

$$P(\{X = 1\}) \cdot P(\{Y = 1\}) = \frac{2}{9}$$

On a aussi les égalités :

$$P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{2}{9}$$

$$P(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{4}{9}$$

$$P(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) = \frac{1}{9}$$

$$P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \frac{2}{9}$$

Les variables aléatoires réelles X et Y sont donc indépendantes.

Cas particulier

3.3 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{B}$ et φ_A et φ_B les fonctions caractéristiques respectives de A et de B.

Nous avons démontré dans l'exemple 2 du paragraphe 2.1 que φ_A et φ_B sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

On a : $\varphi_A(\Omega) = \{0,1\}$ et $\varphi_B(\Omega) = \{0,1\}$.

• Supposons que les variables aléatoires réelles φ_A et φ_B soient indépendantes et démontrons que les événements A et B sont indépendants.

Nous avons :

$$\forall (x, y) \in \{0,1\}^2, P(\{\varphi_A = x\} \cap \{\varphi_B = y\}) = P(\{\varphi_A = x\}) \cdot P(\{\varphi_B = y\}).$$

L'ensemble $\{0,1\}^2$ a 4 éléments. On a donc :

$$\begin{cases} P(\{\varphi_A = 0\} \cap \{\varphi_B = 0\}) = P(\{\varphi_A = 0\}) \cdot P(\{\varphi_B = 0\}) \\ P(\{\varphi_A = 1\} \cap \{\varphi_B = 0\}) = P(\{\varphi_A = 1\}) \cdot P(\{\varphi_B = 0\}) \\ P(\{\varphi_A = 0\} \cap \{\varphi_B = 1\}) = P(\{\varphi_A = 0\}) \cdot P(\{\varphi_B = 1\}) \\ P(\{\varphi_A = 1\} \cap \{\varphi_B = 1\}) = P(\{\varphi_A = 1\}) \cdot P(\{\varphi_B = 1\}). \end{cases}$$

Les variables aléatoires réelles φ_A et φ_B sont indépendantes si et seulement si les quatre propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \\ P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \end{cases}$$

Or, en classe de Première, nous avons donné la définition suivante :

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Si les variables aléatoires réelles φ_A et φ_B sont indépendantes, les événements A et B sont donc indépendants.

• Supposons que les événements A et B soient indépendants et démontrons que les variables aléatoires réelles φ_A et φ_B sont indépendantes. Il suffit de démontrer les trois propositions suivantes :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

Nous démontrons la première et nous laissons au lecteur le soin de démontrer de la même manière les deux autres.

$$\text{On a : } B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \text{ et } (A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset,$$

$$\text{et par suite : } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B).$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B) (1 - P(A)) = P(B) P(\overline{A}). \end{aligned}$$

Nous énonçons la propriété suivante :

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si leurs fonctions caractéristiques sont des variables aléatoires réelles indépendantes.

4. Espérance mathématique. Variance. Écart-type.

Dans ce paragraphe, nous désignons par $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.

Espérance d'une variable aléatoire réelle.

- 4.1 DÉFINITION :** Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$ et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ l'image de Ω par X .
On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire réelle X le réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(\{X = x_i\}).$$

Si on a : $E(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire réelle X est **centrée**.

Remarque : On a : $\sum_{i=1}^k P(\{X = x_i\}) = 1$; le réel $E(X)$ est donc le barycentre dans l'espace affine $\mathbb{R}$ des k réels $x_1, \dots, x_k$ affectés des coefficients $P(\{X = x_1\}), \dots, P(\{X = x_k\})$; c'est une valeur moyenne de X .

Exemples.

1. Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 2.6.
On a : $E(X) = a P(\{X = a\}) = a P(\Omega) = a$.
2. Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 2.5.
On a : $E(\varphi_A) = 0 \cdot P(\{\varphi_A = 0\}) + 1 \cdot P(\{\varphi_A = 1\}) = P(A) = p$.
3. Reprenons l'exemple 4 du paragraphe 2.5.
On a : $E(X) = 0 \cdot P(\{X = 0\}) + 1 \cdot P(\{X = 1\}) + 2 \cdot P(\{X = 2\})$
 $= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Propriétés.

- 4.2** On a les propriétés suivantes :

P1 L'application qui, à toute variable aléatoire réelle X , associe son espérance mathématique $E(X)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel réel des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Démonstration :

- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles quelconques définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Soient $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$ les images respectives de Ω par X et par Y .

L'application $X + Y$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

On a : $(X + Y)(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in \{1, \dots, k\}, \exists j \in \{1, \dots, q\}, x = x_i + y_j\}$.

De la propriété P_1 du paragraphe 2.2, il résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q (x_i + y_j) P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q (x_i + y_j) p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^k \left(x_i \sum_{j=1}^q p_{ij} \right) + \sum_{j=1}^q \left(y_j \sum_{i=1}^k p_{ij} \right) \end{aligned}$$

Des propositions : $\left(\forall i \in \{1, \dots, k\}, \sum_{j=1}^q p_{ij} = P(\{X = x_i\}) \right)$

et $\left(\forall j \in \{1, \dots, q\}, \sum_{i=1}^k p_{ij} = P(\{Y = y_j\}) \right)$, il résulte que l'on a :

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^k x_i P(\{X = x_i\}) + \sum_{j=1}^q y_j P(\{Y = y_j\}),$$

c'est-à-dire : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

• Soient λ un réel quelconque et X une variable aléatoire réelle quelconque définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Soit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ l'image de Ω par X .

Si $\lambda = 0$, on a : $\lambda X = \tilde{0}$. On a alors : $E(\lambda X) = E(\tilde{0}) = 0 = 0 \cdot E(X) = \lambda \cdot E(X)$

Si $\lambda \neq 0$, on a : $(\lambda X)(\Omega) = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k\}$. On a donc :

$$E(\lambda X) = \sum_{i=1}^k \lambda x_i P(\{\lambda X = \lambda x_i\}) = \lambda \sum_{i=1}^k x_i P(\{X = x_i\}) = \lambda E(X). \blacksquare$$

Remarque : Il résulte de cette propriété P_1 et de l'exemple 1 du paragraphe 4.1 les égalités : $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.

La variable aléatoire $X - E(X)$ est donc centrée.

P2 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$.
Si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes, alors
on a : $E(XY) = E(X) E(Y)$.

Démonstration :

Soient $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$ les images respectives de Ω par X et par Y .

On a : $(XY)(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists i \in \{1, \dots, k\}, \exists j \in \{1, \dots, q\}, x = x_i y_j\}$

$$\text{On a donc : } E(XY) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q x_i y_j P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}).$$

Les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes; on a donc :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, q\}, P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\}) P(\{Y = y_j\})$$

$$\text{et par suite : } E(XY) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q x_i y_j P(\{X = x_i\}) P(\{Y = y_j\}).$$

On a donc : $E(XY) = \sum_{i=1}^k x_i P(\{X = x_i\}) \sum_{j=1}^q y_j P(\{Y = y_j\})$
 c'est-à-dire : $E(XY) = E(X) E(Y)$. ■

Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle.

4.3 DÉFINITIONS : Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$ et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ l'image de Ω par X .
 On appelle variance de X le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}).$$

On appelle écart-type de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par :
 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : Ce réel $V(X)$ est aussi appelé moment centré d'ordre 2 de la variable aléatoire réelle X .

Exemples.

Reprenons les exemples du paragraphe 4.1.

1. On a : $V(X) = (a - a)^2 P(\{X = a\}) = 0$
2. On a : $V(\varphi_A) = (0 - p)^2 P(\{\varphi_A = 0\}) + (1 - p)^2 P(\{\varphi_A = 1\})$
 $= p^2 P(\bar{A}) + (1 - p)^2 P(A)$
 $= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p)$.
3. On a :
 $V(X) = (0 - 1)^2 P(\{X = 0\}) + (1 - 1)^2 P(\{X = 1\}) + (2 - 1)^2 P(\{X = 2\})$
 $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

4.4 Reprenons les mêmes notations que dans la définition 4.3. On a :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2) P(\{X = x_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i^2 P(\{X = x_i\}) - 2E(X) \sum_{i=1}^k x_i P(\{X = x_i\}) + (E(X))^2 \sum_{i=1}^k P(\{X = x_i\}). \end{aligned}$$

Par définition, on a : $\sum_{i=1}^k P(\{X = x_i\}) = 1$; on a donc :

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2.$$

On a finalement : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

4.5 THÉORÈME : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.
On a la proposition suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, P(\{|X - E(X)| > t\}) < \frac{V(X)}{t^2}.$$

Cette propriété est appelée **inégalité de Bienaymé-Tchebicheff**.

Démonstration :

Soit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ l'image de Ω par X .

$$\text{Par définition, on a : } V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}).$$

Soit t un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit alors K le sous-ensemble de $\{1, \dots, k\}$ défini par :

$K = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid |x_i - E(X)| > t\}$ et $\bar{K}$ le complémentaire de K dans $\{1, \dots, k\}$.

$$\text{On a alors : } P(\{|X - E(X)| > t\}) = \sum_{i \in K} P(\{X = x_i\})$$

$$\text{et : } V(X) = \sum_{i \in K} (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}) + \sum_{i \in \bar{K}} (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}).$$

Des propositions : $(\forall i \in \bar{K}, (x_i - E(X))^2 \geq 0)$ et $(\forall i \in \bar{K}, P(\{X = x_i\}) \in [0, 1])$,

il résulte que l'on a : $\sum_{i \in \bar{K}} (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}) \geq 0$.

$$\text{On a donc : } V(X) \geq \sum_{i \in K} (x_i - E(X))^2 P(\{X = x_i\}).$$

De la proposition : $\forall i \in K, |x_i - E(X)| > t$, il résulte que l'on a :

$$V(X) > t^2 \sum_{i \in K} P(\{X = x_i\}),$$

c'est-à-dire : $V(X) > t^2 P(\{|X - E(X)| > t\})$. ■

Remarques : 1. Soit $\lambda = \frac{t}{\sigma(X)}$; on a donc : $\frac{V(X)}{t^2} = \left(\frac{\sigma(X)}{t}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff s'écrit alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, P(\{|X - E(X)| > \lambda \sigma(X)\}) < \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff donne une majoration de la probabilité pour que la valeur absolue de la différence de X avec sa valeur moyenne soit supérieure à un réel donné t . Cette majoration n'est intéressante que si t est supérieur à $\sigma(X)$; sinon, on obtient comme majorant un nombre réel supérieur à 1.

3. On démontre, de façon analogue à la démonstration du théorème 4.5, que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, P(\{|X - E(X)| \geq t\}) \leq \frac{V(X)}{t^2}.$$

D'autre part, on a l'égalité : $\{|X - E(X)| < t\} = \overline{\{|X - E(X)| \geq t\}}$.

Il en résulte : $P(\{|X - E(X)| < t\}) = 1 - P(\{|X - E(X)| \geq t\}) \geq 1 - \frac{V(X)}{t^2}$;
 de même, on a : $P(\{|X - E(X)| \leq t\}) = 1 - P(\{|X - E(X)| > t\}) > 1 - \frac{V(X)}{t^2}$.

Exemple.

Dans l'énoncé ci-dessous, nous considérerons, selon la tradition, et par abus de langage que X est une variable aléatoire.

Soit X le nombre de voitures qui passent entre 18 h et 19 h en un point donné d'une autoroute. On a observé que le nombre moyen de voitures est : $E(X) = 3\,500$ et que la variance de X est : $V(X) = 100\,000$.

Cherchons un minorant de la probabilité de l'événement : $\{3\,000 < X < 4\,000\}$.

La probabilité de cet événement est égale à : $P(\{|X - E(X)| < 500\})$.

D'après la troisième remarque, on a :

$$P(\{|X - E(X)| < 500\}) \geq 1 - \frac{V(X)}{500^2}$$

c'est-à-dire :

$$P(\{|X - E(X)| < 500\}) \geq 1 - \frac{10^5}{25 \cdot 10^4} = 1 - \frac{10}{25} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

La probabilité de l'événement $\{3\,000 < X < 4\,000\}$ est supérieure ou égale à 0,6. c'est-à-dire 60 %.

5. Loi binomiale.

Nous rappelons les résultats suivants démontrés en classe de Première.

5.1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

La loi binomiale est la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle associée à une suite d'épreuves répétées, appelée aussi suite d'épreuves de Bernoulli, qui satisfait aux conditions suivantes :

- chaque épreuve ne donne lieu qu'à deux éventualités exclusives, l'une appelée succès, de probabilité égale à p , l'autre appelée échec, de probabilité égale à

$$1 - p = q;$$

- les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres;
- la variable aléatoire réelle considérée X est l'application qui, à toute suite de n épreuves, associe le nombre de succès obtenus.

Pour chaque épreuve l'univers Ω a deux éléments, l'un qui correspond au succès, noté S , l'autre qui correspond à l'échec, noté E : on a : $\Omega = \{S, E\}$.

La variable aléatoire réelle X est alors une application de l'ensemble fini Ω^n dans $\mathbb{R}$. Soient i un élément quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et X_i l'application de Ω^n dans $\mathbb{R}$,

définie de la manière suivante :

pour tout élément ω de Ω^n tel que le $i^{\text{ème}}$ élément du n -uplet ω soit E , on pose :

$$X_i(\omega) = 0;$$

pour tout élément ω de Ω^n tel que le $i^{\text{ème}}$ élément du n -uplet ω soit S , on pose :

$$X_i(\omega) = 1.$$

Cette application est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}(\Omega^n))$.

La loi de probabilité de X_i est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, & P(\{X_i = x\}) = 0; \\ & P(\{X_i = 0\}) = q; \\ & P(\{X_i = 1\}) = p. \end{cases}$$

La variable aléatoire réelle X est alors égale à la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}(\Omega^n))$; il résulte de l'indépendance des épreuves que les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes deux à deux.

Désignons par A l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$; on a : $X(\Omega^n) = A$, et par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R} - A, \quad P(\{X = x\}) = 0.$$

Soient k un élément de A et ω un élément de Ω^n .

$X(\omega)$ est égal à k si et seulement s'il existe une partie B de A telle que :

$$\forall i \in B, \quad X_i(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \complement_A B, \quad X_i(\omega) = 0.$$

Il y a C_n^k telles parties de A .

Soit Ω' le sous-ensemble de Ω défini par :

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in B, \quad X_i(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \complement_A B, \quad X_i(\omega) = 0\}.$$

De l'indépendance des n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, il résulte que l'on a :

$$P(\Omega') = \prod_{i \in B} P(\{X_i = 1\}) \cdot \prod_{i \in \complement_A B} P(\{X_i = 0\}) = p^k \cdot q^{n-k}.$$

On a donc : $P(\{X = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

La loi de probabilité de X , appelée **loi binomiale**, est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1, \dots, n\}, & P(\{X = x\}) = 0 \\ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, & P(\{X = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}. \end{cases}$$

Nous rappelons au lecteur que cette loi est appelée loi binomiale car les réels $P(\{X = k\})$ sont les termes du développement de $(p + q)^n$ par la formule du binôme.

Exemple.

On jette cinq fois de suite une pièce non truquée et on observe le côté visible : pile ou face.

Soit k un élément de $\{0, 1, \dots, 5\}$; cherchons la probabilité que l'on obtienne k résultats " face " au cours de ces cinq jets. Soit X la variable aléatoire réelle qui, à toute suite de cinq jets, associe le nombre de faces obtenues.

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe 1.6, on a :

$$\Omega = \{\pi, F\}, \quad P(\{\pi\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On a donc : } \forall k \in \{0, 1, \dots, 5\}, \quad P(\{X = k\}) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k},$$

$$\text{c'est-à-dire : } \forall k \in \{0, 1, \dots, 5\}, \quad P(\{X = k\}) = C_5^k \frac{1}{2^5}.$$

5.2 Déterminons l'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle X .

De l'égalité : $X = X_1 + \dots + X_n$ et de la propriété P_1 du paragraphe 4.2, il résulte que l'on a : $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$.

Par définition, on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad E(X_i) = 0 \cdot P(\{X_i = 0\}) + 1 \cdot P(\{X_i = 1\}) = p$

et par suite : $E(X) = np$

5.3 De même déterminons la variance de la variable aléatoire réelle X .

On a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Calculons $E(X^2)$. De l'égalité : $X = X_1 + \dots + X_n$, il résulte que l'on a :

$$X^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 + 2((X_1X_2 + \dots + X_1X_n) + (X_2X_3 + \dots + X_2X_n) + \dots + (X_{n-1}X_n)),$$

et par suite :

$$E(X^2) = E(X_1^2) + \dots + E(X_n^2) + 2((E(X_1X_2) + \dots + E(X_1X_n)) + (E(X_2X_3) + \dots + E(X_2X_n)) + \dots + E(X_{n-1}X_n)).$$

Soit i un élément de $\{1, \dots, n\}$. On a : $X_i^2(\Omega) = \{0, 1\}$ et par suite :

$$E(X_i^2) = 0 \cdot P(\{X_i = 0\}) + 1 \cdot P(\{X_i = 1\}) = p.$$

D'autre part les n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes deux à deux. De la propriété P_2 du paragraphe 4.2, il résulte que l'on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, ((i \neq j) \implies (E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j))).$$

Or on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E(X_i) = p$, et par suite :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, ((i \neq j) \implies (E(X_iX_j) = p^2)).$$

Il y a $(n-1) + (n-2) + \dots + 1$, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$, termes de la forme $E(X_iX_j)$ avec $i \neq j$.

$$\text{On a donc finalement : } E(X^2) = np + 2 \frac{n(n-1)}{2} p^2.$$

$$\text{Par suite on a : } V(X) = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 \\ = np(1 + (n-1)p - np) = np(1-p)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \boxed{V(X) = npq}$$

6. Loi faible des grands nombres.

Dans ce paragraphe, nous désignons par $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini.

6.1 DÉFINITION : Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X si et seulement si l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{|X_n - X| > t\}) = 0$.

On a le théorème suivant :

6.2 THÉORÈME : Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$, définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$, deux à deux indépendantes, de même loi de probabilité, donc de même espérance mathématique a et de même écart-type σ .

La variable aléatoire réelle $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle constante égale à a .

Ce théorème est connu sous le nom de **loi faible des grands nombres**. Avec les mêmes hypothèses, on peut donc écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - a\right| > t\right) = 0$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ (n > n_0) \implies \left(P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - a\right| > t\right) < \varepsilon\right).$$

Démonstration :

Soit Y_n la variable aléatoire réelle égale à $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

De la propriété P_1 du paragraphe 4.2, il résulte que l'on a :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} (E(X_1) + \dots + E(X_n)), \text{ et par suite : } E(Y_n) = \frac{1}{n} \cdot na,$$

c'est-à-dire : $E(Y_n) = a$.

Calculons $V(Y_n)$.

$$\text{On a : } V(Y_n) = E(Y_n^2) - (E(Y_n))^2 = E(Y_n^2) - a^2.$$

Calculons donc $E(Y_n^2)$.

De la propriété P_1 du paragraphe 4.2, il résulte que l'on a :

$$E(Y_n^2) = \frac{1}{n^2} (E(X_1^2) + \dots + E(X_n^2) + 2(E(X_1 X_2) + \dots + E(X_1 X_n)) \\ + 2(E(X_2 X_3) + \dots + E(X_2 X_n)) + \dots + 2E(X_{n-1} X_n)).$$

Les variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes deux à deux. De la propriété P_2 du paragraphe 4.2, il résulte que l'on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad (i \neq j) \implies (E(X_i X_j) = E(X_i) E(X_j)).$$

Il y a $(n-1) + (n-2) \dots + 1$, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$ termes de la forme

$E(X_i X_j)$ avec $i \neq j$ et on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad E(X_i) = a$. On a donc :

$$E(Y_n^2) = \frac{1}{n^2} \left(E(X_1^2) + \dots + E(X_n^2) + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} a^2 \right) \\ = \frac{1}{n^2} (E(X_1^2) + \dots + E(X_n^2) + n(n-1) a^2).$$

On a enfin : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2 = \sigma^2 + a^2$

et par suite : $E(Y_n^2) = \frac{1}{n^2} (n(\sigma^2 + a^2) + n(n-1)a^2) = \frac{\sigma^2}{n} + a^2$.

On a alors : $V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n} + a^2 - a^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff à la variable aléatoire réelle Y_n .

$$\text{On a : } \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad P(\{|Y_n - a| > t\}) < \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

Soient t et ε deux réels strictement positifs. Pour que $P(\{|Y_n - a| > t\})$ soit inférieur à ε , il suffit que l'on ait : $\frac{\sigma^2}{nt^2} < \varepsilon$, c'est-à-dire : $n > \frac{\sigma^2}{\varepsilon t^2}$.

Soit n_0 le plus petit entier naturel supérieur à $\frac{\sigma^2}{\varepsilon t^2}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left((n > n_0) \implies \left(n > \frac{\sigma^2}{\varepsilon t^2} \right) \implies (P(\{|Y_n - a| > t\}) < \varepsilon) \right). \blacksquare$$

Exemples.

1. Considérons une série d'épreuves de Bernoulli, et reprenons les mêmes notations que dans les paragraphes 5.1, 5.2 et 5.3.

On a donc : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E(X_i) = p$ et $V(X_i) = pq$.

Posons : $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$; c'est une variable aléatoire définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}(\Omega^n))$.

Alors Y_n converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle constante égale à p .

On a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > \alpha\right) = 0$.

Y_n est souvent appelée la **fréquence d'apparition**.

2. Dans une grande ville, lors d'une consultation électorale, 25 % des personnes consultées ont émis un vote négatif.

Cherchons un nombre de bulletins de vote à partir duquel on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 0,1, que la fréquence d'apparition d'un vote négatif sera comprise entre $\frac{24}{100}$ et $\frac{26}{100}$.

Considérons la suite d'épreuves de Bernoulli, qui consiste à dépouiller n bulletins. L'ensemble Ω , associé à chaque épreuve, a deux éléments, l'un, noté VN, qui correspond à un vote négatif, l'autre, noté VP, qui correspond à un vote positif. On a :

$$\Omega = \{VN, VP\}, \quad P(\{VN\}) = \frac{25}{100}, \quad P(\{VP\}) = \frac{75}{100}.$$

Soit i un élément de $\{1, \dots, n\}$.

Soit X_i la variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega^n, \mathcal{F}(\Omega^n))$ de la manière suivante : pour tout élément ω de Ω^n tel que le i ème bulletin dépouillé corresponde à un vote négatif, on pose : $X_i(\omega) = 1$;

pour tout élément ω de Ω^n tel que le i ème bulletin dépouillé corresponde à un vote positif, on pose : $X_i(\omega) = 0$.

$$\text{On a : } P(\{X_i = 1\}) = \frac{25}{100}; \quad P(\{X_i = 0\}) = \frac{75}{100};$$

$$E(X_i) = \frac{25}{100}; \quad V(X_i) = \frac{75}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{1875}{10^4}.$$

La fréquence d'apparition d'un vote négatif est égale à $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$, et l'on a :

$$\left\{ \frac{24}{100} \leq \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \leq \frac{26}{100} \right\} = \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{25}{100} \right| \leq \frac{1}{100} \right\}.$$

Le problème posé revient donc à rechercher un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > n_0) \implies \left(P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{25}{100} \right| > \frac{1}{100}\right) < 0,1 \right).$$

Appliquons les résultats obtenus dans la démonstration du théorème 6.2; on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{25}{100} \right| > t\right) < \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

Il suffit de choisir n tel que : $\frac{\sigma^2}{nt^2} < \frac{1}{10}$, c'est-à-dire : $n > \frac{10\sigma^2}{t^2}$.

Nous avons ici : $\sigma^2 = \frac{1875}{10^4}$ et $t = \frac{1}{100}$; il en résulte : $n > 18750$.

EXERCICES

Espaces probabilisés finis.

1 Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable fini.

1° Soient P et P' deux probabilités définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$; soient λ et μ deux nombres réels tels que : $\lambda + \mu \neq 0$.

On définit une application P'' de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall A \in \mathcal{B}, P''(A) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P(A) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} P'(A).$$

Démontrer que P'' est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

2° Généralisation : Soient n probabilités $P_1, \dots, P_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Soient n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$.

Soit P l'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{B}, P(A) = \frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} (\lambda_1 P_1(A) + \dots + \lambda_n P_n(A)).$$

Démontrer que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

2 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C, D quatre événements.

Démontrer que l'on a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

3 1° Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}(\Omega_2), P_2)$ deux espaces probabilisés finis.

Soit Ω l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$.

On définit une application P de la manière suivante :

$$\forall (a, b) \in \Omega, P(\{(a, b)\}) = P_1(\{a\}) \cdot P_2(\{b\}).$$

Démontrer que P est une probabilité sur l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$.

2° Généralisation :

Soient n espaces probabilisés finis $(\Omega_1, \mathcal{F}(\Omega_1), P_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}(\Omega_n), P_n)$.

Soit Ω l'ensemble $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

On définit une application P de la manière suivante :

$$\forall (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega, P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot \dots \cdot P_n(\{\omega_n\}).$$

Démontrer que P est une probabilité sur l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$.

4 Une cage contient huit canaris mâles et six canaris femelles. On prend au hasard deux canaris dans la cage.

1° Quelle est la probabilité pour que les deux canaris soient de même sexe ?

2° Quelle est la probabilité pour que les deux canaris soient de sexes différents ?

On donnera les résultats à 10^{-3} près.

5 Dans un lycée mixte, les élèves doivent choisir deux responsables du foyer du lycée; ces responsables peuvent être indifféremment fille ou garçon.

Parmi les élèves, huit sont candidats à un poste de responsabilité; il y a cinq filles dont deux sont en classe terminale et trois garçons dont un est en classe terminale.

On suppose que les chances de chacun de ces huit candidats sont égales a priori.

- 1° Quelle est la probabilité pour que les postes soient occupés par deux élèves de sexes différents ?
- 2° Quelle est la probabilité pour que les postes soient occupés par deux élèves de terminale ?
- 3° Quelle est la probabilité pour que les postes soient occupés par deux élèves de terminale ou par deux élèves de sexes différents ?

6 Un jury est composé de cinq membres pris au hasard dans une liste comportant dix hommes et sept femmes.

- 1° Quelle est la probabilité pour que le jury ne comprenne aucune femme ?
- 2° Quelle est la probabilité pour que le jury comprenne trois hommes et deux femmes ?
- 3° Quelle est la probabilité pour que le jury comprenne au moins une femme ?

7 On considère un jeu de trente-deux cartes. On tire au hasard et simultanément huit cartes de ce jeu.

- 1° Quelle est la probabilité pour que, parmi ces huit cartes, figure un as et un seul ? aucun as ? au moins deux as ?
- 2° Quelle est la probabilité pour que, parmi ces huit cartes, figurent cinq cœurs ? au moins cinq cœurs ?
- 3° Quelle est la probabilité pour que, parmi ces huit cartes, figurent un roi et un seul et un as et un seul ?

8 On considère l'ensemble E des douze figures d'un jeu de trente-deux cartes (quatre valets, quatre dames, quatre rois).

On tire au hasard trois cartes parmi ces douze. Soit Ω l'ensemble des résultats possibles. On suppose ces résultats équiprobables.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- 1° les trois figures sont de même sexe,
- 2° il y a un représentant de chaque type (un valet, une dame, un roi),
- 3° la dame de trèfle et le roi de trèfle ne sont pas tous les deux dans le tirage.

9 Dans un jeu de cartes de tarots, il y a soixante-dix-huit cartes, dont vingt et une représentent des figures particulières et sont appelées atouts. On tire simultanément deux cartes parmi ces soixante-dix-huit cartes. On admet que les tirages sont équiprobables.

- 1° Soit A l'événement : les deux cartes tirées sont des atouts. Quelle est la probabilité de A ?
- 2° Soit B l'événement : il n'y a aucun atout parmi les deux cartes tirées. Quelle est la probabilité de B ?
- 3° Les événements A et B sont-ils complémentaires ?

10 Un pays, formé de quatre-vingt départements, a une Assemblée Nationale formée de quatre cents députés, à raison de cinq par département. Une commission de quatre-vingts membres, choisis parmi les députés, est formée en vue d'un voyage d'étude à l'étranger ; on admet que les commissions qu'il est possible de constituer sont équiprobables. Quelle est la probabilité pour que, dans cette commission, un département donné soit représenté ? Un département sera considéré comme représenté si un au moins de ses députés siège à la commission.

11 Un électricien a rassemblé dans son atelier un ensemble de trente petits moteurs électriques; il sait, sans qu'il puisse les distinguer, que neuf d'entre eux sont détériorés et vingt et un en bon état.

Il retire du lot simultanément quatre de ces moteurs, pris au hasard.

1° Quelle est la probabilité pour que les neuf moteurs détériorés soient parmi les vingt-six restants?

2° Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au plus deux moteurs détériorés parmi les quatre extraits?

3° Il recommence la même opération avec les vingt-six moteurs restants. Quelle est la probabilité pour qu'au cours des deux opérations il ait tiré au moins un moteur détérioré?

→ **12** Une urne contient une boule blanche et n boules rouges ($n \geq 2$).

1° Calculer la probabilité $P_1(n)$ de tirer une boule rouge dans un tirage d'une boule au hasard. La suite définie par $P_1(n)$ est-elle monotone?

2° Calculer la probabilité $P_2(n)$ de tirer deux boules rouges dans un tirage simultané de deux boules au hasard.

3° Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a : $P_1(n) - P_2(n) < \frac{1}{8}$

13 Un sac contient dix objets : n objets sont noirs, les autres sont blancs. On extrait simultanément deux objets du sac; on suppose les tirages équiprobables.

1° Déterminer les probabilités respectives d'obtenir :

- a) deux objets de couleurs différentes;
- b) deux objets noirs;
- c) deux objets blancs.

2° Déterminer n pour que cette dernière probabilité soit égale à $\frac{7}{15}$.

* **14** On dispose de trois dés non pipés A, B, C.

Le dé A porte sur une face le chiffre 3, sur trois faces le chiffre 4, sur deux faces le chiffre 5.

Le dé B porte sur deux faces le chiffre 4 et sur quatre faces le chiffre 5.

Le dé C porte sur cinq faces le chiffre 4 et sur une face le chiffre 2.

On lance simultanément les trois dés. Déterminer les probabilités respectives d'obtenir :

- a) trois chiffres égaux;
- b) l'ensemble $\{3, 4, 2\}$;
- c) l'ensemble $\{4, 2, 5\}$.

(On pourra utiliser l'exercice n° 3.)

15 On a donné à Alice un alphabet constitué de vingt-six cubes sur chacun desquels est dessinée une lettre. Alice tire successivement et sans remise cinq lettres de cet alphabet.

1° Déterminer le nombre d'applications injectives de l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$ dans $\{A, B, C, \dots, Y, Z\}$.

2° Déterminer les probabilités pour que, dans l'ordre du tirage, le mot ainsi constitué :

- a) commence par un A;
- b) soit son prénom.

3° Déterminer la probabilité pour qu'Alice ait tiré les cinq lettres de son prénom.

16 Deux personnes, A et B, écrivent chacune, au hasard, un nombre entier de deux chiffres, en numération décimale. Soit x le nombre écrit par A et y le nombre écrit par B. Tous les couples d'entiers (m, n) , avec $10 \leq m \leq 99$ et $10 \leq n \leq 99$, sont supposés équiprobables.

En d'autres termes, on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), p)$ où Ω est l'ensemble des couples d'entiers (m, n) tels que $10 \leq m \leq 99$ et $10 \leq n \leq 99$, et p la probabilité pour laquelle toutes les parties à un élément ont la même probabilité.

1° Quelle est la probabilité pour que A et B écrivent le même nombre? En d'autres termes, calculer la probabilité de l'ensemble Δ des couples (m, n) de Ω tels que $m = n$.

2° Soit E l'ensemble des couples (m, n) de Ω tels que $10 \leq m \leq 50$ et $10 \leq n \leq 50$. Calculer $p(E)$.

3° Soit F l'ensemble des couples (m, n) de Ω tels que $10 \leq m < 50$ ou $10 \leq n < 50$. Calculer $p(F)$.

4° Soit G (resp. G') l'ensemble des couples (m, n) de Ω tels que $m < n$ (resp. $m > n$). Calculer $p(G)$ et $p(G')$. (Baccalauréat 1973.)

Variables aléatoires réelles. Espérance. Variance.

17 Une loterie comporte cent billets parmi lesquels un billet gagne un lot de 1 000 F, cinq billets gagnent chacun un lot de 300 F et 10 billets gagnent chacun un lot de 100 F.

1° Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de trois billets gagne exactement 300 F?

2° Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de trois billets gagne au moins 200 F?

18 Un paquet de dix cartes à jouer comprend cinq as, trois rois et deux dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte 1 point.

Du paquet on extrait simultanément deux cartes et on désigne par X la variable aléatoire réelle qui, à tout tirage, associe le total des points marqués. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1° Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X ?

2° Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X . (Baccalauréat 1973.)

19 Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire simultanément deux boules de cette urne; on suppose que les tirages ainsi effectués sont équiprobables. A chaque tirage on associe le plus grand des nombres portés par les deux boules; on définit ainsi une variable aléatoire réelle X dont l'ensemble des valeurs est $\{2, 3, 4, 5\}$.

1° Déterminer la loi de probabilité de X et la fonction de répartition de X .

2° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

3° Calculer la variance $V(X)$ de X .

20 Un sac contient dix jetons numérotés de 1 à 10. On tire au hasard et simultanément trois jetons du sac. Soit X l'application qui à chaque tirage associe le plus grand des numéros figurant sur les trois jetons tirés.

1° X est-elle une variable aléatoire réelle? Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.

2° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, ainsi que la variance $V(X)$ de X .

21 Un sac contient cinq jetons identiques numérotés de 1 à 5. On extrait au hasard successivement trois jetons en remettant chaque fois le jeton tiré. Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

On désigne par X la variable aléatoire réelle, qui, à chaque tirage de trois jetons ainsi défini, associe le nombre de jetons qui portent un chiffre impair.

1° Déterminer la loi de probabilité de X et la fonction de répartition de X .

2° Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

22 On désigne par A (resp. B , C) l'ensemble des lettres du mot Sylvie (resp. Claudie, Maurice).

Dans une première urne, on place six jetons représentant chacun un élément de A .

Dans une deuxième urne, on place sept jetons représentant chacun un élément de B .

Dans une troisième urne, on place sept jetons représentant chacun un élément de C .

On tire un jeton de chaque urne. Le résultat de cette expérience est caractérisé par un élément de $A \times B \times C$; on dit alors que cet événement est " sorti ". On suppose

que la probabilité de sortie de chaque élément de $A \times B \times C$ est la même.

1° Quelle est la probabilité de sortir une voyelle et une seule ?

2° Quelle est la probabilité de sortir au moins une voyelle ?

3° Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de voyelles sorties.

Quel est l'ensemble $X(A \times B \times C)$? Déterminer la loi de probabilité de X .

23 Soit a un nombre réel.

On considère le jeu suivant. Une urne contient trois boules vertes, deux boules blanches et une boule rouge. Un joueur tire au hasard et simultanément trois boules

de l'urne. On suppose que le gain algébrique du joueur est égal à $+1$ si le tirage est bicolore, à $+a$ si le tirage est tricolore et à $-7a$ si le tirage est unicolore.

Déterminer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle X , qui à chaque tirage associe le gain corres-

pondant, soit nulle.

24 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un sac contient deux boules blanches et n boules noires.

On tire simultanément, et au hasard, deux boules du sac. On admet l'équiprobabilité de tirage pour toutes les paires de boules possibles.

1° On appelle X la variable aléatoire réelle qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

2° On introduit la règle du jeu suivante :

si les deux boules tirées sont blanches, le joueur marque $(+8)$;

si l'une des boules tirées est blanche et l'autre noire, le joueur marque $(+3)$;

si les deux boules tirées sont noires, le joueur marque (-2) .

On appelle Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué par le joueur.

Quelle est l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y ? Existe-t-il un entier n tel que cette espérance soit nulle ?

25 On jette simultanément deux dés cubiques, non pipés, de couleurs différentes, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et l'on observe les nombres inscrits sur la face supérieure de chacun des dés.

1° Donner, sous forme de tableau carré, l'ensemble Ω des événements élémentaires. Quelle est la probabilité d'un de ces événements élémentaires ?

- 2° On définit sur Ω une variable aléatoire réelle X qui, à chaque épreuve observée, associe la somme des deux nombres obtenus.
- a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Déterminer $P(\{X = n\})$.
- b) Calculer l'espérance mathématique de X .
- c) Calculer la probabilité de l'événement $\{X \geq 6\}$. (D'après Baccalauréat 1973.)

26 On considère deux dés cubiques équilibrés A et B .
 Sur le dé A , les chiffres 1, 3, 5 sont chacun inscrits sur deux faces.
 Sur le dé B , une face est marquée 2, deux faces sont marquées 4, trois faces sont marquées 6.

On jette simultanément les deux dés. Soit X l'application qui, à chaque événement, associe la somme des deux chiffres obtenus.

- 1° Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
- 2° Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

27 Un sac contient six boules rouges numérotées de 1 à 6 et trois boules blanches numérotées de 1 à 3. On extrait simultanément deux boules qui portent les numéros a et b . On admet l'équiprobabilité de sortie de toutes les paires de boules possibles.

- 1° Quelle est la probabilité pour que l'on ait : $a = b$?
- 2° Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient de couleurs différentes?

3° On considère la variable aléatoire réelle X définie de la manière suivante :

si les deux boules sont blanches, X prend la valeur $a + b$;

si les deux boules sont rouges, X prend la valeur $|a - b|$;

si les deux boules sont de couleurs différentes, X prend la valeur 0.

Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre X ; déterminer la loi de probabilité de X .

- 4° Calculer la probabilité de chacun des événements $\{X \leq 1\}$ et $\{2 \leq X \leq 4\}$.

28 Deux joueurs A et B lancent simultanément chacun un dé. Les six faces de chaque dé portent respectivement les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6. On désigne par a le chiffre obtenu par le joueur A et par b le chiffre obtenu par le joueur B . Tous les couples (a, b) ont la même probabilité d'apparaître.

La règle du jeu est la suivante :

1^{er} cas : si $a = b$, alors A et B ni ne gagnent, ni ne perdent;

2^e cas : si $a > b$, alors A gagne $(a - b)$ francs, que perd B ;

3^e cas : si $a < b$, alors B gagne 3 francs que perd A ; dans ce cas, on convient d'écrire que le gain de A est -3 .

On définit une variable aléatoire réelle X qui, à chaque épreuve, associe le gain algébrique de A , exprimé en francs.

- 1° Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X .
- 2° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
- 3° Calculer la variance $V(X)$ et en déduire l'écart-type $\sigma(X)$.

Couple de variables aléatoires réelles. Variables aléatoires indépendantes.

29 Une cage contient neuf papillons : trois mâles (deux blancs et un jaune) et six femelles (quatre blanches et deux jaunes). On prend simultanément, et au hasard, deux papillons.

Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque tirage, associe le nombre de papillons mâles que l'on a pris.

Soit Y la variable aléatoire réelle qui, à chaque tirage, associe le nombre de papillons jaunes que l'on a pris.

Déterminer les lois de probabilité respectives de X , de Y , du couple (X, Y) . Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?

30 On considère une urne contenant trois boules blanches et cinq boules noires. On effectue successivement deux tirages avec remise. On désigne par X le nombre de boules blanches tirées, par Y celui de boules noires.

- 1° Déterminer les lois de probabilité respectives de X , de Y , du couple (X, Y) .
- 2° Déterminer l'espérance mathématique et la variance respectives de X et de Y .

31 Un sac contient sept jetons dont quatre portent le numéro 1 et les trois autres le numéro 0.

On tire au hasard et simultanément deux jetons.

1° a) Soit X la somme des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X ?

b) Soit Y la variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 si les deux jetons tirés ont des numéros différents, et la valeur 1 si les deux jetons tirés ont le même numéro. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

2° Quelle est la loi de probabilité du couple (X, Y) ? Ce couple est-il un couple de variables aléatoires réelles indépendantes ?

32 On dispose de deux dés cubiques : un bleu et un rouge dont les faces portent les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6. On considère l'ensemble des trente-six éventualités, qui peuvent résulter d'un jet des deux dés. Ces éventualités sont supposées équiprobables. On jette les deux dés. On désigne par X (resp. Y) l'application qui, à chaque jet, associe le chiffre marqué par le dé bleu (resp. la somme des chiffres marqués par les deux dés).

1° Étudier la loi conjointe du couple (X, Y) . Déterminer les lois marginales.

2° Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?

3° Soit Z la variable aléatoire $X - Y$.

a) Déterminer la loi de probabilité de Z .

b) Définir la fonction de répartition de Z et construire sa courbe représentative.

33 On place trois boules distinctes a, b, c dans trois urnes numérotées 1, 2, 3; chaque urne peut contenir jusqu'à trois boules.

1° Définir l'univers des éventualités.

On suppose une répartition équiprobable des événements possibles (boules placées au hasard). X est la variable aléatoire réelle représentant le nombre d'urnes vides et Y est la variable aléatoire réelle représentant le nombre de boules dans l'urne 1.

2° Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) , puis les lois marginales de X et de Y . Ces variables aléatoires réelles sont-elles indépendantes ?

3° Calculer les espérances mathématiques respectives des variables aléatoires X , Y et XY .

Trouver une relation entre ces trois nombres. Peut-on en tirer une conclusion ?

(Baccalauréat 1973.)

34 On considère quinze boules numérotées de 1 à 15. L'expérience consiste à tirer une boule parmi les quinze et à relever son numéro N . On suppose que les tirages sont tous équiprobables.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire réelle qui, à chaque tirage, associe le reste de la division de N par 3 (resp. le reste de la division de N par 2.)

1° Donner, sous forme de tableau, la loi conjointe du couple (X, Y) . En déduire la loi marginale de X et celle de Y .

2° Calculer l'espérance mathématique de X et celle de Y . Calculer la variance de X et celle de Y .

3° Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?

35 Soient X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 0 et 1. Soit p un nombre réel ; la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée dans le tableau suivant :

Y \ X	1	0
1	p	$\frac{1}{2} - p$
0	$\frac{1}{3} - p$	$\frac{1}{6} + p$

1° A quel intervalle le réel p doit-il appartenir pour que ces données soient acceptables ? Déterminer les lois marginales respectives de X et de Y .

2° Calculer les espérances mathématiques et les écarts-types respectifs de X et de Y .

3° Déterminer p de façon que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes. (Baccalauréat 1973.)

36 Deux variables aléatoires X_1 et X_2 prennent les valeurs 0, 1, 2. Comment doit-on choisir le nombre réel p pour que le tableau suivant donne une loi conjointe du couple (X_1, X_2) ?

X ₂ \ X ₁	0	1	2
0	p	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{4}p$
1	$2p$	p	$\frac{1}{2}p$
2	$4p$	$2p$	p

Quelles sont alors les lois marginales ?

Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Soit $Y = X_1 X_2$; calculer l'espérance mathématique de Y . (Baccalauréat 1973.)

37 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C trois événements deux à deux indépendants et a, b, c les probabilités respectives de A, B, C . Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

1° $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;

2° $(A \cup B) \cap (A \cup C)$;

3° $\overline{A \cup B \cup C}$;

4° $A \cap (\overline{B \cup C})$.

- * **38** Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On extrait au hasard sans remise quatre boules. Soit X l'application qui, à chaque extraction, associe le produit des numéros inscrits sur les boules extraites.

X est-elle une variable aléatoire réelle ?

Quelle est la probabilité pour que X ait une valeur paire ?

On pourra désigner par A l'événement : la première boule extraite porte un numéro pair, par B l'événement : la deuxième boule extraite porte un numéro pair, etc. et utiliser l'exercice n° 2.

- * **39** On rappelle qu'un tétraèdre régulier est un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux. Lorsqu'on lance un tel tétraèdre considéré comme un dé, l'une des faces est cachée, les trois autres sont visibles.

On considère deux dés tétraédriques; chaque face de chacun d'eux a la même probabilité d'être cachée.

Sur le premier dé T_1 , trois faces sont peintes en vert, la quatrième en noir. Sur le deuxième dé T_2 , deux faces sont peintes en bleu, une en vert et la quatrième en rouge.

1° On lance T_1 et on considère la variable aléatoire réelle X_1 qui, à chaque jet, associe le nombre de couleurs visibles. Déterminer la loi de probabilité de X_1 , son espérance mathématique et son écart-type.

2° On lance T_2 et on considère la variable aléatoire réelle X_2 qui, à chaque jet, associe le nombre de couleurs visibles. Déterminer la loi de probabilité de X_2 , son espérance mathématique et son écart-type.

3° On lance simultanément T_1 et T_2 de façon indépendante. Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque jet, associe le nombre de couleurs visibles sur l'ensemble des deux dés. Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et son écart-type.

Loi binomiale. Loi faible des grands nombres.

40 Un dé truqué est tel que la probabilité d'obtenir le chiffre 1 à chaque jet soit égale à 0,8. Les cinq autres éventualités (chiffres 2, 3, 4, 5, 6) ont la même probabilité d'apparition.

1° On jette une fois ce dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

2° On jette ce dé quatre fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois un nombre impair ? On calculera cette probabilité à 10^{-3} près.

41 On considère un dé à six faces : deux faces sont marquées 0, quatre faces sont marquées 1.

Les probabilités d'apparition de chaque face sont égales.

On lance ce dé trois fois de suite (les lancers sont indépendants) et on note à chaque fois le numéro figurant sur la face supérieure du dé. Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque épreuve, associe la somme des trois résultats obtenus.

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X .

42 On dispose d'un lot de trente-deux pièces usinées et l'on sait que huit de ces pièces sont défectueuses.

D'un tel lot on extrait au hasard une pièce que l'on examine et que l'on remet aussitôt dans le lot. On effectue ainsi successivement quatre tirages; les probabilités de sortie de chaque pièce sont égales.

Soit X la variable aléatoire réelle dont la valeur numérique est le nombre de pièces défectueuses observées après ces quatre tirages.

1° Quelle est la loi de probabilité de X ?

2° Quelle est la probabilité d'extraire au moins une pièce défectueuse en quatre tirages ?

43 1° On pose à un candidat une question en lui proposant trois réponses (dont la réponse correcte).

Le candidat, qui ignore la bonne réponse, donne au hasard l'une des trois réponses proposées. Quelle est la probabilité pour qu'il donne la réponse correcte ?

2° Un test se compose de quatre questions posées dans les conditions ci-dessus. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à trois questions ? à quatre questions ?

44 Une urne contient trois boules rouges et sept boules blanches indiscernables au toucher.

1° On tire simultanément trois boules de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des événements A , B , C suivants :

A : on obtient au plus une boule blanche;

B : on obtient une boule blanche exactement;

C : on obtient au moins une boule blanche.

2° On tire trois boules, une à une, sans les remettre dans l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements A' , B' , C' suivants :

A' : on obtient trois boules rouges;

B' : on obtient deux boules blanches aux deux premiers tirages et une boule rouge au dernier;

C' : on obtient au moins une boule rouge.

3° On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On effectue ainsi trois tirages successifs de une boule.

Soit Ω l'ensemble des résultats possibles et X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément ω de Ω , associe le nombre de tirages d'une boule rouge.

a) Déterminer l'ensemble image $X(\Omega)$ de Ω par X .

b) Soit k un élément de $X(\Omega)$. Calculer $P(\{X = k\})$.

Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X .

45 On suppose que tous les tirages effectués sont équiprobables.

1° On tire une carte dans un jeu de trente-deux cartes. Quelle est la probabilité pour que la carte obtenue soit un roi ou une dame ?

2° On tire une carte du jeu de trente-deux cartes; on la regarde et on la remet dans le jeu. On effectue ainsi cinq tirages successifs. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur pour cinq tirages successifs est le nombre de fois où l'on a obtenu un roi ou une dame.

Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et sa variance.

Les résultats seront donnés avec la précision permise par les tables de logarithmes. (Baccalauréat 1973.)

46 Les étages d'un immeuble sont désignés de la manière suivante : niveau 1, niveau 2, niveau 3, niveau 4, niveau 5.

Ces étages sont desservis par un ascenseur et l'on admet que l'appel de l'ascenseur à un niveau est un événement élémentaire qui a une probabilité proportionnelle au numéro du niveau.

1° Quelle est la probabilité pour que l'ascenseur soit appelé au niveau 4 ?

- 2° On suppose qu'un appel ne dépend pas de l'appel précédent. L'ascenseur est appelé quatre fois de suite; quelle est la probabilité pour que l'ascenseur soit appelé
- une fois et une seule au niveau 4;
 - deux fois, au plus, au niveau 3;
 - au moins deux fois au niveau 2.

47 Un magasin vend deux produits différents A et B. D'après une enquête effectuée dans ce magasin, la probabilité pour qu'un client, pris au hasard, achète le produit A (resp. B) est 0,6 (resp. 0,3).

1° Quelle est la probabilité pour que neuf clients, pris au hasard, achètent tous le produit A ?

2° Quelle est la probabilité pour que sur dix clients, pris au hasard, neuf achètent le produit A ?

3° Quelle est la probabilité pour que sur vingt clients, pris au hasard, dix achètent le produit B ?

On donnera pour chacune de ces probabilités des valeurs approchées à 10^{-2} près.

48 On dispose d'un disque mobile autour d'un axe; ce disque est divisé en quatre quadrants peints respectivement en rouge, bleu, vert, noir. Le joueur lance le disque et, à l'équilibre, l'un des quadrants s'arrête devant un repère; le joueur tire donc rouge R, bleu B, vert V ou noir N.

Le disque n'est pas parfaitement équilibré. On a établi expérimentalement les égalités suivantes :

$$P(\{N\}) = 4 P(\{B\}), \quad 2 P(\{B\}) = P(\{R\}), \quad P(\{V\}) = 3 P(\{B\}).$$

Lorsque le joueur tire B, il marque deux points; lorsqu'il tire R, il marque un point; lorsqu'il tire V, il ne marque aucun point; lorsqu'il tire N, il perd un point.

1° On désigne par X la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Quelle est la loi de probabilité de X ? Quelle est son espérance mathématique ?

2° On lance deux fois le disque; les deux épreuves sont considérées comme indépendantes. On désigne par Z la variable aléatoire représentant le gain du joueur après ces deux épreuves.

Quelle est la loi de probabilité de Z ?

(Baccalauréat 1973.)

49 1° Soit X_1 une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$.

La loi de probabilité de X_1 est définie par :

$$P(\{X_1 = 1\}) = p; \quad P(\{X_1 = -1\}) = q; \quad P(\{X_1 = 0\}) = 1 - p - q.$$

Soient deux variables aléatoires réelles X_2 et X_3 , définies sur le même espace probabilisé, de même loi de probabilité que X_1 . On suppose les trois variables aléatoires réelles X_1, X_2, X_3 indépendantes.

Soit S la variable aléatoire réelle égale à $X_1 + X_2 + X_3$.

a) Quelle est l'espérance mathématique de S ? Quelle est la variance de S ?

Démontrer que l'on a : $S(\Omega) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Quelle est la loi de probabilité de S ?

b) Calculer $P(\{S > 0\})$; $P(\{S = 0\})$; $P(\{S < 0\})$.

2° Deux joueurs A et B jouent trois parties successives d'un même jeu; à chaque partie, le joueur A a une probabilité de 0,5 de gagner, le joueur B a une probabilité de 0,4 de gagner et il y a une probabilité de 0,1 pour qu'il y ait match nul. Le vainqueur est celui qui a gagné le plus de parties.

Calculer les probabilités respectives des événements suivants :

A est vainqueur; B est vainqueur; il n'y a pas de vainqueur. (Baccalauréat 1973.)

- 50** 1° On écrit au hasard une suite de n chiffres; on suppose que les chiffres successifs sont indépendants et que les dix chiffres possibles sont équiprobables. Calculer la probabilité pour que, parmi ces n chiffres, figure trois fois le chiffre 5.
 2° Déterminer n tel que la fréquence d'apparition du chiffre 7 soit comprise entre 5 % et 15 % avec une probabilité supérieure à 0,9.

- 51** On répète n fois l'expérience " tirer une carte d'un jeu de trente-deux cartes " Après chaque expérience on remet la carte tirée dans le jeu et on mélange le jeu à nouveau.
 1° Calculer, en fonction de n , la probabilité $p(n)$ d'obtenir au moins un as dans la liste des n cartes tirées.
 2° Déterminer n tel que la fréquence d'apparition d'un roi ou d'une dame soit comprise entre 20 % et 30 % avec une probabilité supérieure à 0,8.

- 52** Un joueur lance plusieurs fois une pièce de monnaie dont la probabilité de retomber sur " face " est p .
 On admet que les lancers sont indépendants.
 1° Le joueur lance trois fois la pièce. Soit X la variable aléatoire définie par : X prend la valeur k si la pièce est retombée k fois sur " face ".
 Déterminer la loi de probabilité de X .
 On suppose que l'on a : $p = \frac{2}{3}$. Construire la courbe représentative de la fonction de répartition de X et calculer $E(X)$.
 2° Le joueur lance n fois la pièce. On suppose que l'on a : $p = \frac{1}{4}$. Déterminer n tel que la fréquence d'apparition du côté " pile " soit comprise entre 70 % et 80 % avec une probabilité supérieure à 0,95.

Problèmes.

- 53** Une agence loue des voitures à la journée. Son parc de m voitures lui coûte chaque jour $30m$ francs. Chaque voiture louée rapporte par jour un bénéfice net de 20 F. Si un client se présente lorsque le parc est vide, l'agence, pour ne pas perdre le client, lui loue une voiture empruntée à un confrère et enregistre alors une perte nette de 10 francs. On pose : $0 \leq m \leq 9$.
 On considère la variable aléatoire N qui prend comme valeurs le nombre n de clients se présentant en un jour pour louer une voiture pour la journée; on admettra que N prend exclusivement les valeurs entières 0, 1, ..., 9.
 Soient P la probabilité associée à N et B le bénéfice aléatoire associé à N .
 1° Calculer, en fonction de n et de m , le bénéfice quotidien $b(n, m)$ réalisé par l'agence, en considérant m fixé à chacune des valeurs entières de 0 à 9. On pourra présenter les calculs numériques dans un tableau à double entrée.
 2° On suppose que P est uniforme. Calculer l'espérance mathématique et la variance de N .
 (HEC 1973, partiel.)

- 54** Une urne A contient trois boules noires et deux boules blanches. Une urne B contient quatre boules noires et une boule blanche. Dans chaque urne, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.
 1° On tire une boule de A et une boule de B; quelle est la probabilité pour que, à l'issue de ces opérations, les deux urnes aient la même composition ?

2° Les urnes ont la composition donnée au début de l'exercice. On tire une boule de A que l'on place dans B, puis on tire une boule de B. Quelle est alors la probabilité pour que B ne contienne que des boules noires ?

3° Les urnes ont à nouveau la composition donnée au début de l'exercice. On tire simultanément trois boules de A; ces boules sont ensuite placées dans B; soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules noires contenues dans B à l'issue de ces opérations.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction de répartition de X.

(Baccalauréat 1973.)

55 Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $-2, -1, 3, 4$ avec les probabilités $0,10 \quad 0,65 \quad 0,15 \quad 0,10$.

1° Calculer l'espérance mathématique de X et son écart-type σ .

2° Déterminer, suivant le réel positif h , la probabilité $P(h)$ de l'événement $\{|X| \geq h\}$.

3° Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions

$h \mapsto P(h)$ et $h \mapsto \frac{\sigma^2}{h^2}$. Comparer $P(h)$ et $\frac{\sigma^2}{h^2}$.

(Baccalauréat 1973.)

56 Une banque a ouvert un guichet automatique qui distribue des billets de banque de 100 F.

Les clients, qui possèdent une carte magnétique, se sont vus attribuer un numéro N compris entre 0000 inclus et 9999 inclus; ce numéro est un code secret.

Le client qui se présente au guichet automatique introduit sa carte, puis il compose le numéro de code; si le numéro composé est exactement le code N, le client peut retirer des billets; dans le cas contraire la carte est rejetée; à l'issue de trois essais infructueux, le guichet conserve la carte. D'autre part on suppose que le client ne recommence pas deux fois le même numéro.

1° Le client A se présente au guichet alors qu'il ne se souvient plus si son numéro N est 1112, 1121, 1211 ou 2111. Quelle est la probabilité p_1 pour que A compose son code N au premier essai ? La probabilité p_2 pour qu'il réussisse au deuxième essai ? Quelle est la probabilité p'_2 pour qu'il réussisse au plus tard au deuxième essai ?

2° Le client B se présente au guichet alors qu'il ne se souvient plus du tout de son code N. Quelle est la probabilité P_1 pour que B compose son code N au premier essai ? Quelle est la probabilité P_2 pour que B réussisse au deuxième essai ? Quelle est la probabilité P_3 pour que B réussisse au troisième essai ? Quelle est la probabilité P pour que B réussisse à retirer de l'argent ?

3° On estime à $1/10000$ la proportion des personnes susceptibles de tenter leur chance auprès du guichet automatique avec une carte trouvée ne leur appartenant pas; quelle est la probabilité P' pour que le client C, qui a perdu sa carte, voit son compte débité contre son gré ?

57 Quatre jetons sont placés dans une urne d'où ils sont tirés, avec équiprobabilité,

successivement et sans remise. Ils portent les indications : $\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}$.

Ces nombres réels, dans l'ordre où ils sont tirés, sont appelés a, b, c, d .

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini par :
$$\begin{cases} f(\vec{i}) = a\vec{i} + c\vec{j} \\ f(\vec{j}) = b\vec{i} + d\vec{j} \end{cases}$$

1° Calculer la probabilité pour que f soit une rotation.

2° Calculer la probabilité pour que le déterminant de f soit différent de 1 et de -1 .

- 3° Soit X la variable aléatoire qui, à chaque endomorphisme, associe son déterminant. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
- 4° On répète sept fois l'expérience : on obtient donc sept déterminants; quelle est la probabilité pour que trois d'entre eux soient égaux soit à 1 soit à -1 ?

58 Une urne contient deux jetons; sur l'un est inscrit le nombre 2 et sur l'autre le nombre -3 . On tire trois fois de suite un jeton de l'urne en le remettant dans celle-ci à chaque fois, après avoir noté le nombre qui y est inscrit. Si a, b, c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a, b, c) , on associe l'équation dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $az^2 + bz + c = 0$. (1)

On suppose que tous les triplets ont la même probabilité d'être obtenus.

- 1° Quelle est la probabilité pour que l'équation (1) admette deux solutions réelles ?
- 2° Soit X (resp. Y) la variable aléatoire réelle, qui, à tout triplet obtenu, associe la somme (resp. le produit) des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1). Déterminer les lois de probabilité de X et de Y . Calculer les espérances mathématiques respectives de X et de Y .
- 3° Quelle est la loi conjointe du couple (X, Y) ?

59 A. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{(x+3)(x+8)}{(x+5)^2}$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un plan affine réel euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On déterminera en particulier les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes Ox et Oy et avec l'asymptote parallèle à Ox .

B. Soit x un entier naturel. On place dans une urne $(1+x)$ boules rouges, $(3+x)$ boules blanches et six boules noires.

Un joueur tire une boule de l'urne; on suppose tous les tirages équiprobables. S'il tire une boule rouge, il a perdu; s'il tire une boule blanche, il a gagné; s'il tire une boule noire, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage toujours avec équiprobabilité. S'il tire alors une boule blanche, il a gagné; sinon il a perdu.

- 1° Démontrer que la probabilité $p(x)$ que ce joueur a de gagner la partie est $\frac{1}{2} f(x)$.
- 2° Déterminer l'entier x pour que cette probabilité soit maximale; déterminer alors cette probabilité. Déterminer la limite éventuelle de la fonction $x \mapsto p(x)$ en $+\infty$.

C. Dans une autre urne, on place $(10+x)$ boules blanches et $(5+2x)$ boules rouges (x est toujours un entier naturel).

Un joueur tire une boule de cette nouvelle urne; chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

S'il tire une boule blanche, il a gagné; sinon il a perdu.

- 1° Quelle est la probabilité $q(x)$ qu'a ce joueur de gagner à ce nouveau jeu ?
- 2° Tracer dans le même plan que dans A, la courbe représentative de la fonction $g: x \mapsto 2q(x)$.
- 3° En déduire qu'il existe un entier x_0 , que l'on déterminera, tel que pour $x \geq x_0$ le joueur ait au moins autant de chances de gagner au premier jeu qu'au deuxième jeu.

Équations différentielles

La théorie des équations différentielles est un sujet très vaste; conformément au programme, nous n'étudions ici que les deux équations différentielles du type suivant: $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$.

1. Équation : $y' = ay$.

- 1.1 Soit a un nombre réel. Cherchons l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée f' satisfait à : $f' = af$ (1), c'est-à-dire telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = af(x)$

De telles fonctions se présentent très fréquemment dans l'étude de problèmes concrets; nous en verrons quelques exemples plus loin.

Il est traditionnel de noter $y = f(x)$ l'image par f du réel x , ainsi que $y' = f'(x)$ le nombre dérivé de f en x .

La condition (1) est donc équivalente à : $\forall x \in \mathbb{R}, y' = ay$. (2)

Par un abus de langage universellement adopté, **résoudre l'équation différentielle** : $y' = ay$, c'est chercher l'ensemble des fonctions f , dérivables sur $\mathbb{R}$, qui satisfont la condition (1). Nous désignons cet ensemble par $\mathcal{S}$.

- 1.2 Soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Nous avons vu dans le chapitre 7, que $\mathcal{D}_1$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème suivant exprime la propriété essentielle de $\mathcal{S}$.

THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_1$.

Démonstration :

Utilisons le théorème 3.3 du chapitre 1 du tome 1.

- La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{S}$; cet ensemble $\mathcal{S}$ est donc non vide.

- Soient f et g deux éléments quelconques de S . La fonction $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; des égalités : $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$, il résulte que cette fonction appartient à S .
- Soient λ un réel quelconque et f un élément quelconque de S . La fonction λf est dérivable sur $\mathbb{R}$; des égalités : $(\lambda f)' = \lambda f' = \lambda(af) = a(\lambda f)$, il résulte que cette fonction appartient à S . ■

1.3 Étudions d'abord le cas où a est nul.

L'ensemble S est alors l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée f' satisfait à : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$.
De la propriété P_2 du paragraphe 3.2 du chapitre 7, il résulte que S est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Nous énonçons donc :

Si $a = 0$, l'ensemble S est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que, dans ce cas, S est un espace vectoriel réel de dimension 1, dont une base est constituée, par exemple, par la fonction constante $x \mapsto 1$.

1.4 Étudions maintenant le cas où a est non nul.

Nous allons démontrer que S est encore un espace vectoriel réel de dimension 1.

P1

La fonction $f_1 : x \mapsto e^{ax}$ appartient à S .

Démonstration :

La fonction f_1 est la composée de la fonction $x \mapsto ax$ et de la fonction $x \mapsto e^x$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction f_1 est donc elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = a \cdot e^{ax} = a f_1(x)$.
La fonction f_1 appartient donc à S . ■

P2

L'espace vectoriel S est de dimension 1 et la fonction $f_1 : x \mapsto e^{ax}$ en constitue une base.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que S est égal à la droite vectorielle de $\mathcal{D}_1$ engendrée par f_1 .

- Puisque f_1 appartient à S , la droite vectorielle de $\mathcal{D}_1$ engendrée par f_1 est incluse dans S .

- Soit maintenant f un élément quelconque de S . Démontrons que f appartient à la droite vectorielle de $\mathcal{D}_1$ engendrée par f_1 , c'est-à-dire, qu'il existe un réel λ tel que l'on ait : $f = \lambda f_1$.

Nous avons vu dans le chapitre 11 que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{ax} > 0$.

La fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{f_1(x)}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction

dérivée g' satisfait à : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{f'(x)f_1(x) - f(x)f_1'(x)}{(f_1(x))^2}$

Les fonctions f et f_1 appartiennent à S ; on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{af(x)f_1(x) - af(x)f_1(x)}{[f_1(x)]^2} = 0.$$

De la propriété P_2 du paragraphe 3.2 du chapitre 7, il résulte qu'il existe un réel λ tel que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda$ et par suite, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda f_1(x). \quad \blacksquare$$

1.5 Récapitulation : Si a n'est pas nul, l'ensemble S est l'ensemble des fonctions f qui satisfont à la propriété suivante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{ax}$.
D'autre part, ce résultat reste valable si a est nul; on a alors :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{0x} = \lambda \cdot e^0 = \lambda$.
Nous énonçons donc :

THÉORÈME : Soit a un réel. L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle : $y' = ay$, est l'ensemble des fonctions f qui possèdent la propriété suivante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{ax})$.

Exemples.

1. Considérons un point matériel M animé d'un mouvement rectiligne pendant l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$; soient D la droite support de sa trajectoire, O un point D et $\vec{i}$ un vecteur directeur de D . A tout instant t de I , la position M_t de M est le point de D d'abscisse $x(t)$ dans le repère $(O, \vec{i})$.

Déterminons la loi horaire du mouvement, c'est-à-dire la fonction $t \mapsto x(t)$, sachant que ce mouvement satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \in I, x'(t) = -x(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto x(t)$ est donc une solution de l'équation différentielle : $y' = -y$.

Du théorème 1.5, il résulte qu'il existe un réel λ tel que l'on ait : $\forall t \in I, x(t) = \lambda e^{-t}$.
D'autre part, on a : $x(0) = \lambda e^0 = \lambda$. Il en résulte $\lambda = 1$.

La loi horaire du mouvement est donc la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

Soit A le point défini par : $\vec{OA} = \vec{i}$. Lorsque t décrit $I = [0, +\infty[$, le point M parcourt le segment $[O, A]$ de A vers O , sans jamais atteindre le point O : on a, en effet : $\forall t \in [0, +\infty[, e^{-t} > 0$.

On peut toutefois exprimer le fait que l'on ait : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ en disant que le point O est atteint « au bout d'un temps infini ».

2. Soit $X(t)$ la mesure en grammes de la masse de radium contenue dans un échantillon de matière radioactive à l'instant t de l'intervalle de temps $I = [0, +\infty[$. Cette masse décroît avec le temps; on a donc : $\forall t \in I, X'(t) \leq 0$. On appelle **activité** de l'échantillon la fonction $t \mapsto |X'(t)|$ c'est-à-dire la fonction $t \mapsto -X'(t)$; on vérifie expérimentalement que l'activité d'une substance est proportionnelle à la masse de radium qu'elle contient; il existe donc un réel strictement positif a tel que l'on ait : $\forall t \in I, -X'(t) = aX(t)$ c'est-à-dire : $\forall t \in I, X'(t) = -aX(t)$.
On a donc : $\forall t \in I, X(t) = X(0)e^{-at}$.

Cherchons au bout de combien de temps, la masse de radium contenue dans l'échantillon, aura diminué de moitié : il suffit pour cela de déterminer le réel T tel que l'on ait :

$$X(T) = \frac{1}{2} X(0).$$

$$\text{On a : } \left(X(T) = \frac{1}{2} X(0) \iff X(0)e^{-aT} = \frac{1}{2} X(0) \right).$$

$$\text{Par hypothèse, on a : } X(0) \neq 0; \text{ on a donc : } e^{-aT} = \frac{1}{2},$$

$$\text{ce qui équivaut à : } T = \frac{\text{Log } 2}{a}.$$

Le nombre T est appelé la **période** du radium.

On a : $a \approx 1,4 \times 10^{-11}$ g/s et par suite : $T \approx 1\,600$ ans.

2. Équation : $y'' + \omega^2 y = 0$.

2.1 Soit ω un nombre réel positif ou nul. De façon analogue au paragraphe 1.1, résoudre l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$, c'est chercher l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions f définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfont la condition suivante : $f'' + \omega^2 f = \tilde{0}$, c'est-à-dire telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$. Ce langage est d'ailleurs utilisé pour toutes les équations différentielles.

2.2 Soit $\mathcal{D}_2$ l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{D}_2$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a encore la propriété fondamentale suivante :

THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_2$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.2.

2.3 Étudions d'abord le cas où ω est nul.

L'ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde f'' satisfait à : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0$.

Soit f un élément de $\mathcal{S}$. Il existe donc un réel λ tel que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda$ et par suite, un réel μ tel que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x + \mu$. La fonction f est donc une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, toute fonction affine f sur $\mathbb{R}$ satisfait bien à : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0$ et, par suite, appartient à $\mathcal{S}$.

Nous énonçons donc :

Si $\omega = 0$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que, dans ce cas, $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

2.4 Étudions maintenant le cas où ω est non nul.

$\mathcal{S}$ est encore un espace vectoriel de dimension 2.

P1 Si ω n'est pas nul, les fonctions $g_1 : x \mapsto \sin \omega x$ et $g_2 : x \mapsto \cos \omega x$ forment une famille libre de $\mathcal{S}$.

• Démonstration :

• Démontrons d'abord que g_1 et g_2 appartiennent à $\mathcal{S}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g_1'(x) = \omega \cos \omega x$

et $\forall x \in \mathbb{R}, g_1''(x) = -\omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 g_1(x)$.

De même, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g_2'(x) = -\omega \sin \omega x$

et $\forall x \in \mathbb{R}, g_2''(x) = -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 g_2(x)$.

• Démontrons maintenant que la famille (g_1, g_2) est libre.

Soient deux réels α et β tels que l'on ait :

$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) = 0$.

On a alors, en particulier : $\alpha g_1(0) + \beta g_2(0) = 0$ et

$\alpha g_1\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) + \beta g_2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 0$.

Il en résulte : $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. ■

P2

L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ est de dimension 2 et les fonctions

$g_1 : x \mapsto \sin \omega x$ et $g_2 : x \mapsto \cos \omega x$ en constituent une base.

Nous admettons que $\mathcal{S}$ est de dimension 2; la famille (g_1, g_2) qui est une famille libre de $\mathcal{S}$ en est alors une base.

2.5 Nous énonçons donc le théorème suivant :

THÉORÈME : Soient ω un réel positif ou nul et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

- Si ω est nul, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.
- Si ω n'est pas nul, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions f qui possèdent la propriété suivante : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x)$.

Exemple.

Considérons l'équation différentielle $y'' = -4y$. (1)

Soient a et b deux réels. Démontrons qu'il existe une et une seule solution f de cette équation différentielle telle que l'on ait : $f(0) = a$ et $f'(0) = b$.

Du théorème 2.5, il résulte qu'il existe deux réels λ et μ tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x.$$

On a donc aussi : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\lambda \sin 2x + 2\mu \cos 2x$.

D'autre part, on a : $f(0) = \lambda$ et $f'(0) = 2\mu$ et, par suite, on a : $f(0) = a$ et

$$f'(0) = b \text{ si et seulement si on a : } \lambda = a \text{ et } \mu = \frac{b}{2}.$$

La fonction $x \mapsto a \cos 2x + \frac{b}{2} \sin 2x$ est donc la seule solution f de (1) qui satisfait aux conditions : $f(0) = a$ et $f'(0) = b$.

Remarque : Un résultat établi en classe de Première et rappelé dans le paragraphe 2.11 du chapitre 9, nous fournit la description suivante de l'ensemble $\mathcal{S}$, dans le cas où ω n'est pas nul.

Si $\omega \neq 0$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions f qui possèdent la propriété suivante :
il existe deux réels A et φ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos (\omega x + \varphi)$.

On peut interpréter ce résultat en disant que l'ensemble $\mathcal{S}^*$ des fonctions non nulles de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des lois horaires des mouvements rectilignes vibratoires simples de centre l'origine et de pulsation ω .

Problèmes de révision

PROBLÈMES DE RÉVISION

P. 137
140

✱ Dans les problèmes du baccalauréat, nous avons scrupuleusement respecté la rédaction du texte proposé aux élèves, même si nous n'étions pas entièrement d'accord avec celle-ci.

1 1° On considère l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x} \quad (n \text{ entier naturel non nul}).$$

a) Calculer la limite de $\text{Log} \left[\frac{x^n}{e^x} \right]$ quand x tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de $\frac{x^n}{e^x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Donner le tableau de variations de f_n en distinguant les deux cas suivants : n est pair et n est impair.

c) Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions f_2 et f_3 ; on précisera la position relative de ces courbes.

d) En revenant au cas général, montrer que, si $0 \leq x \leq 1$,

$$\text{alors on a : } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}.$$

$$2^\circ \text{ Soit } I_n = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt.$$

a) Quelle est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe e^{1-t} ? En déduire à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de I_1 .

b) De même, en intégrant I_n par parties, vérifier la relation de récurrence :

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{x^n}{n!} e^{1-x}.$$

c) Démontrer que l'on a : $I_n = e - e^{1-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$.

$$\text{c'est-à-dire : } I_n = e - e^{1-x} \left[\sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \right].$$

Quelle est la limite, pour n fixé, de I_n quand x tend vers $+\infty$?

3° Dans toute cette question, on donne à x la valeur 1 et l'on pose :

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt.$$

a) Démontrer : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$.

En déduire, en utilisant le calcul de I_n :

$$0 \leq e - \left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right] \leq \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right] \leq e \leq \left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right] + \frac{1}{n!}.$$

b) Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right]$?

c) En calculant $\left[\sum_{p=0}^7 \frac{1}{p!} \right]$, donner le meilleur encadrement, permis par ce calcul, du nombre e .

Série C, Dijon, juin 1972.

2 A) Soit la fonction numérique f suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(x) = x + 1 - \frac{x}{x^2 + 1},$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est appelée (C).

1° a) Étudier les variations de f .

b) Montrer que f est bijective.

2° a) Montrer que (C) admet le centre de symétrie $I(0, 1)$ et une asymptote.

b) Représenter (C) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ où l'unité de longueur est le centimètre. [On ne cherchera pas à calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe $x'Ox$.]

3° a) Montrer que f admet pour primitive, F , définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{où } \ln X \text{ désigne le logarithme népérien de } X.$$

b) Calculer, à 10^{-2} près par excès, l'aire de la portion de plan limitée par (C), son asymptote et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=\sqrt{3}$, sachant que $0,693 < \ln 2 < 0,694$.

4° Soit le point $M(t)$ dont les coordonnées x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont données

$$\text{en fonction du temps } t \text{ par : } \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1 + \frac{\sin^3 t}{\cos t}, \end{cases} \quad \text{où } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Montrer que (C) est le support de la trajectoire du point M . La courbe (C) est-elle entièrement décrite par M ?

B) On pose $Z = z + 1 - \frac{z}{z^2 + 1}$, où z est un nombre complexe de module 1.

Le nombre complexe conjugué de z sera noté $\bar{z}$. On pose $x = z + \bar{z}$.

1° Montrer que $Z = z + 1 - \frac{1}{z + \bar{z}}$. En déduire la partie réelle X de Z en fonction de x .

2° Représenter la fonction, φ , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$x \mapsto \varphi(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{x},$$

par une courbe (Γ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'axes $x'Ox$ et $x'Ox$.

Montrer que (Γ) admet un centre de symétrie, qui sera noté ω .

3° Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire, d'abscisse positive, appartenant à la droite vectorielle engendrée par $2\vec{u} + \vec{v}$.

Écrire l'équation de (Γ) dans le repère $(\omega, \vec{n}, \vec{v})$. Reconnaître la nature de (Γ) .

4° Montrer que la courbe représentant X , fonction de x obtenue au B, 1°, est une partie de (Γ) , que l'on définira.

Série E, Reims, juin 1972

3 1° On partage l'intervalle $[-1, +1]$ au moyen des réels distincts ordonnés : $a_0 = -1, a_1, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n = +1$;

on définit, sur $[-1, +1]$, la fonction f par :
$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} |x - a_k|.$$

Sur $[a_k, a_{k+1}]$, f est une fonction affine, $f(x) = A_k x + B_k$; calculer A_k . En déduire le sens de variation de f sur $[-1, +1]$; déterminer, selon la parité de n , la valeur, ou les valeurs, de x rendant f minimale.

Il n'est demandé au 1° aucun autre calcul.

2° A un entier n fixé, $n \geq 2$, on associe la partition P_n de $[-1, +1]$ définie par les réels :

$b_0 = -1, b_1, \dots, b_k, \dots, b_{n-1}, b_n = +1$ qui satisfont à :

$$b_{k+1} - b_k = \frac{1}{2} (b_k - b_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Calculer $I = b_1 - b_0$, puis calculer b_k .

Pour chaque entier $n, n \geq 2$, on définit, alors sur $[-1, +1]$, la fonction, f_n , par

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} |x - b_k|.$$

Donner les expressions de $f_2(x)$ et de $f_3(x)$, où figurent respectivement trois et quatre telles valeurs absolues.

3° On se borne ici aux partitions P_n , où n est pair : $n = 2p$. Démontrer que la valeur c_p de x qui rend f_{2p} minimale et la valeur correspondante de f_{2p} sont

$$\frac{2^p - 1}{2^p + 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \cdot \frac{2^{p+1} - 1}{2^p + 1}.$$

Démontrer l'égalité, vraie pour tout p , $f_{2p}(c_p) = g(c_p)$, avec :

$$g(x) = \frac{\text{Log } 2}{2} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}, \quad u(x) = 3x + 1, \quad v(x) = \text{Log} \frac{1+x}{1-x};$$

le symbole Log désigne le logarithme népérien.

4° Étudier sur l'intervalle $]0, 1[$ seulement, la variation de g .

A cet effet, on constatera d'abord que, u' et v' étant les dérivées de u et v , $w = uv' - u'v$ a une dérivée strictement négative sur $]0, 1[$; on en déduira le sens de variation et le signe constant de w sur $]0, 1[$.

Construire avec soin la représentation graphique (Γ) de g dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 5 cm; préciser sur (Γ) plusieurs points de coordonnées rationnelles.

Pour étudier $\frac{g(x)}{x-1}$ au voisinage de $x = 1$, on pourra poser $x = 1 - X$.

N. B. — Le candidat utilisera sans démonstration :

a) au 2° et au 3°, l'égalité : $(1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1}) = 1 - q^n$.

b) au 4°, l'expression de $g(x)$, telle qu'elle est donnée au 3°.

(Série E, centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire, juin 1972.)

4 Soit la fonction f_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f_a(x) = ax + 1 + \text{Log}(ax).$$

(a est un paramètre réel et Log désigne la fonction logarithme népérien.)

A) 1° f_a existe-t-elle quel que soit a ? (Dans toute la suite a est supposé tel que f_a existe.) Quel est le domaine de définition de f_a ?

2° Soit (C_a) la courbe représentative de f_a en repère orthonormé. Montrer que (C_a) admet une direction asymptotique; (C_a) admet-elle une asymptote oblique?

3° Montrer que, pour tout $a \neq 0$ et pour tout x tel que $f_a(x)$ soit défini, on a : $f_a(x) = f_{-a}(-x)$.

Par quelle transformation géométrique simple (C_{-a}) se déduit-elle de (C_a) ?

4° Étudier la fonction f_2 et tracer (C_2) et (C_{-2}) .

Montrer à cette occasion que l'équation : $f_2(x) = 0$ admet une racine comprise

entre $\frac{1}{4e}$ et $\frac{1}{2e}$.

B) Soit E l'ensemble des courbes (C_a) quand a parcourt $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.
On définit dans E une loi de composition (notée $\star$) par $(C_a) \star (C_b) = (C_{ab})$.

1° Montrer que $(E, \star)$ possède une structure de groupe abélien.

2° Montrer que $(E, \star)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

3° Peut-on définir, dans E , une loi de composition (notée $\perp$) par :

$$(C_a) \perp (C_b) = (C_{a+b})?$$

4° Déterminer tous les couples (a, b) , d'entiers relatifs, tels que :

$$(C_a) \star (C_b) = (C_{a+b}).$$

C) Soit T_λ la transformation du plan dans lui-même, qui, à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') dans un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}), \text{ défini par : } x' = \frac{1}{\lambda} x \text{ et } y' = y, \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

1° Reconnaître la transformation T_λ .

Montrer que l'ensemble, $\mathcal{T}$, des transformations $T_\lambda (\lambda \in \mathbb{R}^*)$, muni de la loi de composition des applications, possède une structure de groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2° Quelle est la transformée par T_λ d'une courbe (C_a) ?

3° Montrer que T_λ est une bijection de E dans E .

E est l'ensemble des courbes (C_a) .

4° A-t-on l'égalité : $T_\lambda(C_a \star C_b) = T_\lambda(C_a) \star T_\lambda(C_b)$?

Si $a + b \neq 0$, a-t-on l'égalité : $T_\lambda(C_a \perp C_b) = T_\lambda(C_a) \perp T_\lambda(C_b)$?

5° Montrer que $(\mathcal{T}, \circ)$ et $(E, \star)$ sont isomorphes.

N.-B. — On donne pour valeurs décimales approchées des nombres e et $\log 2$ les nombres 2,7 et 0,7.

(séries C et E, Togo, juin 1972)

5 L'entier naturel n étant au moins égal à 1, on note g_n la fonction qui, à tout réel x strictement supérieur à n , associe $g_n(x) = (x - n) \log x - x \log(x - n)$, où $\log$ désigne le logarithme népérien.

1° Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(x + 1)^2 < 2x^2$. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'inégalité $p^2 < 2^p$ est vérifiée pour toute valeur de l'entier naturel p supérieur ou égale à 5.

Déterminer les signes de $g_n(n + 1)$ et de $g_n(n + 2)$ selon les valeurs de n .

2° Calculer les dérivées première et seconde, $g'_n(x)$ et $g''_n(x)$, de $g_n(x)$ par rapport à la variable x .

En déduire le sens de variation de g'_n et le signe de $g'_n(x)$, puis le sens de variation de g_n .

3° Trouver les limites de $g_n(x)$ lorsque x tend vers n et lorsque x tend vers $+\infty$.

Il pourra être commode d'écrire : $g_n(x) = -n \log x - x \log \left(1 - \frac{n}{x}\right)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé.

4° Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ a une racine, et une seule, notée x_n et que $x_n - n$ tend vers 1, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite dans les mêmes conditions de $x_{n+1} - x_n$?

5° Calculer l'intégrale : $F(a) = \int_a^{x_2} g_2(x) dx$, pour $a \in]2, x_2]$, et trouver la limite de $F(a)$, lorsque a tend vers 2.

(Série C, centre du bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire,
session de remplacement 1972)

6 On rappelle que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, noté F , muni

- d'une loi de composition interne (addition des fonctions numériques)

$$(\forall f \in F) (\forall g \in F) (\forall x \in \mathbb{R}) [(f+g)(x) = f(x) + g(x)];$$

- d'une loi de composition externe (multiplication par un réel) :

$$(\forall f \in F) (\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) [(\lambda f)(x) = \lambda f(x)],$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On désigne par E l'ensemble des applications φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-x}, a \text{ et } b \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Un élément de E est donc déterminé par la donnée d'un couple (a, b) de réels. On note φ_1 l'application correspondant au couple $(1, 0)$ et φ_2 celle correspondant au couple $(0, 1)$.

1° a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F et que (φ_1, φ_2) est une base de E .

b) Démontrer que la partie A de E formée des fonctions φ monotones (au sens large) sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E dont on indiquera une base.

Montrer que toute application φ , non nulle, de A possède une application réciproque, φ^{-1} . Expliciter φ^{-1} et préciser son ensemble de définition.

2° A toute fonction φ de E , on fait correspondre $I(\varphi) = \varphi + \varphi'$ (φ' étant la fonction dérivée de φ).

a) Démontrer que I est une application linéaire de E vers E . Quel est l'espace vectoriel $I(E)$, image de E , par cette application ? Donner la matrice L de I dans la base (φ_1, φ_2) .

b) Déterminer le noyau de I et l'ensemble des éléments de E invariants par I .

3° a) On suppose a et b rationnels.

Calculer une primitive de la fonction φ définie par : $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x}$

et déterminer les rationnels a et b tels que : $\int_{-1}^0 (ax + b)e^{-x} dx = -1$.

b) Étudier la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_1(x) = xe^{-x}$. Tracer la courbe représentative (C) de φ_1 dans un système d'axes orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$. Calculer la moyenne de φ_1 sur l'intervalle fermé $[-1, 0]$.

Déterminer l'aire comprise entre la courbe (C) , la droite $(x'x)$, la droite $(y'y)$ et la droite d'équation : $x = h$, h étant une constante positive. Quelle est la limite de cette aire quand h tend vers $+\infty$?

(Série C, Orléans-Tours, juin 1972)

7 Soient f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \text{Log} \frac{x-1}{x}$ (Log : logarithme népérien), et (C) sa courbe représentative dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A. 1° Étudier cette fonction.

2° Montrer que (C) admet un centre de symétrie ω .

3° Tracer (C) . (On construira, en particulier, les points d'abscisses $\frac{3}{2}$ et 3, ainsi que les tangentes en ces points).

B. 1° A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction u

$$u: x \mapsto \text{Log}(x+a) \quad (a: \text{réel donné})$$

(On remarquera que $u(x) = 1 \cdot \text{Log}(x+a)$).

2° Utiliser le résultat précédent pour calculer : $S(\lambda) = \int_{\lambda}^2 f(x) dx \quad (1 < \lambda < 2)$

3° Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} S(\lambda)$. Interprétation graphique.

C. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]1, +\infty[$.

1° Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et tracer, sur le graphique précédent, la courbe (Γ) représentative de la fonction : $x \mapsto g^{-1}(x)$.

2° Soit (C_1) l'ensemble des points de (C) d'abscisses négatives. Montrer que (Γ) est la transformée de (C_1) par un antidéplacement t composé d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation.

(Série E, Antilles-Martinique juin 1973)

8 I. On considère la fonction φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, déterminée par :

$$\varphi(t) = \frac{2t}{1+t} - \text{Log}(1+t) \quad (\text{Log : logarithme népérien}).$$

1° Étudier cette fonction : sens de variation, limites, tangentes aux points remarquables, branche infinie et tracer sa courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'axes $t'Ot, z'Oz$ (unité choisie 2 cm).

2° L'étude précédente montre qu'il existe un réel a supérieur à 1 et un seul, tel que $\varphi(a) = 0$. À l'aide d'une table numérique, placer les points d'abscisses 2, 3, 4 et déterminer les valeurs approchées par défaut et par excès de a , à un dixième près.

3° Écrire la fraction rationnelle $\frac{3t}{1+t}$ sous la forme $b + \frac{c}{1+t}$, b et c étant deux constantes réelles. Au moyen d'une intégration par parties, ramener le calcul de l'intégrale : $\int_0^x \text{Log}(1+t) dt$ au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle. En déduire la valeur de $\int_0^x \varphi(t) dt$.

4° Montrer que l'aire S de la partie du plan, ensemble des points dont les coordonnées (t, z) vérifient les inégalités : $\begin{cases} 0 \leq t \leq a \\ 0 \leq z \leq \varphi(t) \end{cases}$

$$\text{est donnée par : } S = \frac{a(a-3)}{a+1}.$$

Donner un encadrement de S à partir des valeurs approchées obtenues pour a .

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \text{Log}(1 + e^{2x})$.

1° Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(e^{2x})$.

En déduire le sens de variation de la fonction f .

2° Exprimer $f(x)$ en fonction de $u = e^{2x}$ seul. En déduire la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$.

3° En utilisant l'égalité : $1 + e^{2x} = e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$, trouver la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

4° Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox, y'Oy$ (unité : 2 cm).

Déterminer la valeur de x pour laquelle f présente un maximum, ainsi que la valeur de ce maximum; en donner un encadrement en utilisant les valeurs approchées de a .

(Série E, Bordeaux, juin 1973)

9 Soit E un plan affine rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) À tout réel non nul λ , on associe la courbe (C_λ) qui représente dans le repère

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ les variations de la fonction g_λ déterminée par : $g_\lambda(x) = x \text{Log} \frac{x}{\lambda}$

(Le symbole Log désigne le logarithme népérien).

- a) Étudier, pour λ strictement positif, les variations de la fonction h_λ déterminée par :
- $$\begin{cases} h_\lambda(x) = g_\lambda(x) & \text{si } x > 0 \\ h_\lambda(0) = 0. \end{cases}$$

On montrera que h_λ est continue sur $[0, +\infty[$.

Est-elle dérivable au point $x = 0$?

- b) Démontrer que toute courbe (C_λ) est transformée de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

- c) Construire sur une même figure les courbes (C_1) , (C_{-1}) et (C_e) , (on désigne par e la base des logarithmes népériens).

- d) Soit M_λ le point de (C_λ) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Quel est l'ensemble des points M_λ lorsque λ décrit l'ensemble des réels non nuls ?

- B) Soit a un nombre réel strictement positif donné. A tout nombre réel t , on associe l'application de E dans E notée f_t qui, à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = a^t x \\ y' = ta^t x + a^t y. \end{cases}$$

- a) Montrer que, pour t donné, f_t est une application affine bijective.

- b) On munit l'ensemble $\mathcal{F}_a$ des applications f_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$, de la loi de composition des applications, notée $\circ$.

Montrer que $(\mathcal{F}_a, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

- c) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans E par : $M \mathcal{R} M'$ si et seulement si il existe une application f_t appartenant à $\mathcal{F}_a$ telle que : $f_t(M) = M'$.

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un point donné M sera appelée orbite de M. On remarquera que l'orbite de M est l'ensemble des transformés de M par tous les éléments du groupe $\mathcal{F}_a$.

- d) Dans le cas particulier où $a = 1$, quelle est l'orbite du point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) ? Discuter suivant la position de M_0 .

- C) Dans toute la suite du problème on se restreint au cas : $a = e$.

- a) Soit A le point de coordonnées $(0, \mu)$. Quelle est l'orbite de A ?

- b) Soit B le point de coordonnées $(\lambda, 0)$ où λ est un réel non nul. Comparer l'orbite de B et la courbe (C_λ) .

- c) Démontrer que toute courbe (C_λ) est globalement invariante par tout élément du groupe $\mathcal{F}_e$.

- d) Démontrer que, par tout point d'abscisse non nulle, passe une courbe (C_λ) et une seule. Comment est réalisée la partition de E en classes d'équivalence, relativement à la relation $\mathcal{R}$ introduite à la question B. c ?.

(Série C, Dijon, juin 1973).

10 Log x désigne le logarithme népérien du nombre réel strictement positif x , log x son logarithme décimal.

On considère la fonction f , de $\mathbb{R} - (-1)$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$

et, pour chaque entier naturel non nul n , la fonction f_n de $\mathbb{R} - (-1)$ dans $\mathbb{R}$,

$$\text{définie par : } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}.$$

- 1^{re} a) Prouver que, pour tout réel x distinct de -1 ,

$$f_1(x) = 1 - f(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 1 + f(x).$$

- b) Étudier les variations de la fonction f_2 et construire sa courbe représentative (C_2) dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Préciser les asymptotes et montrer que le point Ω de coordonnées $(-1, -2)$ est centre de symétrie pour (C_2) .

c) Calculer l'aire du domaine plan intérieur au contour fermé déterminé par (C_2) , l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = h$ ($h > 0$) (on pourra utiliser un résultat démontré en a).

2° Étant donné un réel x , on considère la somme $S_n(x)$ des n premiers termes de la suite géométrique de raison $(-x)$ et de premier terme 1.

a) Montrer que, pour $x \neq -1$, on a l'égalité : $S_n(x) = f(x) - (-1)^n f_n(x)$.

b) Montrer que, pour $|x| < 1$, $S_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. En est-il de même pour $x = 1$?

3° Soit x un réel positif ou nul. On pose :

$$\sigma_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

a) Montrer, sans calculer l'intégrale, que :

$$\sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt - \text{Log}(1+x) \text{ est une constante.}$$

En déduire que, pour tout x réel positif ou nul,

$$\text{Log}(1+x) = \sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt.$$

b) Montrer que :

$$\text{si } n \text{ est pair, on a } \sigma_n(x) \leq \text{Log}(1+x),$$

$$\text{et si } n \text{ est impair, on a } \sigma_n(x) \geq \text{Log}(1+x).$$

Donner, en fonction de n et de x , un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise

en remplaçant $\text{Log}(1+x)$ par $\sigma_n(x)$. On pourra remarquer que $\frac{1}{1+x} \leq 1$,

si $x \geq 0$.

c) Application numérique : Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près, par défaut,

de $\text{Log} \frac{11}{10}$

Vérifier, en calculant $\text{Log} \frac{11}{10}$ à partir du logarithme décimal $\log \frac{11}{10}$, à l'aide d'une table

de logarithmes.

d) Étant donné un nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$, prouver que $\text{Log}(1+x)$ est la limite de $\sigma_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

En déduire la limite de $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ lorsque n tend

vers l'infini.

(Série E, Aix-en-Provence, juin 1972.)

11 1° Soit f_n la fonction numérique définie par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ (n entier positif ou nul)

a) Étudier la variation de la fonction f_0 .

Tracer la courbe C_0 représentative de f_0 dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (unité : 4 cm).

Démontrer que C_0 admet un centre de symétrie.

b) Comparer $f_1(x)$ et $f_0(-x)$.

Tracer la courbe C_1 représentative de la fonction f_1 dans le repère $\mathcal{R}$ précédent.

2° On considère la suite dont le terme général u_n est donné par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Mettre $f_0(x)$ sous la forme $\frac{z'(x)}{z(x)}$, avec $z'(x) = e^x$.

Calculer u_0 et u_1 . Vérifier que : $u_0 + u_1 = 1$.

b) Démontrer que, pour $n > 1$, $u_n + u_{n-1} = \frac{1 - e^{1-n}}{n-1}$.

En déduire successivement :

- le calcul de u_2 et l'inégalité $u_2 < 1$;
- la limite de la somme $u_n + u_{n-1}$ quand n tend vers l'infini;
- la limite de u_n quand n tend vers l'infini (après avoir précisé le signe de u_n).

3° Soit E l'ensemble des fonctions numériques G définies par :

$G(x) = \alpha + \beta e^{-x} + \gamma e^{-2x}$ où α, β, γ sont des nombres réels.

a) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base $\mathcal{B}$ est formée des trois fonctions h, k, l définies respectivement par : $h(x) = 1$, $k(x) = e^{-x}$, $l(x) = e^{-2x}$.

b) A toute fonction G de E , de coordonnées α, β, γ relativement à la base $\mathcal{B}$, on associe

la fonction numérique G_1 définie par : $G_1(x) = \int_0^1 \frac{G(t+x)}{1+e^{-t}} dt$

Démontrer que la fonction G_1 appartient à E et qu'elle est l'image de G par une application linéaire φ de E dans E .

c) On pose : $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2$, ..., $\varphi^n = \varphi \circ \varphi^{n-1}$.

Trouver en fonction de n et des coordonnées α, β, γ de G (dans la base $\mathcal{B}$) les coordonnées $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ de $\varphi^n(G)$.

Ces coordonnées $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ tendent-elles vers une limite lorsque n tend vers l'infini ?

(Série E, Paris, juin 1973.)

12 I. — 1° Étudier les variations de la fonction numérique g définie par : $g(x) = xe^{2x}$. Tracer la courbe Γ représentative de g dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (unité 5 cm).

2° Soit μ un paramètre réel. Étudier les variations de la fonction g_μ définie par : $g_\mu(x) = (x + \mu)e^{2x}$.

Montrer que, pour $\mu \neq 0$, la courbe Γ_μ représentative de g_μ dans le repère $\mathcal{R}$ se déduit de la courbe Γ par une transformation, composée de deux transformations géométriques simples. (On ne demande pas de tracer Γ_μ).

3° Soient λ et μ deux paramètres réels. On considère l'ensemble E des fonctions numériques $f_{\lambda, \mu}$ définies par : $f_{\lambda, \mu}(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$.

Montrer que, relativement aux opérations usuelles d'addition des fonctions et de multiplication des fonctions par un nombre réel, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient les fonctions g_μ définies précédemment. L'ensemble des fonctions g_μ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Montrer que les fonctions $f_{1,0}(\lambda = 1; \mu = 0)$ et $f_{0,1}(\lambda = 0; \mu = 1)$ constituent une base $\mathcal{B}$ de E . Quelles sont les coordonnées de $f_{\lambda, \mu}$ dans cette base ?

II — On se propose de construire une suite de fonctions dérivables : $G_0, G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ appartenant toutes à l'espace vectoriel E défini en I-3. et telles que : $G_0 = g$ et $G'_n = G_{n-1}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1. (G'_n désigne la fonction dérivée de G_n).

A cet effet, on pose, pour $n \geq 0$: $G_n(x) = (\lambda_n x + \mu_n)e^{2x}$.

1° Pour $n \geq 1$, exprimer λ_n et μ_n en fonction de λ_{n-1} et de μ_{n-1} .

Déduire de ce résultat qu'il existe une application linéaire Φ de l'espace vectoriel E dans lui-même telle que : $G_n = \Phi(G_{n-1})$

Écrire la matrice M de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$ de E définie en I-3.

2° On considère la matrice : $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel donné.

Calculer P^2 et P^3 . Calculer ensuite P^n (on rappelle que $P^n = P \times P^{n-1}$).

Écrire alors l'expression de la matrice M^n .

En déduire les expressions de λ_n et de μ_n à l'aide des coordonnées λ_0 et μ_0 de G_0 .

Compte tenu des valeurs numériques de λ_0 et μ_0 , donner enfin l'expression de $G_n(x)$.

3° Démontrer que : $G_n(x) = \int_{\frac{n}{2}}^x G_{n-1}(t) dt$.

Vérifier cette formule en calculant l'intégrale : $\int_{\frac{n}{2}}^x G_{n-1}(t) dt$

à l'aide d'une intégration par parties.

(Série C, Paris, juin 1973.)

13 Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques f définies pour tout x réel par : $f(x) = a \cos 2x + b \sin 2x + c$ où a, b et c décrivent $\mathbb{R}$.

A. 1° a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.

b) Soient f_1, f_2, f_3 les trois éléments de $\mathcal{F}$ définis par :

$$f_1(x) = \cos 2x; \quad f_2(x) = \sin 2x; \quad f_3(x) = 1.$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ constitue une base de $\mathcal{F}$, notée B.

2° a) Montrer que tout élément f de $\mathcal{F}$ est intégrable sur $[0, \pi]$.

Calculer $\int_0^\pi f_i(x) f_j(x) dx$ pour $i \in \{1; 2; 3\}$ et $j \in \{1; 2; 3\}$.

b) Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}$ de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c') dans la base B.

On considère l'application I de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$I(f, g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) g(x) dx.$$

Exprimer $I(f, g)$ puis $I(f, f)$ en fonction des composantes de f et de g dans la base B

c) Dédurre des résultats précédents que l'application I définit sur $\mathcal{F}$ un produit scalaire (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique positive).

Montrer que B est une base orthogonale de $\mathcal{F}$. Est-elle orthonormée ?

B. 1° Montrer par récurrence que, quel que soit n élément de $\mathbb{N}$, tout élément f de $\mathcal{F}$ possède une dérivée d'ordre n , notée $f^{(n)}$, qui appartient aussi à $\mathcal{F}$; (par convention $f^{(0)} = f$).

Montrer que l'application qui à tout élément f de $\mathcal{F}$ associe $f^{(n)}$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

Est-ce un automorphisme de $\mathcal{F}$?

2° $\mathcal{F}$ muni du produit scalaire I est un espace vectoriel euclidien.

Soit $\mathcal{F}'$ le plan vectoriel engendré par f_1 et f_2 qui en constituent une base orthonormée B'.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\varphi(f) = f^{(2)} = f''.$$

Montrer que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle orthogonale sur $\mathcal{F}'$.

C. Soit φ_n l'endomorphisme de $\mathcal{F}'$ défini par $\varphi_n(f) = \frac{1}{2^n} f^{(n)}$.

On pose $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

1° Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathcal{F}'$ pour $n = 0, 1, 2$ ou 3 .

2° Écrire les matrices respectives de $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans la base B. Reconnaitre ces automorphismes.

3° Montrer que Φ muni de la composition des applications est un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathcal{F}'$ isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de l'addition.

(Série C, Orléans, Tours, juin 1973.)

14 On sait que l'ensemble F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'application constante d'image $\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'application cosinus et l'application sinus sont notées respectivement e_1, e_2, e_3 ; le sous-espace vectoriel de F engendré par e_1, e_2 et e_3 est noté E .

Ainsi, E est l'ensemble des applications f pour lesquelles il existe un triplet (a_1, a_2, a_3) de nombres réels tel que : $f = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

ou encore, quel que soit t , $f(t) = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \cos t + a_3 \sin t$.

1° Une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ est notée et définie par :

$$(f, g) \longmapsto f \perp g = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt.$$

a) Démontrer que, lorsque i et j prennent respectivement toutes les valeurs 1, 2 et 3 on a : $e_i \perp e_j = 0$ pour $i \neq j$
 $e_i \perp e_i = 1$.

b) Si $f = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ et $g = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ sont deux éléments de E ($a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sont donc des nombres réels), exprimer $f \perp g$ uniquement à l'aide des six nombres $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

c) En déduire que l'application $(f, g) \longmapsto f \perp g$ est un produit scalaire sur E et que, pour ce produit scalaire, (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée. Désormais E est rapporté à cette base.

2° a) L'application dérivée de f est notée f' . Démontrer que, si f appartient à E , il en est de même de f' et exprimer les coordonnées de f' à l'aide des coordonnées (a_1, a_2, a_3) de f .

b) x étant un élément de $\mathbb{R}$ et g un élément de F , un nouvel élément de F est noté g_x et défini par : $\forall t, g_x(t) = g(x - t)$.

Démontrer que, si g appartient à E , il en est de même de g_x et exprimer les coordonnées de g_x dans la base (e_1, e_2, e_3) à l'aide de celles de g , (b_1, b_2, b_3) , et à l'aide de x .

3° f et g étant éléments de E , un nouvel élément de F est noté $f \star g$ et défini par : $\forall x, (f \star g)(x) = f \perp g_x$.

a) Démontrer que $f \star g$ appartient à E et exprimer ses coordonnées à l'aide de celles de f et de g .

b) L'application $(f, g) \longmapsto f \star g$ est donc une loi de composition interne de E . Démontrer que cette loi est commutative.

c) Démontrer que, pour cette loi, E possède un élément neutre noté δ dont on calculera les coordonnées.

d) Trouver les éléments f de E qui ont un symétrique $\tilde{f}$ pour la loi $\star$ et exprimer les coordonnées de $\tilde{f}$ à l'aide de celles de f .

e) Démontrer qu'il existe un élément d de E tel que, pour tout f de E , $d \star f = f'$ et calculer ses coordonnées.

4° ω étant un nombre réel non nul, f étant un élément de E , on se propose de rechercher les fonctions y de E vérifiant $y'' - \omega^2 y = f$ où y'' désigne la dérivée seconde de y . En utilisant les résultats de la question précédente, démontrer que cette équation est équivalente à une équation du type $h \star y = f$; expliciter les coordonnées de h . Montrer, sans calculer les coordonnées de y , que l'équation proposée admet une solution et une seule.

(Série C, Toulouse, juin 1973.)

Tables numériques
Index

Table n° 1 : Nombres premiers de 2 à 10 000.

2	241	571	919	1289	1663	2081	2467	2879	3329	3733	4159
3	251	577	929	1291	1667	2083	2473	2887	3331	3739	4177
5	257	587	937	1297	1669	2087	2477	2897	3343	3761	4201
7	263	593	941	1301	1693	2089	2503	2903	3347	3767	4211
11	269	599	947	1303	1697	2099	2521	2909	3359	3769	4217
13	271	601	953	1307	1699	2111	2531	2917	3361	3779	4219
17	277	607	967	1319	1709	2113	2539	2927	3371	3793	4229
19	281	613	971	1321	1721	2129	2543	2939	3373	3797	4231
23	283	617	977	1327	1723	2131	2549	2953	3389	3803	4241
29	293	619	983	1361	1733	2137	2551	2957	3391	3821	4243
31	307	631	991	1367	1741	2141	2557	2963	3407	3823	4253
37	311	641	997	1373	1747	2143	2579	2969	3413	3833	4259
41	313	643	1009	1381	1753	2153	2591	2971	3433	3847	4261
43	317	647	1013	1399	1759	2161	2593	2999	3449	3851	4271
47	331	653	1019	1409	1777	2179	2609	3001	3457	3853	4273
53	337	659	1021	1423	1783	2203	2617	3011	3461	3863	4283
59	347	661	1031	1427	1787	2207	2621	3019	3463	3877	4289
61	349	673	1033	1429	1789	2213	2633	3023	3467	3881	4297
67	353	677	1039	1433	1801	2221	2647	3037	3469	3889	4327
71	359	683	1049	1439	1811	2237	2657	3041	3491	3907	4337
73	367	691	1051	1447	1823	2239	2659	3049	3499	3911	4339
79	373	701	1061	1451	1831	2243	2663	3061	3511	3917	4349
83	379	709	1063	1453	1847	2251	2671	3067	3517	3919	4357
89	383	719	1069	1459	1861	2267	2677	3079	3527	3923	4363
97	389	727	1087	1471	1867	2269	2683	3083	3529	3929	4373
101	397	733	1091	1481	1871	2273	2687	3089	3533	3931	4391
103	401	739	1093	1483	1873	2281	2689	3109	3539	3943	4397
107	409	743	1097	1487	1877	2287	2693	3119	3541	3947	4409
109	419	751	1103	1489	1879	2293	2699	3121	3547	3967	4421
113	421	757	1109	1493	1889	2297	2707	3137	3557	3989	4423
127	431	761	1117	1499	1901	2309	2711	3163	3559	4001	4441
131	433	769	1123	1511	1907	2311	2713	3167	3571	4003	4447
137	439	773	1129	1523	1913	2333	2719	3169	3581	4007	4451
139	443	787	1151	1531	1931	2339	2729	3181	3583	4013	4457
149	449	797	1153	1543	1933	2341	2731	3187	3593	4019	4463
151	457	809	1163	1549	1949	2347	2741	3191	3607	4021	4481
157	461	811	1171	1553	1951	2351	2749	3203	3613	4027	4483
163	463	821	1181	1559	1973	2357	2753	3209	3617	4049	4493
167	467	823	1187	1567	1979	2371	2767	3217	3623	4051	4507
173	479	827	1193	1571	1987	2377	2777	3221	3631	4057	4513
179	487	829	1201	1579	1993	2381	2789	3229	3637	4073	4517
181	491	839	1213	1583	1997	2383	2791	3251	3643	4079	4519
191	499	853	1217	1597	1999	2389	2797	3253	3659	4091	4523
193	503	857	1223	1601	2003	2393	2801	3257	3671	4093	4547
197	509	859	1229	1607	2011	2399	2803	3259	3673	4099	4549
199	521	863	1231	1609	2017	2411	2819	3271	3677	4111	4561
211	523	877	1237	1613	2027	2417	2833	3299	3691	4127	4567
223	541	881	1249	1619	2029	2423	2837	3301	3697	4129	4583
227	547	883	1259	1621	2039	2437	2843	3307	3701	4133	4591
229	557	887	1277	1627	2053	2441	2851	3313	3709	4139	4597
233	563	907	1279	1637	2063	2447	2857	3319	3719	4153	4603
239	569	911	1283	1657	2069	2459	2861	3323	3727	4157	4621

Table n° 1 (suite) : Nombres premiers de 2 à 10 000.

4637	5059	5519	5953	6389	6871	7351	7823	8293	8761	9239	9697
4639	5077	5521	5981	6397	6883	7369	7829	8297	8779	9241	9719
4643	5081	5527	5987	6421	6899	7393	7841	8311	8783	9257	9721
4649	5087	5531	6007	6427	6907	7411	7853	8317	8803	9277	9733
4651	5099	5557	6011	6449	6911	7417	7867	8329	8807	9281	9739
4657	5101	5563	6029	6451	6917	7433	7873	8353	8819	9283	9743
4663	5107	5569	6037	6469	6947	7451	7877	8363	8821	9293	9749
4673	5113	5573	6043	6473	6949	7457	7879	8369	8831	9311	9767
4679	5119	5581	6047	6481	6959	7459	7883	8377	8837	9319	9769
4691	5147	5591	6053	6491	6961	7477	7901	8387	8839	9323	9781
4703	5153	5623	6067	6521	6967	7481	7907	8389	8849	9337	9787
4721	5167	5639	6073	6529	6971	7487	7919	8419	8861	9341	9791
4723	5171	5641	6079	6547	6977	7489	7927	8423	8863	9343	9803
4729	5179	5647	6089	6551	6983	7499	7933	8429	8867	9349	9811
4733	5189	5651	6091	6553	6991	7507	7937	8431	8887	9371	9817
4751	5197	5653	6101	6563	6997	7517	7949	8443	8893	9377	9829
4759	5209	5657	6113	6569	7001	7523	7951	8447	8923	9391	9833
4783	5227	5659	6121	6571	7013	7529	7963	8461	8929	9397	9839
4787	5231	5669	6131	6577	7019	7537	7993	8467	8933	9403	9851
4789	5233	5683	6133	6581	7027	7541	8009	8501	8941	9413	9857
4793	5237	5689	6143	6599	7039	7547	8011	8513	8951	9419	9859
4799	5261	5693	6151	6607	7043	7549	8017	8521	8963	9421	9871
4801	5273	5701	6163	6619	7057	7559	8039	8527	8969	9431	9883
4813	5279	5711	6173	6637	7069	7561	8053	8537	8971	9433	9887
4817	5281	5717	6197	6653	7079	7573	8059	8539	8999	9437	9901
4831	5297	5737	6199	6659	7103	7577	8069	8543	9001	9439	9907
4861	5303	5741	6203	6661	7109	7583	8081	8563	9007	9461	9923
4871	5309	5743	6211	6673	7121	7589	8087	8573	9011	9463	9929
4877	5323	5749	6217	6679	7127	7591	8089	8581	9013	9467	9931
4889	5333	5779	6221	6689	7129	7603	8093	8597	9029	9473	9941
4903	5347	5783	6229	6691	7151	7607	8101	8599	9041	9479	9949
4909	5351	5791	6247	6701	7159	7621	8111	8609	9043	9491	9967
4919	5381	5801	6257	6703	7177	7639	8117	8623	9049	9497	9973
4931	5387	5807	6263	6709	7187	7643	8123	8627	9059	9511	
4933	5393	5813	6269	6719	7193	7649	8147	8629	9067	9521	
4937	5399	5821	6271	6733	7207	7669	8161	8641	9091	9533	
4943	5407	5827	6277	6737	7211	7673	8167	8647	9103	9539	
4951	5413	5839	6287	6761	7213	7681	8171	8663	9109	9547	
4957	5417	5843	6299	6763	7219	7687	8179	8669	9127	9551	
4967	5419	5849	6301	6779	7229	7691	8191	8677	9133	9587	
4969	5431	5851	6311	6781	7237	7699	8209	8681	9137	9601	
4973	5437	5857	6317	6791	7243	7703	8219	8689	9151	9613	
4987	5441	5861	6323	6793	7247	7717	8221	8693	9157	9619	
4993	5443	5867	6329	6803	7253	7723	8231	8699	9161	9623	
4999	5449	5869	6337	6823	7283	7727	8233	8707	9173	9629	
5003	5471	5879	6343	6827	7297	7741	8237	8713	9181	9631	
5009	5477	5881	6353	6829	7307	7753	8243	8719	9187	9643	
5011	5479	5897	6359	6833	7309	7757	8263	8731	9199	9649	
5021	5483	5903	6361	6841	7321	7759	8269	8737	9203	9661	
5023	5501	5923	6367	6857	7331	7789	8273	8741	9209	9677	
5039	5503	5927	6373	6863	7333	7793	8287	8747	9221	9679	
5051	5507	5939	6379	6869	7349	7817	8291	8753	9227	9689	

Table n° 2 : Entiers N dont le plus petit diviseur D est supérieur ou égal à 13.

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D
1 69	13	12 19	23	19 57	19	26 69	17	33 41	13	40 31	29
2 21	13	12 41	17	19 61	37	27 01	37	33 49	17	40 33	37
2 47	13	12 47	29	19 63	13	27 43	13	33 79	31	40 43	13
2 89	17	12 61	13	20 21	43	27 47	41	33 83	17	40 61	31
2 99	13	12 71	31	20 33	19	27 59	31	33 97	43	40 63	17
3 23	17	12 73	19	20 41	13	27 71	17	34 01	19	40 69	13
3 61	19	13 13	13	20 47	23	27 73	47	34 03	41	40 87	61
3 77	13	13 33	31	20 59	29	28 09	53	34 19	13	40 97	17
3 91	17	13 39	13	20 71	19	28 13	29	34 27	23	41 17	23
4 03	13	13 43	17	20 77	31	28 31	19	34 31	47	41 21	13
4 37	19	13 49	19	21 17	29	28 39	17	34 39	19	41 41	41
4 81	13	13 57	23	21 19	13	28 67	47	34 73	23	41 63	23
4 93	17	13 63	29	21 47	19	28 69	19	34 81	59	41 71	43
5 27	17	13 69	37	21 59	17	28 73	13	34 97	13	41 81	37
5 29	23	13 87	19	21 71	13	28 81	43	35 03	31	41 83	47
5 33	13	13 91	13	21 73	41	28 99	13	35 23	13	41 87	53
5 51	19	14 03	23	21 83	37	29 11	41	35 51	53	41 89	59
5 59	13	14 11	17	21 97	13	29 21	23	35 69	43	41 99	13
5 89	19	14 17	13	22 01	31	29 23	37	35 87	17	42 23	41
6 11	13	14 57	31	22 09	47	29 29	29	35 89	37	42 37	19
6 29	17	14 69	13	22 27	17	29 41	17	35 99	59	42 47	31
6 67	23	15 01	19	22 31	23	29 51	13	36 01	13	42 67	17
6 89	13	15 13	17	22 49	13	29 77	13	36 11	23	43 03	13
6 97	17	15 17	37	22 57	37	29 83	19	36 29	19	43 07	59
7 03	19	15 37	29	22 63	31	29 87	29	36 49	41	43 09	31
7 13	23	15 41	23	22 79	43	29 93	41	36 53	13	43 13	19
7 31	17	15 77	19	22 91	29	30 07	31	36 67	19	43 21	29
7 67	13	15 91	37	23 23	23	30 13	23	36 79	13	43 31	61
7 79	19	16 33	23	23 27	13	30 29	13	36 83	29	43 43	43
7 93	13	16 43	31	23 29	17	30 43	17	37 13	47	43 51	19
7 99	17	16 49	17	23 53	13	30 53	43	37 21	61	43 69	17
8 17	19	16 51	13	23 63	17	30 71	37	37 37	37	43 79	29
8 41	29	16 79	23	23 69	23	30 77	17	37 43	19	43 81	13
8 51	23	16 81	41	24 07	29	30 97	19	37 49	23	43 87	41
8 71	13	16 91	19	24 13	19	31 03	29	37 57	13	43 93	23
8 93	19	17 03	13	24 19	41	31 07	13	37 63	53	43 99	53
8 99	29	17 11	29	24 49	31	31 27	53	37 81	19	44 27	19
9 01	17	17 17	17	24 61	23	31 31	31	37 91	17	44 29	43
9 23	13	17 39	37	24 79	37	31 33	13	37 99	29	44 39	23
9 43	23	17 51	17	24 83	13	31 39	43	38 09	13	44 53	61
9 49	13	17 63	41	24 89	19	31 49	47	38 11	37	44 69	41
9 61	31	17 69	29	24 91	47	31 51	23	38 27	43	44 71	17
9 89	23	17 81	13	25 01	41	31 61	29	38 41	23	44 89	67
10 03	17	18 07	13	25 07	23	31 73	19	38 59	17	45 11	13
10 07	19	18 17	23	25 09	13	31 93	31	38 69	53	45 31	23
10 27	13	18 19	17	25 33	17	31 97	23	38 87	13	45 37	13
10 37	17	18 29	31	25 37	43	32 11	13	38 93	17	45 41	19
10 73	29	18 43	19	25 61	13	32 33	53	39 01	47	45 53	29
10 79	13	18 49	43	25 67	17	32 39	41	39 37	31	45 59	47
10 81	23	18 53	17	25 73	31	32 47	17	39 53	59	45 73	17
11 21	19	18 91	31	25 81	29	32 63	13	39 59	37	45 77	23
11 39	17	19 09	23	25 87	13	32 77	29	39 61	17	45 79	19
11 47	31	19 19	19	25 99	23	32 81	17	39 73	29	45 89	13
11 57	13	19 21	17	26 03	19	32 87	19	38 77	41	46 01	43
11 59	19	19 27	41	26 23	43	32 93	37	39 79	23	46 07	17
11 89	29	19 37	13	26 27	37	33 17	31	39 91	13	46 19	31
12 07	17	19 43	29	26 41	19	33 37	47	40 09	19	46 33	41

Table n° 2 : Entiers N dont le plus petit diviseur D est supérieur ou égal à 13.

N	D	N	D	N	D	N	D	N	D	N	D
46 61	59	52 63	19	59 17	61	64 99	67	70 99	31	77 09	13
46 67	13	52 67	23	59 21	31	65 09	23	71 11	13	77 29	59
46 81	31	52 87	17	59 33	17	65 11	17	71 23	17	77 39	71
46 87	43	52 93	67	59 41	13	65 27	61	71 41	37	77 47	61
46 93	13	53 11	47	59 47	19	65 33	47	71 53	23	77 51	23
46 99	37	53 17	13	59 59	59	65 39	13	71 57	17	77 69	17
47 09	17	53 21	17	59 63	67	65 41	31	71 63	13	77 71	19
47 17	53	53 29	73	59 69	47	65 57	79	71 69	67	77 81	31
47 27	29	53 39	19	59 77	43	65 83	29	71 71	71	77 83	43
47 47	47	53 53	53	59 83	31	65 93	19	71 81	43	77 87	13
47 57	67	53 59	23	59 89	53	66 13	17	71 99	23	78 01	29
47 69	19	53 63	31	59 93	13	66 17	13	72 01	19	78 07	37
47 71	13	53 71	41	60 01	17	66 23	37	72 23	31	78 11	73
47 77	17	53 77	19	60 19	13	66 31	19	72 41	13	78 13	13
48 11	17	53 89	17	60 23	19	66 41	29	72 61	53	78 31	41
48 19	61	54 29	61	60 31	37	66 47	17	72 67	13	78 37	17
48 41	47	54 47	13	60 49	23	66 49	61	72 77	19	78 49	47
48 43	29	54 59	53	60 59	73	66 67	59	72 79	29	78 59	29
48 47	37	54 61	43	60 71	13	66 83	41	72 89	37	78 71	17
48 49	13	54 73	13	60 77	59	66 97	37	72 91	23	78 91	13
48 53	23	54 91	17	61 03	17	67 07	19	73 03	67	78 97	53
48 59	43	54 97	23	61 07	31	67 31	53	73 13	71	79 13	41
48 67	31	55 13	37	61 09	41	67 39	23	73 19	13	79 21	89
48 83	19	55 39	29	61 19	29	67 49	17	73 27	17	79 39	17
48 91	67	55 43	23	61 37	17	67 51	43	73 39	41	79 43	13
48 97	59	55 49	31	61 57	47	67 57	29	73 61	17	79 57	73
49 01	13	55 61	67	61 61	61	67 67	67	73 63	37	79 61	19
49 13	17	55 67	19	61 69	31	67 73	13	73 67	53	79 67	31
49 27	13	55 87	37	61 79	37	67 99	13	73 73	73	79 69	13
49 79	13	55 97	29	61 87	23	68 17	17	73 79	47	79 79	79
49 81	17	56 03	13	61 91	41	68 21	19	73 87	83	79 81	23
49 97	19	56 09	71	62 27	13	68 47	41	73 91	19	79 91	61
50 17	29	56 11	31	62 33	23	68 51	13	73 97	13	79 99	19
50 29	47	56 17	41	62 39	17	68 59	19	74 09	31		
50 41	71	56 27	17	62 41	79	68 77	13	74 21	41		
50 53	31	56 29	13	62 53	13	68 87	71	74 23	13		
50 57	13	56 33	43	61 83	61	68 89	83	74 29	17		
50 63	61	56 39	53	62 89	19	68 93	61	74 39	43		
50 69	37	56 71	13	63 13	59	69 01	67	74 53	29		
50 83	13	56 81	41	63 19	71	69 13	31	74 63	17		
51 11	19	56 99	13	63 31	13	69 29	13	74 71	31		
51 23	47	57 07	29	63 41	17	69 31	29	74 93	59		
51 29	23	57 13	59	63 71	23	69 43	17	75 01	13		
51 41	53	57 23	17	63 83	13	69 53	19	75 19	73		
51 43	37	57 29	13	64 01	37	69 73	29	75 31	17		
51 49	19	57 59	73	64 03	19	69 89	47	75 43	19		
51 61	13	57 67	29	64 07	43	70 03	43	75 71	67		
51 77	31	57 71	23	64 09	13	70 09	79	75 97	71		
51 83	71	57 77	53	64 31	59	70 31	13	76 13	23		
51 91	29	58 09	37	64 37	41	70 33	31	76 19	19		
52 07	41	58 33	13	64 39	47	70 37	23	76 27	29		
52 13	13	58 37	43	64 43	17	70 61	37	76 31	13		
52 19	17	58 91	71	64 63	23	70 67	73	76 33	17		
52 21	23	58 93	17	64 67	13	70 81	19	76 57	13		
52 39	13	58 99	19	64 87	43	70 87	41	76 61	47		
52 49	29	59 09	23	64 93	73	70 93	47	76 63	43		
52 51	59	59 11		64 97		70 97		76 97			

Table n° 3: Carrés, cubes, inverses et racines carrées ($1 \leq n \leq 100$)

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$
1	1	1	1	1	51	2 601	132 651	0,0196	7,141
2	4	8	0,5000	1,414	52	2 704	140 608	0,0192	7,211
3	9	27	0,3333	1,732	53	2 809	148 877	0,0189	7,280
4	16	64	0,2500	2,000	54	2 916	157 464	0,0185	7,348
5	25	125	0,2000	2,236	55	3 025	166 375	0,0182	7,416
6	36	216	0,1667	2,449	56	3 136	175 616	0,0179	7,483
7	49	343	0,1429	2,646	57	3 249	185 193	0,0175	7,550
8	64	512	0,1250	2,828	58	3 364	195 112	0,0172	7,616
9	81	729	0,1111	3,000	59	3 481	205 379	0,0169	7,681
10	100	1 000	0,1000	3,162	60	3 600	216 000	0,0167	7,746
11	121	1 331	0,0909	3,317	61	3 721	226 981	0,0164	7,810
12	144	1 728	0,0833	3,464	62	3 844	238 328	0,0161	7,874
13	169	2 197	0,0769	3,606	63	3 969	250 047	0,0159	7,937
14	196	2 744	0,0714	3,742	64	4 096	262 144	0,0156	8,000
15	225	3 375	0,0667	3,873	65	4 225	274 625	0,0154	8,062
16	256	4 096	0,0625	4,000	66	4 356	287 496	0,0152	8,124
17	289	4 913	0,0588	4,123	67	4 489	300 763	0,0149	8,185
18	324	5 832	0,0556	4,243	68	4 624	314 432	0,0147	8,246
19	361	6 859	0,0526	4,359	69	4 761	328 509	0,0145	8,307
20	400	8 000	0,0500	4,472	70	4 900	343 000	0,0143	8,367
21	441	9 261	0,0476	4,583	71	5 041	357 911	0,0141	8,426
22	484	10 648	0,0455	4,690	72	5 184	373 248	0,0139	8,485
23	529	12 167	0,0435	4,796	73	5 329	389 017	0,0137	8,544
24	576	13 824	0,0417	4,899	74	5 476	405 224	0,0135	8,602
25	625	15 625	0,0400	5,000	75	5 625	421 875	0,0133	8,660
26	676	17 576	0,0385	5,099	76	5 776	438 976	0,0132	8,718
27	729	19 683	0,0370	5,196	77	5 929	456 533	0,0130	8,775
28	784	21 952	0,0357	5,292	78	6 084	474 552	0,0128	8,832
29	841	24 389	0,0345	5,385	79	6 241	493 039	0,0127	8,888
30	900	27 000	0,0333	5,477	80	6 400	512 000	0,0125	8,944
31	961	29 791	0,0323	5,568	81	6 561	531 441	0,0123	9,000
32	1 024	32 768	0,0313	5,657	82	6 724	551 368	0,0122	9,055
33	1 089	35 937	0,0303	5,745	83	6 889	571 787	0,0120	9,110
34	1 156	39 304	0,0294	5,831	84	7 056	592 704	0,0119	9,165
35	1 225	42 875	0,0286	5,916	85	7 225	614 125	0,0118	9,220
36	1 296	46 656	0,0278	6,000	86	7 396	636 056	0,0116	9,274
37	1 369	50 653	0,0270	6,083	87	7 569	658 503	0,0115	9,327
38	1 444	54 872	0,0263	6,164	88	7 744	681 472	0,0114	9,381
39	1 521	59 319	0,0256	6,245	89	7 921	704 969	0,0112	9,434
40	1 600	64 000	0,0250	6,325	90	8 100	729 000	0,0111	9,487
41	1 681	68 921	0,0244	6,403	91	8 281	753 571	0,0110	9,539
42	1 764	74 088	0,0238	6,481	92	8 464	778 688	0,0109	9,592
43	1 849	79 507	0,0233	6,557	93	8 649	804 357	0,0108	9,644
44	1 936	85 184	0,0227	6,633	94	8 836	830 584	0,0106	9,695
45	2 025	91 125	0,0222	6,708	95	9 025	857 375	0,0105	9,747
46	2 116	97 336	0,0217	6,782	96	9 216	884 736	0,0104	9,798
47	2 209	103 823	0,0213	6,856	97	9 409	912 673	0,0103	9,849
48	2 304	110 592	0,0208	6,928	98	9 604	941 192	0,0102	9,899
49	2 401	117 649	0,0204	7,000	99	9 801	970 299	0,0101	9,950
50	2 500	125 000	0,0200	7,071	100	10 000	1 000 000	0,0100	10,000

Table n° 3 : Carrés, cubes, inverses et racines carrées ($101 \leq n \leq 200$)

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$
101	10 201	1 030 301	0,0099	10,0499	151	22 801	3 442 951	0,0066	12,2882
102	10 404	1 061 208	0,0098	10,0995	152	23 104	3 511 808	0,0066	12,3288
103	10 609	1 092 727	0,0097	10,1489	153	23 409	3 581 577	0,0065	12,3693
104	10 816	1 124 864	0,0096	10,1980	154	23 716	3 652 264	0,0065	12,4097
105	11 025	1 157 625	0,0095	10,2470	155	24 025	3 723 875	0,0065	12,4499
106	11 236	1 191 016	0,0094	10,2956	156	24 336	3 796 416	0,0064	12,4900
107	11 449	1 225 043	0,0093	10,3441	157	24 649	3 869 893	0,0064	12,5300
108	11 664	1 259 712	0,0093	10,3923	158	24 964	3 944 312	0,0063	12,5698
109	11 881	1 295 029	0,0092	10,4403	159	25 281	4 019 679	0,0063	12,6095
110	12 100	1 331 000	0,0091	10,4881	160	25 600	4 096 000	0,0063	12,6491
111	12 321	1 367 631	0,0090	10,5357	161	25 921	4 173 281	0,0062	12,6886
112	12 544	1 404 928	0,0089	10,5830	162	26 244	4 251 528	0,0062	12,7279
113	12 769	1 442 897	0,0089	10,6301	163	26 569	4 330 747	0,0061	12,7671
114	12 996	1 481 544	0,0088	10,6771	164	26 896	4 410 944	0,0061	12,8062
115	13 225	1 520 875	0,0087	10,7238	165	27 225	4 492 125	0,0061	12,8452
116	13 456	1 560 896	0,0086	10,7703	166	27 556	4 574 296	0,0060	12,8841
117	13 689	1 601 613	0,0085	10,8167	167	27 889	4 657 463	0,0060	12,9228
118	13 924	1 643 032	0,0085	10,8628	168	28 224	4 741 632	0,0060	12,9615
119	14 161	1 685 159	0,0084	10,9087	169	28 561	4 826 809	0,0059	13,0000
120	14 400	1 728 000	0,0083	10,9545	170	28 900	4 913 000	0,0059	13,0384
121	14 641	1 771 561	0,0083	11,0000	171	29 241	5 000 211	0,0058	13,0767
122	14 884	1 815 848	0,0082	11,0454	172	29 584	5 088 448	0,0058	13,1149
123	15 129	1 860 867	0,0081	11,0905	173	29 929	5 177 717	0,0058	13,1529
124	15 376	1 906 624	0,0081	11,1355	174	30 276	5 268 024	0,0057	13,1909
125	15 625	1 953 125	0,0080	11,1803	175	30 625	5 359 375	0,0057	13,2288
126	15 876	2 000 376	0,0079	11,2250	176	30 976	5 451 776	0,0057	13,2665
127	16 129	2 048 383	0,0079	11,2694	177	31 329	5 545 233	0,0057	13,3041
128	16 384	2 097 152	0,0078	11,3137	178	31 684	5 639 752	0,0056	13,3417
129	16 641	2 146 689	0,0078	11,3578	179	32 041	5 735 339	0,0056	13,3791
130	16 900	2 197 000	0,0077	11,4018	180	32 400	5 832 000	0,0056	13,4164
131	17 161	2 248 091	0,0076	11,4455	181	32 761	5 929 741	0,0055	13,4536
132	17 424	2 299 968	0,0076	11,4891	182	33 124	6 028 568	0,0055	13,4907
133	17 689	2 352 637	0,0075	11,5326	183	33 489	6 128 487	0,0055	13,5277
134	17 956	2 406 104	0,0075	11,5758	184	33 856	6 229 504	0,0054	13,5647
135	18 225	2 460 375	0,0074	11,6190	185	34 225	6 331 625	0,0054	13,6015
136	18 496	2 515 456	0,0074	11,6619	186	34 596	6 434 856	0,0054	13,6382
137	18 769	2 571 353	0,0073	11,7047	187	34 969	6 539 203	0,0053	13,6748
138	19 044	2 628 072	0,0072	11,7473	188	35 344	6 644 672	0,0053	13,7113
139	19 321	2 685 619	0,0072	11,7898	189	35 721	6 751 269	0,0053	13,7477
140	19 600	2 744 000	0,0071	11,8322	190	36 100	6 859 000	0,0053	13,7840
141	19 881	2 803 221	0,0071	11,8743	191	36 481	6 967 871	0,0052	13,8203
142	20 164	2 863 288	0,0070	11,9164	192	36 864	7 077 888	0,0052	13,8564
143	20 449	2 924 207	0,0070	11,9583	193	37 249	7 189 057	0,0052	13,8924
144	20 736	2 985 984	0,0069	12,0000	194	37 636	7 301 384	0,0052	13,9284
145	21 025	3 048 625	0,0069	12,0416	195	38 025	7 414 875	0,0051	13,9642
146	21 316	3 112 136	0,0068	12,0830	196	38 416	7 529 536	0,0051	14,0000
147	21 609	3 176 523	0,0068	12,1244	197	38 809	7 645 373	0,0051	14,0357
148	21 904	3 241 792	0,0068	12,1655	198	39 204	7 762 392	0,0051	14,0712
149	22 201	3 307 949	0,0067	12,2066	199	39 601	7 880 599	0,0050	14,1067
150	22 500	3 375 000	0,0067	12,2474	200	40 000	8 000 000	0,0050	14,1421

Table n° 4: Fonction logarithme népérien ($1 \leq x \leq 499$)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	0,693 1	1,098 6	1,386 3	1,609 4	1,791 8	1,945 9	2,079 4	2,197 2
1	2,302 6	2,397 9	2,484 9	2,564 9	2,639 1	2,708 1	2,772 6	2,833 2	2,890 4	2,944 4
2	2,995 7	3,044 5	3,091 0	3,135 5	3,178 1	3,218 9	3,258 1	3,295 8	3,332 2	3,367 3
3	3,401 2	3,434 0	3,465 7	3,496 5	3,526 4	3,555 3	3,583 5	3,610 9	3,637 6	3,663 6
4	3,688 9	3,713 6	3,737 7	3,761 2	3,784 2	3,806 7	3,828 6	3,850 1	3,871 2	3,891 8
5	3,912 0	3,931 8	3,951 2	3,970 3	3,989 0	4,007 3	4,025 4	4,043 1	4,060 4	4,077 5
6	4,094 3	4,110 9	4,127 1	4,143 1	4,158 9	4,174 4	4,189 7	4,204 7	4,219 5	4,234 1
7	4,248 5	4,262 7	4,276 7	4,290 5	4,304 1	4,317 5	4,330 7	4,343 8	4,356 7	4,369 4
8	4,382 0	4,394 4	4,406 7	4,418 8	4,430 8	4,442 7	4,454 3	4,465 9	4,477 3	4,488 6
9	4,499 8	4,510 9	4,521 8	4,532 6	4,543 3	4,553 9	4,564 3	4,574 7	4,585 0	4,595 1
10	4,605 2	4,615 1	4,625 0	4,634 7	4,644 4	4,654 0	4,663 4	4,672 8	4,682 1	4,691 3
11	4,700 5	4,709 5	4,718 5	4,727 4	4,736 2	4,744 9	4,753 6	4,762 2	4,770 7	4,779 1
12	4,787 5	4,795 8	4,804 0	4,812 2	4,820 3	4,828 3	4,836 3	4,844 2	4,852 0	4,859 8
13	4,867 5	4,875 2	4,882 8	4,890 3	4,897 8	4,905 3	4,912 7	4,920 0	4,927 3	4,934 5
14	4,941 6	4,948 8	4,955 8	4,962 8	4,969 8	4,976 7	4,983 6	4,990 4	4,997 2	5,003 9
15	5,010 6	5,017 3	5,023 9	5,030 4	5,037 0	5,043 4	5,049 9	5,056 2	5,062 6	5,068 9
16	5,075 2	5,081 4	5,087 6	5,093 8	5,099 9	5,105 9	5,112 0	5,118 0	5,124 0	5,129 9
17	5,135 8	5,141 7	5,147 5	5,153 3	5,159 1	5,164 8	5,170 5	5,176 1	5,181 8	5,187 4
18	5,193 0	5,198 5	5,204 0	5,209 5	5,214 9	5,220 4	5,225 7	5,231 1	5,236 4	5,241 7
19	5,247 0	5,252 3	5,257 5	5,262 7	5,267 9	5,273 0	5,278 1	5,283 2	5,288 3	5,293 3
20	5,298 3	5,303 3	5,308 3	5,313 2	5,318 1	5,323 0	5,327 9	5,332 7	5,337 5	5,342 3
21	5,347 1	5,351 9	5,356 6	5,361 3	5,366 0	5,370 6	5,375 3	5,379 9	5,384 5	5,389 1
22	5,393 6	5,398 2	5,402 7	5,407 2	5,411 6	5,416 1	5,420 5	5,425 0	5,429 3	5,433 7
23	5,438 1	5,442 4	5,446 7	5,451 0	5,455 3	5,459 6	5,463 8	5,468 1	5,472 3	5,476 5
24	5,480 6	5,484 8	5,488 9	5,493 1	5,497 2	5,501 3	5,505 3	5,509 4	5,513 4	5,517 5
25	5,521 5	5,525 5	5,529 4	5,533 4	5,537 3	5,541 3	5,545 2	5,549 1	5,553 0	5,556 8
26	5,560 7	5,564 5	5,568 3	5,572 2	5,575 9	5,579 7	5,583 5	5,587 2	5,591 0	5,594 7
27	5,598 4	5,602 1	5,605 8	5,609 5	5,613 1	5,616 8	5,620 4	5,624 0	5,627 6	5,631 2
28	5,634 8	5,638 4	5,641 9	5,645 4	5,649 0	5,652 5	5,656 0	5,659 5	5,663 0	5,666 4
29	5,669 9	5,673 3	5,676 8	5,680 2	5,683 6	5,687 0	5,690 4	5,693 7	5,697 1	5,700 4
30	5,703 8	5,707 1	5,710 4	5,713 7	5,717 0	5,720 3	5,723 6	5,726 8	5,730 1	5,733 3
31	5,736 6	5,739 8	5,743 0	5,746 2	5,749 4	5,752 6	5,755 7	5,758 9	5,762 1	5,765 2
32	5,768 3	5,771 4	5,774 6	5,777 7	5,780 7	5,783 8	5,786 9	5,790 0	5,793 0	5,796 1
33	5,799 1	5,802 1	5,805 1	5,808 1	5,811 1	5,814 1	5,817 1	5,820 1	5,823 0	5,826 0
34	5,828 9	5,831 9	5,834 8	5,837 7	5,840 6	5,843 5	5,846 4	5,849 3	5,852 2	5,855 1
35	5,857 9	5,860 8	5,863 6	5,866 5	5,869 3	5,872 1	5,874 9	5,877 7	5,880 5	5,883 3
36	5,886 1	5,888 9	5,891 6	5,894 4	5,897 2	5,899 9	5,902 6	5,905 4	5,908 1	5,910 8
37	5,913 5	5,916 2	5,918 9	5,921 6	5,924 3	5,926 9	5,929 6	5,932 2	5,934 9	5,937 5
38	5,940 2	5,942 8	5,945 4	5,948 0	5,950 6	5,953 2	5,955 8	5,958 4	5,961 0	5,963 6
39	5,966 1	5,968 7	5,971 3	5,973 8	5,976 4	5,978 9	5,981 4	5,983 9	5,986 5	5,989 0
40	5,991 5	5,994 0	5,996 5	5,998 9	6,001 4	6,003 9	6,006 4	6,008 8	6,011 3	6,013 7
41	6,016 2	6,018 6	6,021 0	6,023 4	6,025 9	6,028 3	6,030 7	6,033 1	6,035 5	6,037 9
42	6,040 3	6,042 6	6,045 0	6,047 4	6,049 7	6,052 1	6,054 4	6,056 8	6,059 1	6,061 5
43	6,063 8	6,066 1	6,068 4	6,070 7	6,073 0	6,075 3	6,077 6	6,079 9	6,082 2	6,084 5
44	6,086 8	6,089 0	6,091 3	6,093 6	6,095 8	6,098 1	6,100 3	6,102 6	6,104 8	6,107 0
45	6,109 2	6,111 5	6,113 7	6,115 9	6,118 1	6,120 3	6,122 5	6,124 7	6,126 9	6,129 1
46	6,131 2	6,133 4	6,135 6	6,137 7	6,139 9	6,142 0	6,144 2	6,146 3	6,148 5	6,150 6
47	6,152 7	6,154 9	6,157 0	6,159 1	6,161 2	6,163 3	6,165 4	6,167 5	6,169 6	6,171 7
48	6,173 8	6,175 9	6,177 9	6,180 0	6,182 1	6,184 1	6,186 2	6,188 3	6,190 3	6,192 4
49	6,194 4	6,196 4	6,198 5	6,200 5	6,202 5	6,204 6	6,206 6	6,208 6	6,210 6	6,212 6

Table n° 4 (suite) : Fonction logarithme népérien ($500 \leq x \leq 999$)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,214 6	6,216 6	6,218 6	6,220 6	6,222 6	6,224 6	6,226 5	6,228 5	6,230 5	6,232 4
51	6,234 4	6,236 4	6,238 3	6,240 3	6,242 2	6,244 2	6,246 1	6,248 0	6,250 0	6,251 9
52	6,253 8	6,255 8	6,257 7	6,259 6	6,261 5	6,263 4	6,265 3	6,267 2	6,269 1	6,271 0
53	6,272 9	6,274 8	6,276 6	6,278 5	6,280 4	6,282 3	6,284 1	6,286 0	6,287 9	6,289 7
54	6,291 6	6,293 4	6,295 3	6,297 1	6,298 9	6,300 8	6,302 6	6,304 4	6,306 3	6,308 1
55	6,309 9	6,311 7	6,313 5	6,315 4	6,317 2	6,319 0	6,320 8	6,322 6	6,324 4	6,326 1
56	6,327 9	6,329 7	6,331 5	6,333 3	6,335 1	6,336 8	6,338 6	6,340 4	6,342 1	6,343 9
57	6,345 6	6,347 4	6,349 1	6,350 9	6,352 6	6,354 4	6,356 1	6,357 8	6,359 6	6,361 3
58	6,363 0	6,364 8	6,366 5	6,368 2	6,369 9	6,371 6	6,373 3	6,375 0	6,376 7	6,378 4
59	6,380 1	6,381 8	6,383 5	6,385 2	6,386 9	6,388 6	6,390 2	6,391 9	6,393 6	6,395 3
60	6,396 9	6,398 6	6,400 3	6,401 9	6,403 6	6,405 2	6,406 9	6,408 5	6,410 2	6,411 8
61	6,413 5	6,415 1	6,416 7	6,418 4	6,420 0	6,421 6	6,423 2	6,424 9	6,426 5	6,428 1
62	6,429 7	6,431 3	6,432 9	6,434 5	6,436 2	6,437 8	6,439 4	6,440 9	6,442 5	6,444 1
63	6,445 7	6,447 3	6,448 9	6,450 5	6,452 0	6,453 6	6,455 2	6,456 8	6,458 3	6,459 9
64	6,461 5	6,463 0	6,464 6	6,466 1	6,467 7	6,469 3	6,470 8	6,472 3	6,473 9	6,475 4
65	6,477 0	6,478 5	6,480 0	6,481 6	6,483 1	6,484 6	6,486 2	6,487 7	6,489 2	6,490 7
66	6,492 2	6,493 8	6,495 3	6,496 8	6,498 3	6,499 8	6,501 3	6,502 8	6,504 3	6,505 8
67	6,507 3	6,508 8	6,510 3	6,511 7	6,513 2	6,514 7	6,516 2	6,517 7	6,519 1	6,520 6
68	6,522 1	6,523 6	6,525 0	6,526 5	6,528 0	6,529 4	6,530 9	6,532 3	6,533 8	6,535 2
69	6,536 7	6,538 1	6,539 6	6,541 0	6,542 5	6,543 9	6,545 3	6,546 8	6,548 2	6,549 7
70	6,551 1	6,552 5	6,553 9	6,555 4	6,556 8	6,558 2	6,559 6	6,561 0	6,562 4	6,563 9
71	6,565 3	6,566 7	6,568 1	6,569 5	6,570 9	6,572 3	6,573 7	6,575 1	6,576 5	6,577 9
72	6,579 3	6,580 6	6,582 0	6,583 4	6,584 8	6,586 2	6,587 6	6,588 9	6,590 3	6,591 7
73	6,593 0	6,594 4	6,595 8	6,597 1	6,598 5	6,599 9	6,601 2	6,602 6	6,603 9	6,605 3
74	6,606 7	6,608 0	6,609 3	6,610 7	6,612 0	6,613 4	6,614 7	6,616 1	6,617 4	6,618 7
75	6,620 1	6,621 4	6,622 7	6,624 1	6,625 4	6,626 7	6,628 0	6,629 4	6,630 7	6,632 0
76	6,633 3	6,634 6	6,635 9	6,637 3	6,638 6	6,639 9	6,641 2	6,642 5	6,643 8	6,645 1
77	6,646 4	6,647 7	6,649 0	6,650 3	6,651 6	6,652 9	6,654 2	6,655 4	6,656 7	6,658 0
78	6,659 3	6,660 6	6,661 9	6,663 1	6,664 4	6,665 7	6,667 0	6,668 2	6,669 5	6,670 8
79	6,672 0	6,673 3	6,674 6	6,675 8	6,677 1	6,678 3	6,679 6	6,680 9	6,682 1	6,683 4
80	6,684 6	6,685 9	6,687 1	6,688 4	6,689 6	6,690 8	6,692 1	6,693 3	6,694 6	6,695 8
81	6,697 0	6,698 3	6,699 5	6,700 7	6,702 0	6,703 2	6,704 4	6,705 6	6,706 9	6,708 1
82	6,709 3	6,710 5	6,711 7	6,713 0	6,714 2	6,715 4	6,716 6	6,717 8	6,719 0	6,720 2
83	6,721 4	6,722 6	6,723 8	6,725 0	6,726 2	6,727 4	6,728 6	6,729 8	6,731 0	6,732 2
84	6,733 4	6,734 6	6,735 8	6,737 0	6,738 2	6,739 3	6,740 5	6,741 7	6,742 9	6,744 1
85	6,745 2	6,746 4	6,747 6	6,748 8	6,749 9	6,751 1	6,752 3	6,753 4	6,754 6	6,755 8
86	6,756 9	6,758 1	6,759 3	6,760 4	6,761 6	6,762 7	6,763 9	6,765 0	6,766 2	6,767 3
87	6,768 5	6,769 6	6,770 8	6,771 9	6,773 1	6,774 2	6,775 4	6,776 5	6,777 6	6,778 8
88	6,779 9	6,781 1	6,782 2	6,783 3	6,784 5	6,785 6	6,786 7	6,787 8	6,789 0	6,790 1
89	6,791 2	6,792 3	6,793 5	6,794 6	6,795 7	6,796 8	6,797 9	6,799 1	6,800 2	6,801 3
90	6,802 4	6,803 5	6,804 6	6,805 7	6,806 8	6,807 9	6,809 0	6,810 1	6,811 2	6,812 3
91	6,813 4	6,814 5	6,815 6	6,816 7	6,817 8	6,818 9	6,820 0	6,821 1	6,822 2	6,823 3
92	6,824 4	6,825 5	6,826 5	6,827 6	6,828 7	6,829 8	6,830 9	6,832 0	6,833 0	6,834 1
93	6,835 2	6,836 3	6,837 3	6,838 4	6,839 5	6,840 5	6,841 6	6,842 7	6,843 7	6,844 8
94	6,845 9	6,846 9	6,848 0	6,849 1	6,850 1	6,851 2	6,852 2	6,853 3	6,854 4	6,855 4
95	6,856 5	6,857 5	6,858 6	6,859 6	6,860 7	6,861 7	6,862 8	6,863 8	6,864 8	6,865 9
96	6,866 9	6,868 0	6,869 0	6,870 1	6,871 1	6,872 1	6,873 2	6,874 2	6,875 2	6,876 3
97	6,877 3	6,878 3	6,879 4	6,880 4	6,881 4	6,882 4	6,883 5	6,884 5	6,885 5	6,886 5
98	6,887 6	6,888 6	6,889 6	6,890 6	6,891 6	6,892 6	6,893 7	6,894 7	6,895 7	6,896 7
99	6,897 7	6,898 7	6,899 7	6,900 7	6,901 7	6,902 7	6,903 7	6,904 8	6,905 8	6,906 8

Table n° 5: Fonction logarithme décimal ($100 \leq x \leq 499$)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0 000	0 043	0 086	0 128	0 170	0 212	0 253	0 294	0 334	0 374
11	0 414	0 453	0 492	0 531	0 569	0 607	0 645	0 682	0 719	0 755
12	0 792	0 828	0 864	0 899	0 934	0 969	1 004	1 038	1 072	1 106
13	1 139	1 173	1 206	1 239	1 271	1 303	1 335	1 367	1 399	1 430
14	1 461	1 492	1 523	1 553	1 584	1 614	1 644	1 673	1 703	1 732
15	1 761	1 790	1 818	1 847	1 875	1 903	1 931	1 959	1 987	2 014
16	2 041	2 068	2 095	2 122	2 148	2 175	2 201	2 227	2 253	2 279
17	2 304	2 330	2 355	2 380	2 405	2 430	2 455	2 480	2 504	2 529
18	2 553	2 577	2 601	2 625	2 648	2 672	2 695	2 718	2 742	2 765
19	2 788	2 810	2 833	2 856	2 878	2 900	2 923	2 945	2 967	2 989
20	3 100	3 032	3 054	3 075	3 096	3 118	3 139	3 160	3 181	3 201
21	3 222	3 243	3 263	3 284	3 304	3 324	3 345	3 365	3 385	3 404
22	3 424	3 444	3 464	3 483	3 502	3 522	3 541	3 560	3 579	3 598
23	3 617	3 636	3 655	3 674	3 692	3 711	3 729	3 747	3 766	3 784
24	3 802	3 820	3 838	3 856	3 874	3 892	3 909	3 927	3 945	3 962
25	3 979	3 997	4 014	4 031	4 048	4 065	4 082	4 099	4 116	4 133
26	4 150	4 166	4 183	4 200	4 216	4 232	4 249	4 265	4 281	4 298
27	4 314	4 330	4 346	4 362	4 378	4 393	4 409	4 425	4 440	4 456
28	4 472	4 487	4 502	4 518	4 533	4 548	4 564	4 579	4 594	4 609
29	4 624	4 639	4 654	4 669	4 683	4 698	4 713	4 728	4 742	4 757
30	4 771	4 786	4 800	4 814	4 829	4 843	4 857	4 871	4 886	4 900
31	4 914	4 928	4 942	4 955	4 969	4 983	4 997	5 011	5 024	5 038
32	5 051	5 065	5 079	5 092	5 105	5 119	5 132	5 145	5 159	5 172
33	5 185	5 198	5 211	5 224	5 237	5 250	5 263	5 276	5 289	5 302
34	5 315	5 328	5 340	5 353	5 366	5 378	5 391	5 403	5 416	5 428
35	5 441	5 453	5 465	5 478	5 490	5 502	5 514	5 527	5 539	5 551
36	5 563	5 575	5 587	5 599	5 611	5 623	5 635	5 647	5 658	5 670
37	5 682	5 694	5 705	5 717	5 729	5 740	5 752	5 763	5 775	5 786
38	5 798	5 809	5 821	5 832	5 843	5 855	5 866	5 877	5 888	5 899
39	5 911	5 922	5 933	5 944	5 955	5 966	5 977	5 988	5 999	6 010
40	6 021	6 031	6 042	6 053	6 064	6 075	6 085	6 096	6 107	6 117
41	6 128	6 138	6 149	6 160	6 170	6 180	6 191	6 201	6 212	6 222
42	6 232	6 243	6 253	6 263	6 274	6 284	6 294	6 304	6 314	6 325
43	6 335	6 345	6 355	6 365	6 375	6 385	6 395	6 405	6 415	6 425
44	6 435	6 444	6 454	6 464	6 474	6 484	6 493	6 503	6 513	6 522
45	6 532	6 542	6 551	6 561	6 571	6 580	6 590	6 599	6 609	6 618
46	6 628	6 637	6 646	6 656	6 665	6 675	6 684	6 693	6 702	6 712
47	6 721	6 730	6 739	6 749	6 758	6 767	6 776	6 785	6 794	6 803
48	6 812	6 821	6 830	6 839	6 848	6 857	6 866	6 875	6 884	6 893
49	6 902	6 911	6 920	6 928	6 937	6 946	6 955	6 964	6 972	6 981

Table n° 5 (suite): Fonction logarithme décimal ($500 \leq x \leq 999$)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6 990	6 998	7 007	7 016	7 024	7 033	7 042	7 050	7 059	7 067
51	7 076	7 084	7 093	7 101	7 110	7 118	7 126	7 135	7 143	7 152
52	7 160	7 168	7 177	7 185	7 193	7 202	7 210	7 218	7 226	7 235
53	7 243	7 251	7 259	7 267	7 275	7 284	7 292	7 300	7 308	7 316
54	7 324	7 332	7 340	7 348	7 356	7 364	7 372	7 380	7 388	7 396
55	7 404	7 412	7 419	7 427	7 435	7 443	7 451	7 459	7 466	7 474
56	7 482	7 490	7 497	7 505	7 513	7 520	7 528	7 536	7 543	7 551
57	7 559	7 566	7 574	7 582	7 589	7 597	7 604	7 612	7 619	7 627
58	7 634	7 642	7 649	7 657	7 664	7 672	7 679	7 686	7 694	7 701
59	7 709	7 716	7 723	7 731	7 738	7 745	7 752	7 760	7 767	7 774
60	7 782	7 789	7 796	7 803	7 810	7 818	7 825	7 832	7 839	7 846
61	7 853	7 860	7 868	7 875	7 882	7 889	7 896	7 903	7 910	7 917
62	7 924	7 931	7 938	7 945	7 952	7 959	7 966	7 973	7 980	7 987
63	7 993	8 000	8 007	8 014	8 021	8 028	8 035	8 041	8 048	8 055
64	8 062	8 069	8 075	8 082	8 089	8 096	8 102	8 109	8 116	8 122
65	8 129	8 136	8 142	8 149	8 156	8 162	8 169	8 176	8 182	8 189
66	8 195	8 202	8 209	8 215	8 222	8 228	8 235	8 241	8 248	8 254
67	8 261	8 267	8 274	8 280	8 287	8 293	8 299	8 306	8 312	8 319
68	8 325	8 331	8 338	8 344	8 351	8 357	8 363	8 370	8 376	8 382
69	8 388	8 395	8 401	8 407	8 414	8 420	8 426	8 432	8 439	8 445
70	8 451	8 457	8 463	8 470	8 476	8 482	8 488	8 494	8 500	8 506
71	8 513	8 519	8 525	8 531	8 537	8 543	8 549	8 555	8 561	8 567
72	8 573	8 579	8 585	8 591	8 597	8 603	8 609	8 615	8 621	8 627
73	8 633	8 639	8 645	8 651	8 657	8 663	8 669	8 675	8 681	8 686
74	8 692	8 698	8 704	8 710	8 716	8 722	8 727	8 733	8 739	8 745
75	8 751	8 756	8 762	8 768	8 774	8 779	8 785	8 791	8 797	8 802
76	8 808	8 814	8 820	8 825	8 831	8 837	8 842	8 848	8 854	8 859
77	8 865	8 871	8 876	8 882	8 887	8 893	8 899	8 904	8 910	8 915
78	8 921	8 927	8 932	8 938	8 943	8 949	8 954	8 960	8 965	8 971
79	8 976	8 982	8 987	8 993	8 998	9 004	9 009	9 015	9 020	9 025
80	9 031	9 036	9 042	9 047	9 053	9 058	9 063	9 069	9 074	9 079
81	9 085	9 090	9 096	9 101	9 106	9 112	9 117	9 122	9 128	9 133
82	9 138	9 143	9 149	9 154	9 159	9 165	9 170	9 175	9 180	9 186
83	9 191	9 196	9 201	9 206	9 212	9 217	9 222	9 227	9 232	9 238
84	9 243	9 248	9 253	9 258	9 263	9 269	9 274	9 279	9 284	9 289
85	9 294	9 299	9 304	9 309	9 315	9 320	9 325	9 330	9 335	9 340
86	9 345	9 350	9 355	9 360	9 365	9 370	9 375	9 380	9 385	9 390
87	9 395	9 400	9 405	9 410	9 415	9 420	9 425	9 430	9 435	9 440
88	9 445	9 450	9 455	9 460	9 465	9 469	9 474	9 479	9 484	9 489
89	9 494	9 499	9 504	9 509	9 513	9 518	9 523	9 528	9 533	9 538
90	9 542	9 547	9 552	9 557	9 562	9 566	9 571	9 576	9 581	9 586
91	9 590	9 595	9 600	9 605	9 609	9 614	9 619	9 624	9 628	9 633
92	9 638	9 643	9 647	9 652	9 657	9 661	9 666	9 671	9 675	9 680
93	9 685	9 689	9 694	9 699	9 703	9 708	9 713	9 717	9 722	9 727
94	9 731	9 736	9 741	9 745	9 750	9 754	9 759	9 763	9 768	9 773
95	9 777	9 782	9 786	9 791	9 795	9 800	9 805	9 809	9 814	9 818
96	9 823	9 827	9 832	9 836	9 841	9 845	9 850	9 854	9 859	9 863
97	9 868	9 872	9 877	9 881	9 886	9 890	9 894	9 899	9 903	9 908
98	9 912	9 917	9 921	9 926	9 930	9 934	9 939	9 943	9 948	9 952
99	9 956	9 961	9 965	9 969	9 974	9 978	9 983	9 987	9 991	9 996

Table n° 6: Fonction exponentielle ($|x| < 2$)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1	1	0,50	1,649	0,607	1,00	2,718	0,368	1,50	4,483	0,223
0,01	1,010	0,990	0,51	1,665	0,601	1,01	2,746	0,364	1,51	4,527	0,221
0,02	1,020	0,980	0,52	1,682	0,595	1,02	2,773	0,361	1,52	4,572	0,219
0,03	1,031	0,970	0,53	1,699	0,589	1,03	2,801	0,357	1,53	4,618	0,217
0,04	1,041	0,961	0,54	1,716	0,583	1,04	2,829	0,354	1,54	4,665	0,214
0,05	1,051	0,951	0,55	1,733	0,577	1,05	2,858	0,350	1,55	4,712	0,212
0,06	1,062	0,942	0,56	1,751	0,571	1,06	2,886	0,347	1,56	4,759	0,210
0,07	1,073	0,932	0,57	1,768	0,566	1,07	2,915	0,343	1,57	4,807	0,208
0,08	1,083	0,923	0,58	1,786	0,560	1,08	2,945	0,340	1,58	4,855	0,206
0,09	1,094	0,914	0,59	1,804	0,554	1,09	2,974	0,336	1,59	4,904	0,204
0,10	1,105	0,905	0,60	1,822	0,549	1,10	3,004	0,333	1,60	4,953	0,202
0,11	1,116	0,896	0,61	1,840	0,543	1,11	3,034	0,330	1,61	5,003	0,200
0,12	1,128	0,887	0,62	1,859	0,538	1,12	3,065	0,326	1,62	5,053	0,198
0,13	1,139	0,878	0,63	1,878	0,533	1,13	3,096	0,323	1,63	5,104	0,196
0,14	1,150	0,869	0,64	1,897	0,527	1,14	3,127	0,320	1,64	5,155	0,194
0,15	1,162	0,861	0,65	1,916	0,522	1,15	3,158	0,317	1,65	5,207	0,192
0,16	1,174	0,852	0,66	1,935	0,516	1,16	3,190	0,314	1,66	5,260	0,190
0,17	1,185	0,844	0,67	1,954	0,512	1,17	3,222	0,310	1,67	5,312	0,188
0,18	1,197	0,835	0,68	1,974	0,507	1,18	3,254	0,307	1,68	5,366	0,186
0,19	1,209	0,827	0,69	1,994	0,502	1,19	3,287	0,304	1,69	5,420	0,185
0,20	1,221	0,819	0,70	2,014	0,497	1,20	3,320	0,301	1,70	5,474	0,183
0,21	1,234	0,811	0,71	2,034	0,492	1,21	3,354	0,298	1,71	5,529	0,181
0,22	1,246	0,803	0,72	2,054	0,487	1,22	3,387	0,295	1,72	5,585	0,179
0,23	1,259	0,795	0,73	2,075	0,482	1,23	3,421	0,292	1,73	5,640	0,177
0,24	1,271	0,787	0,74	2,096	0,477	1,24	3,456	0,289	1,74	5,697	0,175
0,25	1,284	0,779	0,75	2,117	0,472	1,25	3,490	0,287	1,75	5,755	0,174
0,26	1,297	0,771	0,76	2,138	0,468	1,26	3,525	0,284	1,76	5,812	0,172
0,27	1,310	0,763	0,77	2,160	0,463	1,27	3,561	0,281	1,77	5,871	0,170
0,28	1,323	0,756	0,78	2,182	0,458	1,28	3,597	0,278	1,78	5,930	0,168
0,29	1,336	0,748	0,79	2,203	0,454	1,29	3,633	0,275	1,79	5,990	0,167
0,30	1,350	0,741	0,80	2,226	0,449	1,30	3,669	0,273	1,80	6,050	0,165
0,31	1,363	0,733	0,81	2,248	0,445	1,31	3,706	0,270	1,81	6,110	0,164
0,32	1,377	0,726	0,82	2,271	0,440	1,32	3,743	0,267	1,82	6,172	0,162
0,33	1,391	0,719	0,83	2,293	0,436	1,33	3,781	0,265	1,83	6,234	0,160
0,34	1,405	0,712	0,84	2,316	0,432	1,34	3,819	0,262	1,84	6,297	0,159
0,35	1,419	0,705	0,85	2,340	0,427	1,35	3,857	0,259	1,85	6,360	0,157
0,36	1,433	0,698	0,86	2,363	0,423	1,36	3,896	0,257	1,86	6,424	0,156
0,37	1,448	0,691	0,87	2,387	0,419	1,37	3,936	0,254	1,87	6,488	0,154
0,38	1,462	0,684	0,88	2,410	0,415	1,38	3,975	0,252	1,88	6,554	0,153
0,39	1,477	0,677	0,89	2,435	0,411	1,39	4,015	0,249	1,89	6,619	0,151
0,40	1,492	0,670	0,90	2,460	0,407	1,40	4,055	0,247	1,90	6,686	0,150
0,41	1,507	0,664	0,91	2,484	0,403	1,41	4,096	0,244	1,91	6,753	0,148
0,42	1,522	0,657	0,92	2,509	0,399	1,42	4,137	0,242	1,92	6,821	0,147
0,43	1,537	0,651	0,93	2,535	0,395	1,43	4,179	0,239	1,93	6,890	0,145
0,44	1,553	0,644	0,94	2,560	0,391	1,44	4,220	0,237	1,94	6,950	0,144
0,45	1,568	0,638	0,95	2,586	0,387	1,45	4,263	0,235	1,95	7,029	0,142
0,46	1,584	0,631	0,96	2,612	0,383	1,46	4,306	0,232	1,96	7,099	0,141
0,47	1,600	0,625	0,97	2,638	0,379	1,47	4,349	0,230	1,97	7,171	0,139
0,48	1,616	0,619	0,98	2,665	0,375	1,48	4,393	0,228	1,98	7,243	0,138
0,49	1,632	0,613	0,99	2,691	0,372	1,49	4,437	0,225	1,99	7,316	0,137

Table n° 6 (suite) : Fonction exponentielle ($2 \leq |x| < 4$)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2	7,389	0,135	2,50	12,182	0,082	3	20,086	0,050	3,50	33,115	0,030
2,01	7,463	0,134	2,51	12,305	0,081	3,01	20,287	0,049	3,51	33,448	0,030
2,02	7,538	0,133	2,52	12,429	0,080	3,02	20,491	0,049	3,52	33,784	0,030
2,03	7,614	0,131	2,53	12,554	0,080	3,03	20,697	0,048	3,53	34,124	0,029
2,04	7,691	0,130	2,54	12,680	0,079	3,04	20,905	0,048	3,54	34,467	0,029
2,05	7,768	0,129	2,55	12,807	0,078	3,05	21,115	0,047	3,55	34,813	0,029
2,06	7,846	0,127	2,56	12,936	0,077	3,06	21,328	0,047	3,56	35,163	0,028
2,07	7,925	0,126	2,57	13,066	0,077	3,07	21,542	0,046	3,57	35,517	0,028
2,08	8,004	0,125	2,58	13,197	0,076	3,08	21,758	0,046	3,58	35,874	0,028
2,09	8,085	0,124	2,59	13,330	0,075	3,09	21,977	0,045	3,59	36,234	0,028
2,10	8,166	0,122	2,60	13,464	0,074	3,10	22,198	0,045	3,60	36,598	0,027
2,11	8,248	0,121	2,61	13,599	0,074	3,11	22,421	0,045	3,61	36,966	0,027
2,12	8,331	0,120	2,62	13,736	0,072	3,12	22,646	0,044	3,62	37,338	0,027
2,13	8,415	0,119	2,63	13,874	0,072	3,13	22,874	0,044	3,63	37,713	0,026
2,14	8,499	0,118	2,64	14,013	0,071	3,14	23,104	0,043	3,64	38,092	0,026
2,15	8,585	0,116	2,65	14,154	0,070	3,15	23,336	0,043	3,65	38,475	0,026
2,16	8,671	0,115	2,66	14,296	0,070	3,16	23,571	0,043	3,66	38,861	0,025
2,17	8,758	0,114	2,67	14,440	0,069	3,17	23,807	0,042	3,67	39,252	0,025
2,18	8,846	0,113	2,68	14,585	0,069	3,18	24,047	0,042	3,68	39,646	0,025
2,19	8,935	0,112	2,69	14,732	0,068	3,19	24,288	0,041	3,69	40,045	0,025
2,20	9,025	0,110	2,70	14,880	0,067	3,20	24,533	0,041	3,70	40,447	0,025
2,21	9,116	0,110	2,71	15,029	0,067	3,21	24,779	0,040	3,71	40,854	0,024
2,22	9,207	0,109	2,72	15,180	0,066	3,22	25,028	0,040	3,72	41,264	0,024
2,23	9,300	0,108	2,73	15,333	0,065	3,23	25,280	0,040	3,73	41,679	0,024
2,24	9,393	0,106	2,74	15,487	0,065	3,24	25,534	0,039	3,74	42,098	0,024
2,25	9,488	0,105	2,75	15,643	0,064	3,25	25,790	0,039	3,75	42,521	0,023
2,26	9,583	0,104	2,76	15,800	0,063	3,26	26,050	0,038	3,76	42,948	0,023
2,27	9,679	0,103	2,77	15,959	0,063	3,27	26,311	0,038	3,77	43,380	0,023
2,28	9,777	0,102	2,78	16,119	0,062	3,28	26,576	0,038	3,78	43,816	0,023
2,29	9,875	0,101	2,79	16,281	0,061	3,29	26,843	0,037	3,79	44,256	0,023
2,30	9,974	0,100	2,80	16,445	0,061	3,30	27,113	0,037	3,80	44,701	0,022
2,31	10,074	0,099	2,81	16,610	0,060	3,31	27,385	0,037	3,81	45,150	0,022
2,32	10,176	0,098	2,82	16,777	0,060	3,32	27,660	0,036	3,82	45,604	0,022
2,33	10,278	0,097	2,83	16,945	0,059	3,33	27,938	0,036	3,83	46,063	0,022
2,34	10,381	0,096	2,84	17,116	0,058	3,34	28,219	0,035	3,84	46,525	0,021
2,35	10,486	0,095	2,85	17,288	0,058	3,35	28,503	0,035	3,85	46,993	0,021
2,36	10,591	0,094	2,86	17,462	0,057	3,36	28,789	0,035	3,86	47,465	0,021
2,37	10,697	0,093	2,87	17,637	0,057	3,37	29,079	0,034	3,87	47,942	0,021
2,38	10,805	0,092	2,88	17,814	0,056	3,38	29,371	0,034	3,88	48,424	0,020
2,39	10,913	0,092	2,89	17,993	0,056	3,39	29,666	0,034	3,89	48,911	0,020
2,40	11,023	0,091	2,90	18,174	0,055	3,40	29,964	0,033	3,90	49,402	0,020
2,41	11,134	0,090	2,91	18,357	0,054	3,41	30,265	0,033	3,91	49,899	0,020
2,42	11,246	0,089	2,92	18,541	0,054	3,42	30,569	0,033	3,92	50,400	0,020
2,43	11,359	0,088	2,93	18,728	0,053	3,43	30,877	0,032	3,93	50,907	0,020
2,44	11,473	0,087	2,94	18,916	0,053	3,44	31,187	0,032	3,94	51,419	0,019
2,45	11,588	0,086	2,95	19,106	0,052	3,45	31,500	0,031	3,95	51,935	0,019
2,46	11,705	0,085	2,96	19,298	0,052	3,46	31,817	0,031	3,96	52,457	0,019
2,47	11,822	0,085	2,97	19,492	0,051	3,47	32,137	0,031	3,97	52,985	0,019
2,48	11,941	0,084	2,98	19,688	0,051	3,48	32,460	0,030	3,98	53,517	0,018
2,49	12,061	0,083	2,99	19,886	0,050	3,49	32,786	0,030	3,99	54,055	0,018

Table n° 7 : Puissances de 2, de 3 et de 5.

Exposants	Puissances de 2	Puissances de 3	Puissances de 5
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625
21	2 097 152	10 460 353 203	476 837 158 203 125
22	4 194 304	31 381 059 609	2 384 185 791 015 625
23	8 388 608	94 143 178 827	11 920 928 955 078 125
24	16 777 216	282 429 536 481	59 604 644 775 390 625
25	33 554 432	857 288 609 443	298 023 223 876 953 125
26	67 108 864	2 541 865 828 329	1 490 116 119 384 765 625
27	134 217 728	7 625 597 484 987	7 450 580 596 923 825 125
28	268 435 456	22 876 792 454 961	37 252 902 984 619 140 625
29	536 870 912	68 630 377 364 883	186 264 514 923 095 703 125
30	1 073 741 824	205 891 132 094 649	931 322 574 615 478 515 625

Multiples de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{3}$ et de $\sqrt{5}$.

n	$n\sqrt{2}$	$n\sqrt{3}$	$n\sqrt{5}$
1	1,414 213 562 4	1,732 050 807 6	2,236 067 977 5
2	2,828 427 124 7	3,464 101 615 1	4,472 135 955 0
3	4,242 640 687 1	5,196 152 422 7	6,708 203 932 5
4	5,656 854 249 5	6,928 203 230 3	8,944 271 910 0
5	7,071 067 811 9	8,660 254 037 8	11,180 339 887 5
6	8,485 281 374 2	10,392 304 845 4	13,416 407 865 0
7	9,899 494 936 6	12,124 355 653 0	15,652 475 842 5
8	11,313 708 499 0	13,856 406 460 6	17,888 543 820 0
9	12,727 922 061 4	15,588 457 268 1	20,124 611 797 5

Index

accélération (vecteur) -	264	décimal (système)	23
accélération normale -	277	décomposition en facteurs premiers	71
accélération tangentielle -	277	décroissante (suite)	90
accéléré (mouvement) -	265	demi-tangente	183
accéléré (mouvement uniformément) -	270	dense (ensemble)	88
addition (tables d')	23	dérivable (fonction)	178
aire -	308	dérivable (fonction indéfiniment)	191
aire algébrique	314	dérivable à droite (fonction)	179
aire arithmétique	314	dérivable à gauche (fonction)	179
aire géométrique	314	dérivé (nombre... en un point)	178
anguleux (point) -	183	dérivée (fonction)	184
Archimède (lemme d')	18	développement d'un entier naturel	20
archimédien	86	différentiable (fonction)	177
asymptote -	215, 217, 219	différentielle	177
		direction asymptotique	224
base d'une fonction exponentielle	343	discontinue (fonction)	115
base d'une fonction logarithmique	339	distance	86
base d'un système de numération	22	divergente (suite)	93
Bernouilli (épreuves de)	393	diviseur d'un entier naturel	41
Bezout (identité de) -	61	diviseur de zéro	40
Bienaymé-Tchebicheff (inégalité de)	392	divisibilité (relation de...)	41
binaire (système)	23	division euclidienne	18, 42
binôme (formule du)	81		
binômiale (loi)	393	écart-type	391
borne d'un intervalle -	84	entiers modulo n (ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
borne inférieure -	10	des...)	44
borne supérieure -	10	épointé (intervalle)	112
bornée (suite) -	90	équation différentielle	412
boule	246	équiprobables (événements)	375
branche infinie -	215	Eratosthène (crible d')	67
branche parabolique	224, 226	escalier (fonction en)	290
		espérance mathématique	389
caractéristique d'un logarithme	355	étagée (fonction)	290
centre d'un mouvement vibratoire simple	273	Euclide (algorithme d')	60
centrée (variable aléatoire réelle)	389	exponentielle (fonction)	343
chiffre	19	exponentielle (fonction... de base e)	345
circulaire (mouvement)	262	extremum	209
circulaire uniforme (mouvement)	278		
cologarithme	356	famille d'arrivée	132
compatible (relation d'ordre)	11	famille de départ	132
composantes (fonctions... d'une fonction		fréquence d'apparition	397
vectorielle)	244		
congruence (relation de)	44	Gauss (théorème de)	62
continue (fonction)	113		
continue à droite (fonction)	116	hélice circulaire droite	258
continue à gauche (fonction)	116	hodographe	264
convergente (suite)	93	horaire (équation, loi)	267
croissante (suite)	90		

Handwritten signature in pink ink: KIPN

impaire (fonction)	204	ordonné (anneau, groupe)	12
indépendantes (variables aléatoires réelles)	386	paire (fonction)	203
indéterminée (forme)	143	paramètre	255
indicatrice	255	paramétrique (représentation)	255
indicielle (notation)	14	partie entière	86
inflexion (point d')	212	pas d'une fonction en escalier	290
intégrable (fonction... au sens de Riemann)	295	pas d'une hélice	259
intégrale d'une fonction sur un segment	295	pas d'une subdivision	290
intégration par parties	306	période	201
intègre	40	périodique (fonction)	201
intervalle	84	périodique (mouvement)	272, 278
		plus grand commun diviseur	55, 64
limite d'une fonction	124	plus grand élément	10
limite d'une suite	91, 92	plus petit commun multiple	55, 64
limite à droite d'une fonction	130	plus petit élément	10
limite à gauche d'une fonction	130	point matériel	261
limite suivant une famille	132	polaire (angle)	257
logarithme décimal	339	pôle	257
logarithme népérien	333	position d'un point matériel	261
logarithmique (échelle)	357	position limite d'une droite	180
logarithmique (fonction)	331	premiers (nombres)	65
loi conjointe d'un couple	384	premiers entre eux (nombres)	61, 65
loi faible des grands nombres	395	primitives	299
loi marginale	385	probabilisable (ensemble... fini)	371
		probabilisé (ensemble... fini)	373
majorant d'un ensemble	9	probabilité	373
majoré (ensemble)	9	probabilité (loi de)	380
majorée (suite)	90	probabilité image	380
mantisse d'un logarithme	355	progression arithmétique	95
maximum absolu, relatif	209	progression géométrique	98
minimum absolu, relatif	209	prolongement par continuité	128
minorant d'un ensemble	9	puissance $n^{\text{ième}}$ d'un réel	158
minoré (ensemble)	9	puissance rationnelle d'un réel strictement positif	169
minorée (suite)	90	pulsation d'un mouvement vibratoire simple	273
monotone (suite)	90		
mouvement d'un point matériel	261	quarrable (partie)	308
mouvement projeté	266	quotient d'une division euclidienne	18, 42
moyenne (valeur... d'une fonction sur un segment)	297		
multiples d'un entier rationnel	41	racine carrée	164
multiplication (tables de)	23	racine $n^{\text{ième}}$	164
		radical	164
naturels (ensemble $\mathbb{N}$ des entiers)	13	raison d'une progression	95, 98
numération (système de)	19	rationnels (ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers)	32

réurrence (raisonnement par)	14	symétrique (courbe... par rapport à un point)	204, 206
récurrente (suite)	17	symétrique (courbe... par rapport à une droite)	203, 205
rectiligne (mouvement)	262	symétrisation	30
rectiligne uniforme (mouvement)	269	symétrisé	31
réels (ensemble $\mathbb{R}$ des nombres)	80		
relatifs (ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers)	32	tangente (fonction affine)	177
répartition (fonction de)	381	tangente (fonction linéaire)	177
reste d'une division euclidienne	18, 42	tangente à une courbe	181
retardé (mouvement)	265	trajectoire	262
retardé (mouvement uniformément)	270	tribu	371
Riemann (fonction de)	294		
Riemann (somme de)	294	uniforme (mouvement)	265
segment	84	valeur absolue	39, 85
signes (règles des)	37	variable aléatoire réelle	377
stationnaire	92	variance	391
subdivision associée à une fonction en escalier	290	varié (mouvement uniformément)	270
subdivision d'un segment	290	vectorielle (fonction)	244
suite	16	vibratoire simple (mouvement)	271
suite arithmétique	95	vitesse (vecteur)	262
suite constante	80	vitesse angulaire	277
suite finie	16	vitesse arithmétique	262
suite géométrique	98	vitesse moyenne	269
suite réelle	16, 80		

Kam E...
PLEG - Mathématiques
 CN 1ère Dan JUDO

edmond
 697 913457

